# TD 1 - Corrigé

**Exercice 1.** *Soit $A$ un anneau commutatif et $M, L, K$ des $A$-modules. On note $\mathcal{C}$ la catégorie des $A$-modules.*

**(1)** *Montrer que $\mathcal{C} \ni N \mapsto \mathrm{Hom}_A(M \otimes_A \mathrm{Hom}_A(N, L), K)$ induit un foncteur (covariant) $F : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$.*

**(2) i)** *Donner des conditions sur $L, M$ pour que $F$ soit exact à gauche.*

**ii)** *Donner des conditions sur $K, M$ pour que $F$ soit exact à droite.*

**iii)** *Donner des conditions sur $K, L, M$ pour que $F$ soit exact.*

**(3)** *On suppose $A = \mathbb{Z}$, $M = \mathbb{Z}$ et $K = \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$.*

**i)** *Montrer que $F$ est exact à droite.*

**ii)** *Soit $m \geq 1$ et $L = \mathbb{Z}$. Calculer $L^i(F)(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})$ pour tout $i \in \mathbb{Z}$.*

**iii)** *Soit $m, n \geq 1$ et $L = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Calculer $L^i(F)(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})$ pour tout $i \in \mathbb{Z}$.*

**Solution 1. (1)** Rappelons que la composée de deux foncteurs covariants ou de deux foncteurs contravariant est un foncteur covariant. La composée d'un foncteur covariant et d'un foncteur contravariant (ou le contraire) est un foncteur contravariant. Or pour tout objet $N$ de $\mathcal{C}$, $F(N) = \mathrm{Hom}_A(M \otimes_A \mathrm{Hom}_A(N, L), K)$ est la composée des foncteurs $\mathrm{Hom}_A(-, K) : \mathcal{C}^{op} \to \mathcal{C}$ (donc contravariant), $M \otimes_A - : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ (covariant) et $\mathrm{Hom}_A(-, L) : \mathcal{C}^{op} \to \mathcal{C}$ (donc contravariant). C'est donc un foncteur covariant.

**(2) i)** Par définition $F$ est exact à gauche s'il transforme toute suite exacte $0 \to X' \to X \to X"$ en une suite exacte $0 \to F(X') \to F(X) \to F(X")$. En appliquant le foncteur $\mathrm{Hom}_A(-, L)$ à la suite exacte $0 \to X' \to X \to X"$, on obtient le complexe

$$\mathrm{Hom}_A(X", L) \to \mathrm{Hom}_A(X, L) \to \mathrm{Hom}_A(X', L) \to 0.$$

On sait que ce complexe est une suite exacte lorsque $\mathrm{Hom}_A(-, L)$ est exact à droite, c'est à dire si $L$ est injectif. En ce cas, comme $M \otimes_A -$ est exact à droite, et $\mathrm{Hom}_A(-, K)$ exact à gauche, on obtient que $0 \to F(X') \to F(X) \to F(X")$ est exacte. Conclusion : Il suffit que $L$ soit injectif pour que $F$ soit exact à droite.

**ii)** Un raisonnement analogue assure que $F$ est exact à gauche si $M$ est plat ( auquel cas $M \otimes_A -$ est exact à gauche) et $K$ injectif.

**iii)** De **i), ii)**, on déduit que $F$ est exact si $K, L$ sont injectifs et $M$ plat.

**(3)** On remarque que $M = \mathbb{Z}$ est libre sur $\mathbb{Z}$, donc plat et $K = \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ est injectif (voir le lemme de Baer plus bas).

**i)** Les hypothèses de **(2).ii)** sont satisfaites, donc $F$ est exact à droite. En particulier il admet des foncteurs dérivés à gauche (puisque la catégorie $\mathrm{Mod}(\mathbb{Z})$ admet assez d'objets projectifs).

**ii)** Il faut trouver une résolution projective de $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$. On utilise la résolution libre (en particulier projective) déjà vue en TD : $\cdots \to 0 \to 0 \to \mathbb{Z} \overset{\times m}{\to} \mathbb{Z}$. On alors que, pour tout $i \in \mathbb{Z}$, les groupes de cohomologie $L_i(F)(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})$ sont donnés par la formule :

$$L_i(F)(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}) = H^{-i}\big(\ldots \longrightarrow 0 \longrightarrow F(\mathbb{Z}) \overset{F(\times m)}{\longrightarrow} F(\mathbb{Z})\big).$$

Ceci donne immédiatement $L^{i>1}(F)(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}) = 0$. Comme $\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} X \cong X$ (l'isomorphisme étant donné par $k \otimes_{\mathbb{Z}} x \mapsto kx$) et $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}, X) \cong X$ (l'isomorphisme étant donné par $\varphi \mapsto \varphi(1)$), on obtient $F(\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ et $F(\times m) = \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \xrightarrow{\times m} \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$. Comme $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ est divisible (c'est à dire que pour tout $x$, $n \in \mathbb{Z} - \{0\}$, il existe $y \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ avec $ny = x$), on en déduit que

$$L^0(F)(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}) \cong \mathrm{coker}(\mathbb{Q}/\mathbb{Z} \xrightarrow{\times m} \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) = 0.$$

Il reste à calculer $L^1(F)(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}) \cong \ker(\mathbb{Q}/\mathbb{Z} \xrightarrow{\times m} \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$. Tout élément de $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ est représenté par la classe d'un élément $p/q \in \mathbb{Q}$ avec $p \wedge q = 1$ (en notant $p \wedge q$ le pgcd de $p$ et $q$). On obtient que $mp/q = 0 \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ si $q/m$. La réciproque est immédiate. Il en découle que

$$L^1(F)(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}.$$

**ii)** Evidemment, on utilise la même résolution projective de $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$. Avec $L = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, on a $F(\mathbb{Z}) = \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$. Un morphisme $\varphi : \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ est uniquement déterminé par l'image $\varphi(1)$ qui en outre doit vérifier $0 = \varphi(n) = n\varphi(1)$. On en déduit que $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \cong \ker(\mathbb{Q}/\mathbb{Z} \xrightarrow{\times n} \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Par conséquent on doit calcler la cohomologie du complexe

$$\dots 0 \longrightarrow 0 \longrightarrow \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \xrightarrow{\times m} \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}.$$

On obtient alors par des calculs similaires à ceux fait en TD

$$L^0(F)(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}/n \wedge m\mathbb{Z}, \qquad L^1(F)(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}/n \wedge m\mathbb{Z}, \qquad L^{i>1}(F)(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}) = 0.$$

**Exercice 2.** *Soit $\mathcal{C}$ une catégorie abélienne qui admet des produits indexés par un ensemble $I$. On suppose de plus que $\mathcal{C}$ admet assez d'objets injectifs.*

**1)** *Montrer que $\prod_{i \in I} X_i$ est injectif si chaque $X_i$ est un objet injectif.*

**2)** *Soit $\mathcal{C}'$ une autre catégorie abélienne admetant des produits indexés par $I$. On suppose de plus que les foncteurs $\prod : \mathcal{C}^I \to \mathcal{C}$ et $\prod : \mathcal{C}'^I \to \mathcal{C}'$ sont exacts. Soit enfin $F : \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ un foncteur additif exact à gauche et commutant aux produits indexés par $I$. Montrer que, pour tout $j \in \mathbb{N}$, le $j$-éme foncteur dérivé $R^jF$ commute aux produits indexés par $I$, c'est à dire:*

$$R^jF\left(\prod_{i \in I} X_i\right) \cong \prod_{i \in I} R^jF(X_i).$$

**Solution 2. 1)** Supposons que chaque objet $X_i$ est injectif, alors les foncteurs $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(-, X_i)$ sont exacts. Par définition du produit on a un isomorphisme de foncteurs

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(-, \prod_{i \in I} X_i) \cong \prod_{i \in I} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(-, X_i).$$

Mais puisque $\mathcal{C}$ est abélienne, le foncteur $\prod_{i \in I}$ est exact. Alors, pour toute suite exacte $0 \to M“ \to M \to M' \to 0$, on obtient que les suites

$$0 \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(M'', X_i) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(M, X_i) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(M', X_i) \to 0$$

sont exactes et par suite $0 \to \prod_{i \in I} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(M'', X_i) \to \prod_{i \in I} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(M, X_i) \to \prod_{i \in I} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(M', X_i) \to 0$ est exacte. Par conséquent, le foncteur $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(-, \prod_{i \in I} X_i)$ est exact. En particulier $\prod_{i \in I} X_i$ est un objet injectif.

**2)** Pour $i \in I$, on choisit une résolution injective $N_i^\bullet$ de $X_i$; en d'autres termes chaque $N_i^n$ est injectif et on a une suite exacte $0 \to X_i \to N_i^0 \to N_i^1 \to \dots$. Montrons que $\prod_{i\in I} N_i^\bullet$ est une résolution injective de $\prod_{i\in I} X_i$. D'aprés la question **1)**, pour tout $n$, $\prod_{i\in I} N_i^n$. Comme le produit $\prod_{i\in I}$ est un foncteur exact, on obtient que la suite

$$0 \to \prod_{i\in I} X_i \to \prod_{i\in I} N_i^0 \to \prod_{i\in I} N_i^1 \to \prod_{i\in I} N_i^2 \dots$$

est exacte ce qui finit de prouver que $\prod_{i\in I} N_i^\bullet$ est une résolution injective de $\prod_{i\in I} X_i$. On a donc des isomorphismes naturels

$$\begin{aligned} R^jF\left(\prod_{i\in I} X_i\right) &\cong H^j\big(F(\prod_{i\in I} N_i^0 \to \prod_{i\in I} N_i^1 \to \prod_{i\in I} N_i^2 \dots)\big) \\ &\cong H^j\big(\prod_{i\in I} F(N_i^0) \to \prod_{i\in I} F(N_i^1) \to \prod_{i\in I} F(N_i^2)\dots\big) \text{ car } F \text{ commute aux produits} \\ &\cong \prod_{i\in I} H^j\big(F(N_i^0) \to F(N_i^1) \to F(N_i^2)\dots\big) \text{ car } \prod_{i\in I} \text{ est exact} \\ &\cong \prod_{i\in I} R^jF(X_i) \end{aligned}$$

puisque les $N_i^\bullet$ sont des résolutions injectives des objets $X_i$.

**Exercice 3 (Lemme de Baer). (1)** *Soit $E$ un $A$-module injectif. Montrer que $E$ vérifie la condition suivante :*

$$\textit{pour tout idéal } I \textit{ de } A, \textit{ l'application } \operatorname{Hom}_A(A, E) \longrightarrow \operatorname{Hom}_A(I, E) \quad \textit{est surjective.} \tag{0.1}$$

**(2)** *Soit $E$ un $A$-module vérifiant la condition* (0.1). *On se donne un diagramme* $\begin{array}{ccc} 0 \to N' & \xrightarrow{f} & N \\ {\scriptstyle g}\downarrow & & \\ E & & \end{array}$. *On note $X$ l'ensemble des couples $(P, h_P)$ où $P$ est un sous-module de $N$ vérifiant $f(N') \subset P \subset N$ et $h_P : P \to E$ est une extension de $g$, c'est à dire $g = h_P \circ f$. On dit que $(P, h_P) \leq (Q, h_Q)$ si $P \subset Q$ et $h_Q/P = h_P$. Montrer que $\leq$ est une relation d'ordre partiel.*

**(3)** *Montrer qu'un $A$-module $E$ est injectif si et seulement si il satisfait à la condition* (0.1) *(on pourra utiliser le* **(2)** *et appliquer le lemme de Zorn).*

**Solution 3. (1)** Si $E$ est injectif, alors comme $I$ s'injecte dans $A$, on a que tout morphisme $I \to E$ se prolonge en un morphisme $A \to E$ par définition des module injectifs. Ce qui donne la surjectivité de $\operatorname{Hom}_A(A, E) \longrightarrow \operatorname{Hom}_A(I, E)$.

**(2)** On considère le diagramme $\begin{array}{ccc} 0 \to N' & \xrightarrow{f} & N \\ {\scriptstyle g}\downarrow & & \\ E & & \end{array}$. L'ensemble des couples $(P, h_P)$ où $P$ est un sous-module de $N$ vérifiant $f(N') \subset P \subset N$ et $h_P : P \to E$ est une extension de $g$ est muni de la relation d'ordre $(P, h_P) \leq (Q, h_Q)$ si $P \subset Q$ et $h_Q/P = h_P$. On a bien $(P, h_P) \leq (P, h_p)$, si $P \subset Q \subset R$ est une suite croissante d'extension, alors, $R$ est une extension de $P$. De plus si $(P, h_P) \leq (Q, h_Q)$ et $(Q, h_Q) \leq (P, h_P)$ alors $P = Q$. La relation est donc bien une relation d'ordre.

**(3)** Montrons que $\leq$ vérifie les hypothèses du Lemme de Zorn; c'est à dire que toute sous-famille totalement ordonnée admet un élément maximal. Soit $(P_i, h_{P_i})_{i\in\Im}$ une famille totalement ordonnée d'éléments de $X$. (Pour tout $i, j \in \Im$ on a $(P_i, h_{P_i}) \preceq (P_j, h_{P_j})$ ou $(P_j, h_{P_j}) \preceq (P_i, h_{P_i})$.) On pose

$P = \bigcup_{i \in \Im} P_i$ et on définit $h : P \to E$ par $h(x) = h_{P_i}(x)$ si $x \in P_i$ de sorte que $(P, h_P) \in X$. D'après le lemme de Zorn, on a donc que $X$ admet un

Supposons, par l'absurde, que $M \subsetneq N$. Il existe donc $x \in N \setminus M$. Alors $P = M + A.x$ est un sous module de $N$ qui contient strictement $M$. On définit $I = (M : x) = \{a \in A,\ a.x \in M\}$ qui est un idéal. Soit $\gamma : I \to E$, l'application $\gamma(a) = h_M(a.x)$. D'après l'hypothèse de l'énoncé il existe alors $\varphi : A \to E$ tel que $\varphi_{|I} = \gamma$.

On définit alors $h_P : P \to E$ par $h_P(y + a.x) = h_M(y) + \varphi(a)$ (où $y \in M$). Cette définition est consistante car si $y + a.x = y' + a'.x$ alors $(a' - a).x = y - y' \in M$ donc $a' - a \in I$ et $\varphi(a' - a) = \gamma(a' - a) = h_M((a' - a).x) = h_M(y - y')$ d'où $h_M(y) + \varphi(a) = h_M(y') + \varphi(a')$.

On a ainsi obtenu un élément $(P, h_P)$ tel que $(M, h_M) \prec (P, h_P)$ ce qui est impossible car $(M, h_M)$ est maximal. On a donc $M = N$ et un morphisme $h : N \to E$ tel que $h \circ f = g$. Ceci étant vrai pour tout diagramme $\begin{array}{ccc} 0 \to & N' & \xrightarrow{f} N \\ & {\scriptstyle g}\downarrow & \\ & E & \end{array}$ on a bien montré que $E$ est injectif.

**Exercice 4 (cône d'un morphisme).** *Soit $X^\bullet, Y^\bullet \in \mathbb{C}(\mathcal{C})$ deux complexes et $f : X^\bullet \to Y^\bullet$ un morphisme de complexes. On définit le cône de $f$ par $M^n(f) = X^{n+1} \oplus Y^n$. Soit $d_f : M^\bullet(f) \to M^{\bullet+1}(f)$ définie par la matrice $\begin{bmatrix} -d_X & 0 \\ f^\bullet & d_Y \end{bmatrix}$.*

**(1)** *Montrer que $(M(f), d_f)$ est un objet de $\mathbb{C}(\mathcal{C})$, c'est à dire un complexe.*

**(2)** *Montrer que $M(f)$ ne dépend (à isomorphisme près) que de la classe de $f$ dans $K(\mathcal{C})$, la catégorie homotopique de $\mathcal{C}$.*

**(3)** *Construire une suite exacte de complexes*

$$0 \to Y^\bullet \to M^\bullet(f) \to X^\bullet[1] \to 0.$$

**(4)** *Identifier les morphismes $H^\bullet(X) \to H^\bullet(Y)$ dans la suite exacte longue associée à la suite exacte courte de la question* **(3)**. *En déduire que $f$ est un quasi-isomorphisme si et seulement si $H^\bullet(M(f)) = 0$.*

**Solution 4.** **(1)** On a $(d_f \circ d_f)(x, y) = d_f(-d_X(x), d_Y(y) + f(x)) = d_X^2(x), d_Y^2(y) - f(d_X(x)) + d_Y f(x) = (0, 0)$ car $d_X, d_Y$ sont de carrés nuls et $f$ est un morphisme de complexes.

**(2)** Soit $f - f' = s d_X + d_Y s$ avec $s : X^\bullet \to Y^{\bullet-1}$. On vérifie aisément que le morphisme $h = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ s^\bullet & 1 \end{bmatrix}$ est un morphisme de $C(f) \to C(f')$. Il est de plus inversible; d'inverse $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -s^\bullet & 1 \end{bmatrix}$.

**(3)** On vérifie que $i_Y : Y^\bullet \to X^{\bullet+1} \oplus Y^\bullet$ est un morphisme de complexes, de même que $p_X : X^{\bullet+1} \oplus Y^\bullet \to X^{\bullet+1} = X[1]^\bullet$ (rappelons que la différentielle sur le complexe $X[1]$ est $-d_X$). De plus $p_X i_Y = 0$, $p_X i_X = \mathrm{Id}$ et le noyau de $p_X$ est $\mathrm{im}(i_Y)$ d'après l'équation $i_X p_X + i_Y p_Y = \mathrm{Id}$.On en conclut que la suite

$$0 \to Y^\bullet \xrightarrow{i_Y} M^\bullet(f) \xrightarrow{p_X} X^\bullet[1] \to 0$$

est exacte.

**(4)** Il suffit de reprendre la construction du morphisme de connexion $\delta$ dans le lemme du serpent. En effet, d'après le cours, la longue suite exacte en homologie s'écrit

$$\dots H^n(Y) \to H^n(M(f)) \to H^n(X[1]) \xrightarrow{\delta} H^{n+1}(Y) \to \dots$$

avec $H^n(X[1]) = H^{n+1}(X)$. Le morphisme $\delta$ est le morphisme $\ker(X^{n+1} \overset{d_X}{\to} X^{n+2}) \to \operatorname{coker}(Y^n \overset{d_Y}{\to} Y^{n+1})$ donné par le lemme du serpent, voir le cours et le TD 2. Précisément, étant donné $x \in X^{n+1}$ avec $d_X(x) = 0$, $\delta(x)$ est obtenu en prenant un antécédent (quelconque) de $x$ par $p_X$, c'est à dire $h \in M(f)^n$ avec $p_X(h) = x$. Puis on prend $z \in Y^{n+1}$ tel que $i_Y(y) = d_f(h)$. On a alors $\delta(x) = [y]$, où $[y]$ est l'image de $y$par l'application canonique vers le conoyau. Dans le cas présent, on peut choisir $h = (x, 0)$. On obtient alors $d_f(h) = (0, f(y))$. On conclut que l'application $H^n(X[1]) \overset{\delta}{\to} H^{n+1}(Y)$ induite dans la longue suite exacte est l'application $H^{n+1}(f)$ induite par $f$ via l'isomorphisme $H^n(X[1]) = H^{n+1}(X)$. Mais $f$ est un quasi-isomorphisme si et seulement si $H^\bullet(f)$ est un isomorphisme. D'après la suite exacte longue, si $H^\bullet(f)$ est un isomorphisme alors, $H^\bullet(M(f)) \to H^{\bullet+1}(X)$ est l'application nulle de même que $H^\bullet(Y) \to H^\bullet(M(f))$ ce qui par exactitude force $H^\bullet(M(f)) = 0$. réciproquement, si $H^\bullet(M(f)) = 0$, la suite exacte implique immédiatement que $H^\bullet(f)$ est un isomorphisme puisqu'elle se réduit à des suites exactes $0 \to H^\bullet(X) \to H^\bullet(Y) \to 0$.

**Exercice 5** (Une cofibration est une inclusion)**.** *1. Démontrer que si $A \subset X$ est un rétracte de $X$ et que $X$ est Hausdorff, alors $A$ est fermé.*

*2. Démontrer que si $A \to X$ est une cofibration, alors $A$ est l'inclusion d'un sous-espace dans $X$, qui est fermé si $X$ est Hausdorff. (utiliser le cylindre de $A \to X$ et la première question).*

**Solution 5.** 1. Si $X$ est de Hausdorff, alors la diagonale $\Delta(X) = \{(x, x)\} \subset X \times X$ est fermée. Il suit que si $f, g : X \to X$ sont continues, alors le sous-espace

$$Eq(f, g) := \{x \in X \text{ tel que } f(x) = g(x)\} = (f, g)^{-1}(\Delta(X))$$

est fermé aussi. Si $r; X \to A$ est la rétraction, alors $A$ s'identifie avec $\{x \in X \text{ tel que } r(x) = x\}$ et est donc fermé.

2. Le dernier point suit du premier et de la première question. L'application $i : A \to X$ se factorise au travers du cylindre :

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, hook, "id\times\{1\}"] \arrow[rr, bend right, "i"'] & Cyl(i) \arrow[r, "\simeq"] & X \end{tikzcd}$$

On veut montrer que $i$ est un homéomorphisme sur son image, et donc construire une application réciproque. On a en fait toute une famille de factorisation comme ci-dessus donnée par les applications $a \mapsto (a, t) \in Cyl(i)$ pour $t \in [0, 1]$. On a ainsi un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r] \arrow[d, "i"'] & Cyl(i)^{[0,1]} \arrow[d, "ev_0"] \\ X \arrow[r, hook] \arrow[ur, dotted, "h"] & Cyl(i) \end{tikzcd}$$

dont le relèvement est donné par le fait que $i : A \to X$ est une cofibration. L'homotopie induite $h$ est juste l'inclusion de $X$ dans le cylindre pour $t = 0$ et, pour tout $t > 0$, et $a \in A$, on a donc que

$$h(i(a))(t) = (a, t).$$

En particulier pour $t = 1$ (ou tout autre $t > 0$), on a que la restriction de $h(-)(1)$ à $i(A)$ donne une application continue $h(-)(1) : i(A) \to A \times \{1\} \cong A$ qui est un inverse à gauche de $i$. Ceci prouve l'injectivité de $i$ et nous donne aussi immédiatement que $i : A \to i(A)$ est un homéomorphisme d'inverse $h(-)(1)$.

**Exercice 6** (Théorème de Whitehead)**.** *Soit $f : X \to Y$ une application continue entre espaces cellulaires. On veut démontrer que $f$ est une équivalence d'homotopie faible, alors $f$ est une équivalence d'homotopie*

1. *Soit $L$ un CW-complexe et $K \subset L$ un sous-complexe cellulaire. Soit $\emptyset \neq A \subset B$ une paire d'espaces topologiques. On suppose que, pour tout entier $n \geq 0$, si $L^{(n)} - K^{(n)} \neq \emptyset$, alors, quelque soit $a_0 \in A$, $\pi_n(B, A, a_0) = 0$[1]. Démontrer que toute application continue $g : (L, K) \to (B, A)$ est homotope relativement à $K$ à une application à valeur dans $A$.*

2. *On suppose que $f : X \to Y$ est l'inclusion d'un sous-CW complexe. En déduire qu'alors $f : X \to Y$ est un rétracte par déformation de $Y$ et conclure.*

3. *Démontrer que l'application de paire naturelle $(X \cup Y, X) \hookrightarrow (Cyl(f), X)$ est homotope à une application à valeur dans $X$ (utiliser la première question). Ici $Cyl(f) = X \times [0,1] \cup_f Y$ est le cylindre de $f$.*

4. *Démontrer que l'homotopie de la question précédente s'étend en une homotopie définie sur tout le cylindre (et pas seulement $X \cup Y$).*

5. *En déduire qu'il existe une application $f : Cyl(f) \to Cyl(f)$à valeur dans $X$, qui vaut l'identité sur $X$, et est homotope à l'identité.*

6. *Conclure (on pourra utiliser la première question).*

**Solution 6.** Remarque, puisque toute application continue entre CW-complexes est homotope à une application cellulaire, on peut, à homotopie près, remplacer $f$ par une application cellulaire. On peut alors simplifier la fin de la preuve en se ramenant à la question via l'inclusion (devenue cellulaire) de $X$ dans le cylindre de $f$.

1. Comme d'habitude avec les CW-complexes, on construit $g$ et l'homotopie $H$ par récurrence sur le squelette. Supposons avoir construit une telle homotopie $H$ sur $L^{(<n)}$. Supposons que $L^{(n)} - K^{(n)} \neq \emptyset$ (sinon il n'y a rien d'autres à faire qu'étendre $H$ par les valeurs (constante en $t \in [0,1]$) de $g$ sur les cellules de $K^{(n)}$; cela ne pose pas de problèmes puisque par hypothèse sur le bord des cellules de $K^{(n)}$, l'homotopie coincide avec $g$). Pour construire $H$ sur $L^{(n)}$, il suffit maintenant de construire $H$ sur chaque cellule de dimension $e_\alpha : I^n \to L^{(n)} - K^{(n)}$. Par hypothèse de récurrence $g \circ e_\alpha(\partial I^n)$ est dans $g(L^{(n-1)}) \subset K$. En choisissant un point base dans $K$ correspondant à l'image d'un point base de $\partial I^n$, de $\pi_n(B, A, a_0) = 0$, on déduit que $g \circ e_n$ est homotope, relativement à son bord à une application à valeur dans $K$ (cf le lemme du cours sur la nullité d'une classe dans les groupes d'homotopie d'une paire). La réunion de ces homotopies, en donne une sur tout le $n$-squelette (on a pas de problème de compatibilité puisque on recolle sur le bord dont l'image est fixé). Pour conclure, il suffit de vérifir qu'on peut effectuer ces opérations à chauqe étage $n$ successivement. C'est en fait facile: rappelons que pour construire une application $H : L \times [0,1] \to B$, il suffit de construire une famille d'application $H_{(n} : L^{(n)} \times [0,1] \to B$ telles que $H_{(n)|L^{(m)}} = H_{(m)}$ puisque la topologie est celle de la réunion. On construit alors $H_{(n)}$ comme ci-dessus mais de telle sorte que l'homotopie à l'étage $n$ ne soit non-constante que sur l'intervalle de temps $[1 - 1/2^n, 1 - 1/2^{n+1}]$. On peut alors effectivement recoller les homotopies ci-dessus.

2. On applique la question précédente à l'identité $Y \to Y$ en remarquant que la longue suite exacte d'une paire implique que $\pi_n(Y, X, x_0)$ est nulle pour tout $n$.

3. On a la factorisation $f : X \hookrightarrow Cyl(f) \xrightarrow{\simeq} Y$ dont la deuxième flèche est une équivalence d'homotopie. Comme $f_*$ est une équivalence d'homotopie faible par hypothèse, on en déduit que $X \hookrightarrow Cyl(f)$ est une équivalence d'homotopie faible aussi. Par conséquent, par le même argument que la question précédente, on a que $\pi_n(Cyl(f), X, x_0) = 0$ et ainsi on peut appliquer la question 1 qui donne une homotopie de l'inclusion naturelle $(X \cup Y, X) \hookrightarrow (Cyl(f), X)$ avec une application à valeur dans $X$, qui plus est par une homotopie constante égale à l'identité sur $X$.

[1] pour $n = 0$, on définit cette condition comme le fait que l'application naturelle $\pi_0(A) \to \pi_0(B)$ est une bijection

4. Commençons par remarquer que $X \cup Y \hookrightarrow Cyl(f)$ est une paire cellulaire relative, donc une cofibration. Ainsi, on peut étendre l'homotopie $H : X \cup Y \to Cyl(f)^{[0,1]}$ au dessus de l'identité en une homotopie $\tilde{H} : Cyl(f) \to Cyl(f)^{[0,1]}$ telle que $\tilde{H}(-,1)$ est à valeur dans $X$ (et vaut l'identité sur $X$). Maintenant, il nous suffit de considérer l'application composée de paires

$$(X \times [0,1] \cup Y, X \times 0,1 \cup Y) \twoheadrightarrow (Cyl(f), X \times 1 \cup Y) \stackrel{\tilde{H}(-,1)}{\longrightarrow} (Cyl(f), X)$$

dont la source est une paire cellulaire (la première flèche étant l'application quotient). Le résultat de la question 1 nous donne bien, après passage au quotient, une homotopie entre l'identité et une application qui envoie le cylindre sur $X$ et est constante, égale à l'identité, sur $X$.

5. La question précédente nous fournit une homotopie $\tilde{H} : Cyl(f) \to Cyl(f)^{[0,1]}$ telle que $\tilde{H}(-,1)$ est à valeur dans $X$ (et vaut l'identité sur $X$). Maintenant, il nous suffit de considérer l'application composée de paires

$$(X \times [0,1] \cup Y, X \times \{0,1\} \cup Y) \twoheadrightarrow (Cyl(f), X \times \{1\} \cup Y) \stackrel{\tilde{H}(-,1)}{\longrightarrow} (Cyl(f), X)$$

dont la source est une paire cellulaire (la première flèche étant l'application quotient). Le résultat de la question 1 nous donne bien, après passage au quotient, une homotopie entre l'identité (du cylindre) et une application qui envoie le cylindre sur $X$ et est constante, égale à l'identité, sur $X$.

6. Puisque l'application canonique $Cyl(f) \stackrel{\simeq}{\longrightarrow} Y$ est une équivalence d'homotopie, de la factorisation $f : X \hookrightarrow Cyl(f) \stackrel{\simeq}{\longrightarrow} Y$, on déduit que $X \hookrightarrow Cyl(f)$ est une équivalence faible et qu'il suffit désormais de montrer que c'est une équivalence d'homotopie pour conclure. Montrons que c'est en fait un rétracte par déformation, c'est à dire qu'on peut trouver une homotopie, relativement à $X$, entre l'identité de $Cyl(f)$ et une application envoyant $Cyl(f)$ sur $X$ (toujours relativement à $X$, c'est à dire étant l'identité sur $X$).

   Comme on a que $\pi_n(Cyl(f), X, x_0) = 0$, il suffit d'appliquer la conclusion de la première question (ce qui est licite puisque $X \cup Y$ est bien un sous-complexe cellulaire du cylindre puisque $X$ et $Y$ sont cellulaires) appliquée à l'application construite à la question précédente.

**Exercice 7.** *Soit $X$ un espace connexe par arcs non-vide. Démontrer que pour tout $x \in X$, $n \geq 1$, on a*

$$\pi_n(X, x) \cong \pi_{n-1}(\Omega_x X, c_x)$$

*où $\Omega_x X$ désigne l'espace des lacets de $X$ d'origine $x$, pointé par le lacet constant.*

**Solution 7.** On note $P_x$ l'objet en chemin associé à l'inclusion $\{x\} \hookrightarrow X$. C'est par définition le sous espace des chemins sur $X$ qui commencent en $x_0$. D'après le cours, l'évaluation en 1, $P_x = \{x_0\} \times_X X^{[0,1]} \longrightarrow X$ est une fibration et sa fibre au dessus de $x$ est constitué des lacets de base $x$. C'est à dire de $\Omega_x X$. La suite exacte longue d'une fibration donne

$$\cdots \to \pi_n(P_x, c_x) \to \pi_n(X, x) \to \pi_{n-1}(\Omega_x X, c_x) \to \pi_{n-1}(P_x, c_x) \to \ldots.$$

Or $P_x$ est contractile (tout lacet se contracte sur son origine via $H(\gamma, t)(u) = \gamma((1-t)u)$). Ainsi la flèche $\partial : \pi_n(X, x) \to \pi_{n-1}(\Omega_x X, c_x)$ est un isomorphisme (même en degré 0, car $\Omega_x X$ est un groupe à homotopie près).