6 Introduction aux variables aléatoires continues

6.1 Espaces probabilisés : cadre général

6.2 Variables aléatoires à valeurs réelles : cadre géneéral

6.3 Variables aléatoires réelles continues

6.3.1 Définition

Début du cours du 10/12 :
En pratique, donner la loi d'une variable aléatoire continue c'est donner soit sa densité, soit sa fonction de répartition, soit reconnaître une loi “classique”.

6.3.2 Trois familles de lois continues “classiques”

Dans ce paragraphe, $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ désigne un espace probabilisé et $X : \Omega \to \mathbb{R}$ une variable aléatoire réelle continue.

Définition 78. *Soit* $\lambda \in]0, +\infty[$. *On dit que* X *suit une* loi exponentielle de paramètre λ *si elle admet pour densité la fonction* f *définie par*

$$f(x) = \begin{cases} \lambda \exp(-\lambda x) & si\ x \geq 0 \\ 0 & sinon. \end{cases}$$

Dans ce cas, sa fonction de répartition F_X *est donnée par* $F_X(x) = 1 - \exp(-\lambda x)$ *si* $x \geq 0$, *et* $F_X(x) = 0$ *si* $x < 0$.

Notation : $X \sim \mathcal{E}\text{xp}(\lambda)$.

Cette loi a une *propriété d'absence de mémoire* : pour tous réels $t \geq 0, s \geq 0$,

$$\mathbb{P}(X > t + s | X > s) = \mathbb{P}(X > t).$$

En effet, on constate que pour tout $t \geq 0$, $\mathbb{P}(X > t) = 1 - \mathbb{P}(X \leq t) = \exp(-\lambda t)$. Donc pour $s, t \geq 0$

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X > t + s | X > s) = \frac{\mathbb{P}(\{X > t + s\} \cap \{X > s\})}{\mathbb{P}(X > s)} &= \frac{\mathbb{P}(X > t + s)}{\mathbb{P}(X > s)} \\ &= \frac{\exp(-\lambda(t + s))}{\exp(-\lambda s)} \\ &= \exp(-\lambda t) \\ &= \mathbb{P}(X > t). \end{aligned}$$

Définition 79. *Soient* $\mu \in \mathbb{R}$ *et* $\sigma^2 \in]0, \infty[$. *On dit que* X *suit une loi* normale (ou gaussienne) de paramètres (μ, σ^2) *si elle admet pour densité la fonction* f *définie par*

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right), \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Notation : $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$.

Définition 80. *Lorsque* $\mu = 0$ *et* $\sigma^2 = 1$ *on dit que* X *suit une* loi normale standard *ou* loi normale centrée réduite.

C'est une loi particulièrement importante car elle intervient dans la description asymptotique de sommes de variables aléatoires indépendantes et de même loi. C'est le *Théorème Central Limit*, qui sera vu en cours de Statistiques.

Définition 81. *Soient* a, b *des réels, tels que* $a < b$. *On dit que* X *suit une loi* uniforme sur $[a, b]$ *si elle admet pour densité la fonction* f *définie par*

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & si\ x \in [a, b] \\ 0 & sinon. \end{cases}$$

Notation : $X \sim \mathcal{U}[a, b]$.

6.3.3 Quelques propriétés des lois continues

$(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ désigne un espace probabilisé et $X : \Omega \to \mathbb{R}$ une variable aléatoire réelle continue, de densité f.

Proposition 82. *Alors,*

- *Sa fonction de répartition* F_X *est continue sur* $\mathbb{R}$.
- $\mathbb{P}(X = x) = 0$ *pour tout* $x \in \mathbb{R}$.
- *pour tous réels* a, b *tels que* $a < b$,

$$\mathbb{P}(a \le X \le b) = \mathbb{P}(a < X \le b) = \mathbb{P}(a \le X < b) = \mathbb{P}(a < X < b) = \int_a^b f(t)\mathrm{d}t.$$

Démonstration.

- On utilise simplement le fait que $F_X(x) = \int_{-\infty}^x f(t)\mathrm{d}t$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

- On remarque que $\{X = x\} = \cap_{n\in\mathbb{N}^*}\{x - \frac{1}{n} < X \leq x + \frac{1}{n}\}$. Les événements dans l'intersection étant emboîtés, on en déduit que

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X = x) &= \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(x - \frac{1}{n} < X \leq x + \frac{1}{n}\right) \\
&= \lim_{n\to\infty}\left(\mathbb{P}\left(X \leq x + \frac{1}{n}\right) - \mathbb{P}\left(X \leq x - \frac{1}{n}\right)\right) \\
&= \lim_{n\to\infty} F_X\left(x + \frac{1}{n}\right) - \lim_{n\to\infty} F_X\left(x - \frac{1}{n}\right) \\
&\underset{\text{par continuité de } F_X}{=} F_X(x) - F_X(x) = 0.
\end{aligned}$$

- On a : $\mathbb{P}(a < X \leq b) = \mathbb{P}(X \leq b) - \mathbb{P}(X \leq a) = F_x(b) - F_X(a) = \int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ (par définition de F_X et la relation de Chasles).
  Par ailleurs, $\{a \leq X \leq b\} = \{X = a\} \cup \{a < X \leq b\}$, donc

$$\mathbb{P}(a \leq X \leq b) = \mathbb{P}(X = a) + \mathbb{P}(a < X \leq b) = \mathbb{P}(a < X \leq b).$$

  On raisonne de même pour montrer les autres égalités. □

6.3.4 Notion d'espérance d'une variable aléatoire continue

Soit X une variable aléatoire continue de densité f.

Définition 83. *Si* $\int_{-\infty}^{\infty} tf(t)\mathrm{d}t$ *est* absolument convergente*, alors on dit que X admet une* espérance*. Cette espérance, notée $\mathbb{E}[X]$, est alors définie par*

$$\mathbb{E}[X] := \int_{-\infty}^{\infty} tf(t)\mathrm{d}t.$$

La propriété et le théorème suivants sont admis.

Proposition 84. *Les propriétés de linéarité, positivité, inégalité triangulaire, etc., que l'on a vues pour l'espérance de variables aléatoires discrètes restent valides pour l'espérance de variables aléatoires continues.*

Théorème 85 (Théorème de transfert)**.** *Soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que $\int_{-\infty}^{\infty} g(t)f(t)\mathrm{d}t$ est absolument convergente. Alors la variable aléatoire $g(X)$ admet une espérance et celle-ci peut se calculer ainsi :*

$$\mathbb{E}[g(X)] = \int_{-\infty}^{\infty} g(t)f(t)\mathrm{d}t.$$

Ex. : si $\int_{-\infty}^{\infty} t^2 f(t)\mathrm{d}t$ est absolument convergente alors X^2 admet une espérance et

$$\mathbb{E}[X^2] = \int_{-\infty}^{\infty} t^2 f(t)\mathrm{d}t.$$

Définition 86. *Si* $\int_{-\infty}^{\infty} t^2 f(t)\mathrm{d}t$ *est absolument convergente, on définit la variance de* X *par*

$$\mathrm{Var}(X) := \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])^2].$$

En développant le carré et en utilisant la linéarité de l'espérance, on voit que

$$\mathrm{Var}(X) = \mathbb{E}[X^2] - (\mathbb{E}[X])^2 = \int_{-\infty}^{\infty} t^2 f(t)\mathrm{d}t - \left(\int_{-\infty}^{\infty} t f(t)\mathrm{d}t\right)^2.$$

Exercice : calculer l'espérance et la variance d'une variable aléatoire X :

1) suivant une loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$

2) suivant une loi normale centrée réduite.