Université Paris 13, Institut Galilée
L1 Physique-Chimie & Sciences de l'Ingénieur
Année universitaire 2018-2019, second semestre

Outils mathématiques 1
Quelques corrigés d'exercices de TD

Exercice 1. Exercice 6 du TD 4 *Soit f l'application linéaire de matrice* $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.

1. *Le noyau de f est l'ensemble des solutions de $f(\vec{v}) = 0$ ce qui est la même chose que les vecteurs colonnes X tels que $AX = 0$, soit le solutions du système*
$$\begin{cases} x + 2y + 3z & = 0 \\ 2x + y + 4z & = 0 \\ -x + 2y + 3z & = 0 \end{cases}$$
On trouve en effectuant un pivot de Gauss que les solutions sont uniquement $x = y = z = 0$ donc suelement le vecteur nul. Ainsi $\ker(f) = 0$.
2. *La dimension du noyau est donc* 0 *et il suit que le rang de f vaut*
$$\mathrm{rang}(f) = 3 - \dim(\ker(f)) = 3.$$

Exercice 2. Exercice 8 du TD 4 *Soit f l'application linéaire définie par* $f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + y + z \\ -x + 2y + 2z \end{pmatrix}$.

1. *Le noyau de f est l'ensemble des solutions de $f(\vec{v}) = 0$, soit le solutions du système*
$$\begin{cases} x + y + z & = 0 \\ -x + 2y + 2z & = 0 \end{cases} \underset{L_2 \leftarrow L_2 + L_1}{\Leftrightarrow} \begin{cases} x + y + z & = 0 \\ 3y + 3z & = 0 \end{cases}$$
d'où on déduit $y = -z$ puis $x = 0$. Ainsi le noyau est l'ensemble des vecteurs de la forme $\begin{pmatrix} 0 \\ -z \\ z \end{pmatrix}$ *qui est de dimension et a donc pour base n'importe quel vecteur non-nul ; par exemple (en prenant $z = 1$)* $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.
2. *La dimension du noyau est* 1 *et il suit que le rang de f qui est la même chise que la dimension de* $\mathrm{im}(f)$ *vaut*
$$\mathrm{rang}(f) = 3 - \dim(\ker(f)) = 3 - 1 = 2.$$

3. *Puisque dimension de* $\mathrm{rang}(f) = 2 = \dim(\mathbb{R}^2)$, *$f$ est surjective et* $\mathrm{im}(f) = \mathbb{R}^2$. *Ainsi la base canonique de $\mathbb{R}^2$ est une base de l'image de f.*

Exercice 3. Exercice 5 du TD 5 *Soit f l'application linéaire définie par* $f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x+y \\ -2x+2y \\ -x+y \end{pmatrix}$.

1. *La matrice de f dans la base canonique est la matrice $(f(e_1), f(e_2), f(e_3))$ où les vecteurs sont écrits dans la base canonique. On obtient que la matrice de f est la matrice*

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x+y+z & = 0 \\ -x+2y+2z & = 0 \end{cases}.$$

2. *On détermine* $\ker(f)$ *qui est l'ensemble des solutions de* $f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0$ *qui s'identifie à celui des vecteurs colonnes X vérifiant $AX = 0$:*

$$\left(\begin{array}{ll} -x+y & = 0 \\ -2x+2y & = 0 \\ -x+y & = 0 \end{array} \right. \underset{L_2 \leftarrow L_2 + L_1}{\Leftrightarrow} x = y$$

car nous avons 3 équations équivalentes. Autrement dit les solutions sont l'ensemble des vecteurs de la forme $\begin{pmatrix} t \\ t \\ z \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ *où t et z sont des paramètres réels. Ainsi on obtient que tout vecteur de $(ker)(f)$ s'écrit de manière unique comme une combinaison linéaire de* $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ *et* $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. *Ces deux derniers vecteurs forment donc une base du noyau de f :=* $\mathcal{B}_0 = \{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\}$.

3. *On a que* $f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = (x+y)\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$. *Ainsi* $f(x,y,z)$ *est toujours proportionnel au vecteur* $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ *et on a bien que ce dernier est dans l'image (en prenant* $x = 1$, $y = 0$*). On a obtenu que le vecteur* $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ *est une base de* $\mathrm{im}(f)$ *:* $\mathcal{B}_1 = \{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}\}$.

4. *Pour montrer que ces 3 vecteurs forment une base de* $\mathbb{R}^3$*, il suffit de montrer que la matrice des vecteurs colonnes de* $\mathcal{B}_0 \cup \mathcal{B}_1$ *forme une matrice inversible ce qui est équivalent à montrer que le système*

$$\begin{cases} x+z &= 0 \\ x+2z &= 0 \\ y+z &= 0 \end{cases}$$

a une unique *solution. Or*

$$\begin{cases} x+z &= 0 \\ x+2z &= 0 \\ y+z &= 0 \end{cases} \underset{L_2 \leftarrow L_2 - L_1}{\Leftrightarrow} \begin{cases} x+z &= 0 \\ z &= 0 \\ y+z &= 0 \end{cases}$$

et on obtient que $z = 0 = x = y$ *et ainsi le système n'a* que $x = y = z = 0$ *comme solution. La famille est bien libre et donc une base de* $\mathbb{R}^3$ *(car on a 3 vecteurs libres dans* $\mathbb{R}^3$*).*

5. *Notons* $\mathcal{C}$ *la base canonique. La matrice de* f *dans la base* $\mathcal{B}$ *est donnée par la formule*

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = P_{\mathcal{C},\mathcal{B}}^{-1}\mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(f)P_{\mathcal{C},\mathcal{B}}$$

où $P_{\mathcal{C},\mathcal{B}}$ *est la matrice de passage de* $\mathcal{C}$ *à* $\mathcal{B}$*, c'est à dire la matrice des vecteurs de* $\mathcal{B}$ *écrits dans la base canonique* $\mathcal{C}$*.*
Ainsi

$$P_{\mathcal{C},\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

On calcule son inverse par la méthode du cours en faisant le pivot de Gauss. On obtient

$$P_{\mathcal{C},\mathcal{B}}^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Puis on fait le produit des matrices

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (1)$$

6. *On voit facilement avec la forme de la question précédente que* $f \circ f = f$ *car* $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)^2 = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$. *Il suit que* f *est la projection orthogonale de* $\mathbb{R}^3$ *sur le vecteur* $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 4. Exercice 6 du TD 6 Soit $a \in \mathbb{R}$ et A la matrice suivante

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & a & 1 \\ a & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

2 .

1. En développant la première ligne nous obtenons

$$\det(A) = 1 \begin{vmatrix} a & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} - 0 + a \begin{vmatrix} 0 & a \\ a & 1 \end{vmatrix} = -1 - a^3.$$

La matrice est inversible si et seulement si le déterminant est non nul donc si et seulement si $a^3 \neq -1$ c'est à dire $a \neq -1$.

2. On suppose donc $a \neq 1$. On a

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & a & 1 \\ a & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \vdots \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{en faisant } L_3 \leftarrow L_3 - aL_1$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & a & 1 \\ 0 & 1 & -a^2 \end{pmatrix} \quad \vdots \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -a & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{en faisant } L_2 \leftrightarrow L_3$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & -a^2 \\ 0 & a & 1 \end{pmatrix} \quad \vdots \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -a & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{en faisant } L_3 \leftarrow L_3 - aL_2$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & -a^2 \\ 0 & 0 & 1+a^3 \end{pmatrix} \quad \vdots \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -a & 0 & 1 \\ a^2 & 1 & -a \end{pmatrix} \text{en faisant } L_1 \leftarrow L_1 - \frac{a}{1+a^3}L_3,\ L_2 \leftarrow L_2 + \frac{a^2}{1+a^3}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \vdots \quad \begin{pmatrix} :\dfrac{1}{1+a^3} & -\dfrac{a}{1+a^3} & a+\dfrac{a^2}{1+a^3} \\ -\dfrac{a}{1+a^3} & \dfrac{a^2}{1+a^3} & \dfrac{1}{1+a^3} \\ a^2 & 1 & -a \end{pmatrix}.$$

(après simplification dans la matrice de droite). Ainsi $A^{-1} = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{1+a^3} & -\dfrac{a}{1+a^3} & a+\dfrac{a^2}{1+a^3} \\ -\dfrac{a}{1+a^3} & \dfrac{a^2}{1+a^3} & \dfrac{1}{1+a^3} \\ a^2 & 1 & -a \end{pmatrix}$.