Université Paris 13, année universitaire 2019 – 20
Licence de mathématiques 2$^{\text{ème}}$ année
Probabilités

Feuille d'exercices n$^{\text{o}}$2 : Variables aléatoires discrètes

Variables aléatoires à support fini

Exercice 1 On lance deux dés équilibrés à 6 faces. On appelle X la somme des résultats obtenus (X est donc une variable aléatoire). Déterminer la loi de X, puis calculer $\mathbb{E}[X]$ et $\mathbb{E}[1/X]$. (On rappelle que déterminer la loi de X signifie :

1) déterminer le support de X
2) calculer $\mathbb{P}(X = x)$ pour tout élément x du support de X.)

Exercice 2 Soit X une variable aléatoire à valeurs réelles. Sans se référer au cours :

1. Rappeler ce que cela signifie que X suit une loi de Bernoulli de paramètre $p \in [0, 1]$. Calculer son espérance et sa variance (on demande de faire les calculs).
2. De même, rappeler ce que cela signifie que X suit une loi de Binomiale de paramètres $n \in \mathbb{N}^*, p \in [0, 1]$ et calculer son espérance.
3. Rappeler ce que cela signifie que X suit une loi uniforme sur $\{x_1, \ldots, x_n\}$ (les x_i étant des réels différents). Calculer son espérance et sa variance.

Exercice 3 On tire une carte uniformément au hasard dans un jeu de 32 cartes. On rappelle qu'un tel jeu comporte quatre couleurs de cartes (pique, cœur, carreau, trèfle) et que chaque couleur est composée de huit cartes numérotées (7, 8, 9, 10, Valet, Dame, Roi, As). Soit X la variable aléatoire définie par :

- $X = -1$ si la carte tirée est un 7, un 8, un 9 ou un 10 ;
- $X = 1$ si la carte tirée est un Valet, une Dame ou un Roi ;
- $X = 2$ si la carte tirée est un As.

1. Déterminer la loi de X.
2. Calculer l'espérance et la variance de X.
3. Calculer $\mathbb{P}(X \geq 0)$, puis $\mathbb{P}(X = 2 | X \geq 0)$.
4. On pose $Y = 2X - 1$. Calculer l'espérance et la variance de Y.

Exercice 4 Un questionnaire comporte 10 questions auxquelles on peut répondre par "Vrai" ou "Faux". Un étudiant répond au hasard à chacune des 10 questions (à chaque question il répond "Vrai" avec probabilité 1/2 et "Faux" avec probabilité 1/2, de façon indépendante). On note X le nombre total de réponses correctes du candidat.

1. Quelle est la loi de X ?
2. Calculer les probabilités des événements suivants :

   A="l'étudiant répond correctement à toutes les questions"

   B="l'étudiant répond correctement à exactement 6 questions"

   C="l'étudiant répond correctement à au moins deux questions".
3. Chaque réponse correcte vaut 1 point et chaque mauvaise réponse $-1/2$ point. On note Y la note obtenue à cet exercice par l'étudiant. Exprimer Y en fonction de X et en déduire l'espérance et la variance de Y.

Exercice 5 On lance n fois une pièce équilibrée. Quelle est la probabilité d'obtenir plus de Pile que de Face ?

Exercice 6 1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour tous réels $x, y \geq 0$, on pose

$$F(x,y) := \sum_{k=0}^{[n/2]} \binom{n}{2k} x^{2k}(1-y)^{n-2k} \quad \text{et} \quad G(x,y) := \sum_{k=0}^{[(n-1)/2]} \binom{n}{2k+1} x^{2k+1}(1-y)^{n-2k-1}$$

(où $[r]$ désigne la partie entière du réel r). Calculer $F(x,y) + G(x,y)$ et $F(x,y) - G(x,y)$ et en déduire une expression simplifiée de $F(x,y)$.

2. Soit X une variable aléatoire de loi binomiale $\text{Bin}(n,p)$. Calculer la probabilité de l'événement "X est paire".

Exercice 7 Soit X une variable aléatoire de loi binomiale $\text{Bin}(n,p)$, où $n \in \mathbb{N}^*, p \in [0,1]$. On définit la variable aléatoire Y par : $Y = X$ si $X \neq 0$ et Y prend une valeur uniformément au hasard dans $\{0, 1, \ldots, n\}$ si $X = 0$.

1. Rappeler l'expression de $\mathbb{P}(X = k)$ pour $k \in \{0, 1, \ldots, n\}$, puis la valeur de $\mathbb{E}[X]$.
2. Calculer $\mathbb{P}(Y = i | X = k)$ pour tout couple d'entiers $(i,k) \in \{0, 1, \ldots, n\}^2$.
3. Déterminer la loi de Y.
4. Calculer l'espérance de Y.

Exercice 8 (Loi binomiale - loi hypergéométrique). Dans une urne contenant N boules dont une proportion p de boules vertes $0 < p < 1$), on tire n boules ($n \geq 1$), et on note X le nombre de boules vertes de l'échantillon. Construire l'espace de probabilisé associé à l'expérience et déterminer la loi de X si :

1. Les n boules sont tirées une à une avec remise.
2. Les n boules sont tirées en une seule fois (dans ce cas on dit que X suit une *loi hypergéométrique de paramètres* N, n, p).
3. Les n boules sont tirées une à une sans remise.

Variables aléatoires à support dénombrable

Exercice 9 (Absence de mémoire)

1. Soit $G(p)$ une v.a. de loi géométrique de paramètre $p \in]0,1[$. Calculer
$$\mathbb{P}(G(p) > n), \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$
2. En déduire que
$$\mathbb{P}(G(p) > k + n \mid G(p) > n) = \mathbb{P}(G(p) > k), \quad \forall k, n \in \mathbb{N}.$$
Interpréter ce résultat.
3. Réciproquement, montrer que si X est une v.a. à valeurs dans $\mathbb{N}$ telle que $\mathbb{P}(X > n) > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et
$$\mathbb{P}(X > k + n \mid X > n) = \mathbb{P}(X > k), \quad \forall k, n \in \mathbb{N}$$
alors X suit une loi géométrique de paramètre $p \in]0,1[$. Pour cela vous pourrez commencer par considérer la fonction $H(n) = \mathbb{P}(X > n)$ et établir une relation entre $H(n+k), H(n)$ et $H(k)$.

Exercice 10 Soit $\lambda > 0$.

1. Exprimer $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^{2k}}{(2k)!}$ en fonction de e^{λ}. De même pour $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^{2k+1}}{(2k+1)!}$.
2. Soit X une variable de loi de Poisson de paramètre λ. On construit à partir de X une autre variable aléatoire Y en posant :
   - $Y = 0$ si X prend une valeur nulle ou impaire
   - $Y = X/2$ si X prend une valeur paire.

   Déterminer la loi de Y.

Exercice 11 Calculer l'espérance d'une loi géométrique de paramètre $p \in]0,1[$.

Exercice 12 On joue à pile ou face avec une pièce non équilibrée. A chaque lancer la probabilité d'obtenir "pile" est 2/3, et "face" 1/3. Les lancers sont supposés indépendants. On note X la variable aléatoire réelle égale au nombre de lancers nécessaires pour l'obtention, pour la première fois, de deux piles consécutifs.
Soit n un entier naturel non nul. On note p_n la probabilité de l'événement $\{X = n\}$.

1. Expliciter les événements $\{X = 2\}, \{X = 3\}, \{X = 4\}, \{X = 5\}$. Déterminer la valeur de p_1, p_2, p_3, p_4 et p_5.
2. A l'aide de la formule des probabilités totales, en distinguant deux cas selon le résultat du premier lancer, montrer que
$$\forall n \geq 3, p_n = \frac{2}{9}p_{n-2} + \frac{1}{3}p_{n-1}.$$
3. En déduire l'expression de p_n en fonction de n pour $n \geq 1$.
4. Calculer $\mathbb{E}[X]$.

Exercice 13 Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$.

1. On suppose que l'espérance de X est finie. Montrer que
$$\mathbb{P}(X > 0) \leq \mathbb{E}[X].$$
Donner un contre-exemple lorsque X n'est pas à valeurs entières.
2. On suppose que X a un moment d'ordre 2. Montrer que
$$\mathbb{P}(X \geq 2) \leq \frac{1}{2}\mathbb{E}[X(X-1)].$$

Exercice 14 Soit a un nombre réel et X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$ telle que : pour tout $k \in \mathbb{N}$,
$$\mathbb{P}(X = k) = \frac{a}{2^k k!}.$$

1. Déterminer a. Quel est le nom de cette variable aléatoire ?
2. Quelle est la valeur de X la plus probable ?
3. Calculer l'espérance de X. (On demande de refaire les raisonnements et calculs vus en cours.)
4. Calculer l'espérance de $X(X-1)$.
5. Calculer la variance de X à partir des deux questions précédentes.
6. Calculer $\mathbb{E}[1/(X+1)]$.

Exercice 15 Le nombre de connexions au site internet de Paris 13 durant une période T (en heures) suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda(T)$. On sait que $\lambda(1) = 12,2$.

1. Calculer la probabilité qu'il n'y ait aucune connexion en une heure.
2. Calculer la probabilité qu'il y ait au moins deux connexions en une heure.
3. On note X_1 le nombre de connexions un jour donné entre 14h et 15h et X_2 le nombre de connexions le même jour entre 15h et 16h.
   (a) Calculer $\mathbb{E}[X_1 + X_2]$.
   (b) En déduire $\lambda(2)$.
   (c) Les événements $\{X_1 = 0\}$ et $\{X_2 = 0\}$ sont-ils indépendants ?

Exercice 16 Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}^*$.

1) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\sum_{k=1}^{n} k\mathbb{P}(X = k) = \left(\sum_{i=0}^{n-1} \mathbb{P}(X > k) \right) - n\mathbb{P}(X > n).$$

2) On suppose que $\lim_{n\to\infty} n\mathbb{P}(X > n) = 0$ et que $\sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}(X > k) < +\infty$. Montrer que X admet une espérance et que

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}(X > k).$$

3) Réciproquement, on suppose que X admet une espérance. Montrer que

$$\lim_{n\to\infty} n\mathbb{P}(X > n) = 0$$

et en déduire

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}(X > k).$$

Exercices supplémentaires

Exercice 17 (Loi géométrique - loi binômiale négative). Une urne contient des boules, dont une proportion p ($0 < p < 1$) de boules blanches, les autres boules étant rouges. On tire les boules une à une avec remise et on note X_n le rang d'apparition de la $n$ième boule blanche.

1. Donner la loi de X_1 et calculer son espérance.
2. a) Déterminer la loi de X_n.
   b) En dérivant $n-1$ fois l'égalité $\sum_{i=0}^{\infty} x^i = 1/(1-x)$ sur $]-1,1[$, vérifier que $\sum_{i=n}^{\infty} \mathbb{P}(X_n = i) = 1$ puis calculer $\mathbb{E}[X_n]$. La loi de X_n est appelée *loi binomiale négative de paramètres* n, p.
3. Pour $n \geq 1$ fixé, on note Y_n le nombre de boules rouges apparues avant la $n$ième boule blanche. Ecrire Y_n en fonction de X_n. En déduire la loi de Y_n, puis son espérance.

Exercice 18 Un puzzle est formé de n morceaux que l'on peut trouver dans des paquets de céréales (les morceaux sont placés de manière uniforme et indépendante, à raison d'un morceau par paquet). Arthur décide d'acheter des paquets jusquà ce qu'il possède toutes les pièces du puzzle. Pour tout $k \geq 2$, on note Y_k le nombre de paquets achetés pour obtenir la $k$ième pièce à partir de l'obtention de la $(k-1)$ième pièce, et X_n le nombre total de paquets achetés.

1. Quelle est la loi de Y_k ? Exprimer X_n en fonction des Y_k. En déduire $\mathbb{E}[X_n]$ sous la forme d'une somme.
2. Montrer que
$$\int_k^{k+1} \frac{\mathrm{d}x}{x} \leq \frac{1}{k} \leq \int_{k-1}^{k} \frac{\mathrm{d}x}{x}, \quad \forall k \geq 2.$$
   En déduire un équivalent de $\mathbb{E}[X_n]$ lorsque $n \to +\infty$.