Corrigé du Partiel n°1.

Exercice 1 (Questions de cours)**.**

1. Une probabilité $\mathbf{P}$ sur $\mathcal{P}(\Omega)$ est une fonction $\mathcal{P}(\Omega) \to [0,1]$ vérifiant les propriétés suivantes :

   Espace total $\mathbf{P}(\Omega) = 1$ et $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$

   Sigma-additivité Si $(A_n, n \in \mathbb{N})$ est une famille dénombrable de $\mathcal{P}(\Omega)$ deux à deux disjoints, on a

$$\mathbf{P}\left(\bigcup_{n\geq 1} A_n\right) = \sum_{n\geq 1} \mathbf{P}(A_n).$$

2. A partir des résultats précédents, on observe que

$$\mathbf{P}(B) = \mathbf{P}(A \cap B) + \mathbf{P}(A^c \cap B),$$

   car $A \cap B$ et $A^c \cap B$ sont deux ensembles disjoints. De plus, comme $A \subset B$, on a $A \cap B = A$. Enfin, $\mathbf{P}(A^c \cap B) \geq 0$. Donc on obtient

$$\mathbf{P}(A) \leq \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(A^c \cap B) = \mathbf{P}(B).$$

3. Deux événements A et B sont indépendants si et seulement si $\mathbf{P}(A \cap B) = \mathbf{P}(A)\mathbf{P}(B)$.
4. Trois événements A, B et C sont indépendants si et seulement si

$$\mathbf{P}(A \cap B \cap C) = \mathbf{P}(A)\mathbf{P}(B)\mathbf{P}(C), \quad \mathbf{P}(A \cap B) = \mathbf{P}(A)\mathbf{P}(B),$$
$$\mathbf{P}(A \cap C) = \mathbf{P}(A)\mathbf{P}(C), \quad \mathbf{P}(B \cap C) = \mathbf{P}(B)\mathbf{P}(C).$$

5. X est une variable aléatoire de Bernoulli de paramètre p si et seulement si elle prend ses valeurs dans $\{0, 1\}$ et elle vérifie

$$\mathbf{P}(X = 1) = 1 - \mathbf{P}(X = 0) = p.$$

   Notons que si X est une variable aléatoire de Bernoulli de paramètre $1/2$, alors $1 - X$ est une autre variable aléatoire de Bernoulli de paramètre $1/2$, différente de X.

Exercice 2 (Les Halles)**.**

1. On note J l'événement "la réponse est juste" et C l'événement "la personne interrogée est un client". En utilisant la formule des probabilités totales, on a

$$\mathbf{P}(J) = \mathbf{P}(J|C)\mathbf{P}(C) + \mathbf{P}(J|C^c)\mathbf{P}(C^c).$$

   avec $\mathbf{P}(C) = 2/3$, $\mathbf{P}(J|C) = 3/4$ et $\mathbf{P}(J|C^c) = 0$, d'après l'énoncé. Dès lors

$$\mathbf{P}(J) = \frac{3}{4} \times \frac{2}{3} + 0 \times \frac{1}{3} = \frac{1}{2}.$$

2. On utilise ici la formule de Bayes, on a

$$\mathbf{P}(C^c|J^c) = \frac{\mathbf{P}(J^c|C^c)\mathbf{P}(C^c)}{\mathbf{P}(J^c)},$$

   avec $\mathbf{P}(J^c) = 1 - \mathbf{P}(J) = 1/2$, $\mathbf{P}(C^c) = 1/3$ et $\mathbf{P}(J^c|C^c) = 1$, donc

$$\mathbf{P}(C^c|J^c) = \frac{1/3}{1/2} = \frac{2}{3}.$$

3. On introduit maintenant les événements J_1 et J_2 “la première réponse est juste” et “la deuxième réponse est juste”. On pose ensuite
$$D = (J_1 \cap J_2) \cup (J_1^c \cap J_2^c),$$
l'événement “on répond la même chose aux deux questions”.
   (a) On utilise l'additivité des probabilités d'événements disjoints, puis la formule des probabilités totales, pour calculer
$$\begin{aligned}\mathbf{P}(D) &= \mathbf{P}(J_1 \cap J_2) + \mathbf{P}(J_1^c \cap J_2^c)\\ &= \mathbf{P}(J_1 \cap J_2|C)\mathbf{P}(C) + \mathbf{P}(J_1 \cap J_2|C^c)\mathbf{P}(C^c) + \mathbf{P}(J_1^c \cap J_2^c|C)\mathbf{P}(C) + \mathbf{P}(J_1^c \cap J_2^c|C^c)\mathbf{P}(C^c)\\ &= \left(\frac{3}{4}\right)^2 \frac{2}{3} + 0^2\frac{1}{3} + \left(\frac{1}{4}\right)^2 \frac{2}{3} + 1^2\frac{1}{3}\\ &= \frac{18}{48} + \frac{2}{48} + \frac{16}{48} = \frac{36}{48} = \frac{3}{4}.\end{aligned}$$
   par indépendance.
   (b) On souhaite maintenant calculer
$$\mathbf{P}(J_1 \cap J_2|D) = \frac{\mathbf{P}(J_1 \cap J_2 \cap D)}{\mathbf{P}(D)} = \frac{\frac{18}{48}}{\frac{36}{48}} = \frac{1}{2}$$
   de par les calculs précédents.

Exercice 3 (Problème des boîtes aux lettres)**.**

1. On note $S_n = \sum_{i=1}^n i$, on observe que $S_n = \sum_{i=1}^n (n-i+1)$, dès lors
$$2S_n = S_n + S_n = \sum_{i=1}^n i + (n-i+1) = \sum_{i=1}^n n+1 = n(n+1),$$
ce qui conclut (ou n'importe quelle autre preuve, récurrence, dérivée de la série génératrice, somme aux différences).
2. On calcule la probabilité que les trois lettres tombent dans des boîtes différentes. La première enveloppe tombe toujours dans une boite libre. Ensuite, la seconde a la probabilité $\frac{19}{20}$ de tomber dans une boîte différente de celle contenant la première. Dans ce cas, la troisième enveloppe tombe avec probabilité $\frac{18}{20}$ dans une troisième boîte différente des deux premières. La probabilité vaut donc
$$\frac{19}{20} \times \frac{18}{20} = \frac{342}{400} = \frac{171}{200}.$$
3. (a) On a au total L^l choix différents pour distribuer les l lettres dans les L enveloppes (on a L choix pour chaque lettre). De plus, parmi ces distributions, on en a A_L^l qui mettent au plus une lettre par enveloppe (on a L choix pour la première lettre, $L-1$ pour la seconde, etc.). Par conséquent, on a
$$p_{l,L} = \frac{A_L^l}{L^l}.$$
   (b) On observe que
$$\ln(p_{l,l^2}) = \ln\left(\prod_{j=0}^{l-1} \frac{l^2-j}{l^2}\right) = \ln\left(\prod_{j=1}^{l-1}\left(1-\frac{j}{l^2}\right)\right) = \sum_{j=1}^{l-1} \ln\left(1-\frac{j}{l^2}\right),$$
   donc par hypothèse
$$\lim_{l\to\infty} \frac{\ln(p_{l,l^2})}{\sum_{j=1}^{l-1} j/l^2} = -1.$$
   Or, grâce à la question 1, on a $\sum_{j=1}^{l-1} \frac{j}{l^2} = \frac{l(l-1)}{2l^2} = \frac{l-1}{2l} \to 1/2$ quand $l \to \infty$. Donc, on obtient
$$\lim_{l\to\infty} \ln(p_{l,l^2}) = -2,$$
   soit $\lim_{l\to\infty} p_{l,l^2} = e^{-2}$.