Université Paris 13, année universitaire 2019 – 20
Licence de mathématiques 2ème année
Probabilités

Feuille d'exercices n°3 : Vecteurs aléatoires discrets

Vecteurs aléatoires

Exercice 1 Soit (X, Y) deux variables aléatoires telles que X est à valeurs dans $\{1, 2, 3, 4\}$ et Y est à valeurs dans $\{1, 2\}$. On définit la loi du couple (X, Y) par

$$\mathbb{P}(X = i, Y = j) = \frac{1}{7}\left(1 - \frac{ij}{30}\right), \quad \forall (i, j) \in \{1, 2, 3, 4\} \times \{1, 2\}.$$

1. Vérifier qu'on a bien une loi de probabilité.
2. Déterminer les lois marginales.
3. Déterminer les lois conditionnelles de X sachant $Y = 1$ et de Y sachant $X = 2$.

Exercice 2 Soit (X,Y) un couple aléatoire suivant une loi uniforme sur $\{0, \dots, n\}^2$.

1. Déterminer la loi de X et la loi de Y.
2. X et Y sont-elles indépendantes ?

Exercice 3 La loi d'un couple de variables aléatoires (X, Y) est donnée par le tableau suivant :

$X \backslash Y$	-1	1
0	$1/4$	$p + 1/8$
1	$1/2$	$-p + 1/8$

1. Quelles conditions doit vérifier p ?
2. Calculer, en fonction de p, la loi de X ainsi que $\mathbb{E}[X]$ et $\mathrm{Var}(X)$.
3. Calculer la loi de Y ainsi que $\mathbb{E}[Y]$ et $\mathrm{Var}(Y)$.
4. Déterminer la loi conditionnelle de X sachant $Y = -1$.
5. Déterminer, en fonction de p, la covariance de (X, Y).
6. Pour quelle(s) valeur(s) de p, le couple (X, Y) est-il de corrélation nulle ?
7. Existe-t-il une ou plusieurs valeurs de p qui rendent X et Y indépendantes ?

Exercice 4 Soient X et Y deux variables aléatoires. Rappeler les conditions d'existence du coefficient de corrélation linéaire $\rho(X,Y)$. On pose $U = aX + b$ et $V = cY + d$, où a, b, c, d sont des réels. Calculer $\rho(U,V)$ en fonction de $\rho(X,Y)$.

Exercice 5 n personnes se répartissent au hasard dans les 3 hôtels d'un village, chaque hôtel disposant d'au moins n places. On désigne par X (respectivement Y, Z) le nombre de personnes allant dans l'hôtel A (respectivement B et C).

1. Quelle est la loi de X ? Celle de Y ? Celle de Z ?
2. Exprimer $X + Y$ en fonction de n et Z. En déduire $\mathrm{Var}(X+Y)$.
3. Sans calculer $\mathbb{E}[XY]$, donner la valeur de $\rho(X,Y)$.

Exercice 6 On lance deux dés équilibrés à 6 faces. On note X le plus grand des résultats obtenus, et Y le plus petit.

1. Déterminer la loi du couple (X,Y) puis les lois de X et de Y.
2. Calculer $\mathbb{E}[X]$ et $\mathbb{E}[Y]$.
3. Calculer $\mathrm{Var}(X)$, $\mathrm{Var}(Y)$ et $\mathrm{Cov}(X+Y)$.
4. Déterminer la loi de $X+Y$.
5. Calculer de deux façons différentes $\mathrm{Var}(X+Y)$.

Exercice 7 Une urne contient $2n$ boules ($n \geq 2$), dont n sont numérotées de 1 à n, et n ne portent pas de numéro. On tire simultanément n boules dans cette urne. Pour $i = 1, ..., n$ on note X_i la variable qui vaut 1 si la boule i est dans l'échantillon tiré, et 0 sinon.

1. Donner la loi de X_i.
2. Pour $i \neq j$, calculer $\mathbb{P}(X_i = 1, X_j = 1)$. En déduire $\mathrm{Cov}(X_i, X_j)$.
3. Soit S la somme des numéros tirés. Ecrire S en fonction des X_i. En déduire $\mathbb{E}[S]$ et $\mathrm{Var}(S)$.

Exercice 8 Soit (X,Y) un couple de variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$, dont la loi jointe est définie par :

$$\mathbb{P}(X = i, Y = j) = a^i b^j, \quad a, b > 0.$$

1. Quelles conditions doivent remplir a et b ?
2. Calculer les lois marginales de X et Y.
3. Calculer $\mathbb{P}(X = Y)$.
4. X et Y sont-elles indépendantes ?

Exercice 9 Soit (X, Y) un couple à valeurs dans $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$, dont la loi jointe est donnée par :

$$\mathbb{P}(X = i, Y = j) = \frac{1}{e} \frac{(i+j)\lambda^{i+j}}{i!j!}, \forall i \in \mathbb{N}, j \in \mathbb{N}.$$

1. Calculer λ.
2. Trouver les lois marginales de X et Y.
3. X et Y sont-elles indépendantes ?
4. Trouver la loi de $X + Y$, puis calculer $\mathbb{E}[2^{X+Y}]$.

Exercice 10 On lance indéfiniment un dé équilibré. Soit X le numéro du premier lancer où on obtient un 3 et Y le numéro du premier lancer où on obtient un 4.

1. Calculer les probabilités $\mathbb{P}(X = 1), \mathbb{P}(X = 2), \mathbb{P}(X = 3)$ et $\mathbb{P}(X = 4)$.
2. Quelle est la loi de X ?
3. Et celle de Y ?
4. Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes ? (Répondre sans calculer la loi de (X, Y), mais en justifiant proprement.)
5. Pour $k \in \mathbb{N}^*$ on note

   A_k l'événement : "obtention d'un 3 lors du k-ème lancer"
   B_k l'événement : "obtention d'un 4 lors du k-ème lancer"
   C_k l'événement : "obtention d'un 1,2,5 ou 6 lors du k-ème lancer".

   Exprimer à l'aide de ces événements l'événement $\{X = i, Y = j\}$, $i, j \geq 1$ (vous pourrez distinguer les cas $i > j$, $i \neq j$ et $j > i$). En déduire la loi du couple (X, Y).
6. Donner sans calcul (mais en justifiant votre réponse) $\mathbb{P}(X > Y)$ et $\mathbb{P}(X < Y)$.
7. On pose $Z = 3^X 4^Y$. Quelle est la probabilité que Z soit une puissance de 36 ?

Exercice 11 On lance une infinité de fois une pièce amenant à chaque lancer "pile" avec la probabilité p $(0 < p < 1)$ et "face" avec la probabilité $q = 1 - p$. On appelle "série" une succession de piles (ou de faces) interrompue par le résultat contraire. La "longueur" de la série est le nombre de piles (ou faces) qui la composent. Par exemple, pour l'événement PPFFFPFFF..., la première série est une série de piles et a pour longueur 2, la deuxième est une série de faces et a pour longueur 3, etc. On note X la v.a. égale à la longueur de la première série si cette longueur est finie, et égale à 0 dans le cas où les lancers successifs donneraient tous "pile" ou tous "face". On définit de même Y, longueur de la deuxième série.

1. Déterminer la loi de X.
2. Déterminer la loi du couple (X, Y).

3. En déduire la loi de Y.

Deux inégalités classiques

Exercice 12 Une variable aléatoire X suit une loi binomiale de paramètres $p \in [0,1], n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$,

$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{X}{n} - p\right| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\varepsilon\sqrt{n}}.$$

Exercice 13 Soit X une variable aléatoire réelle positive telle que $0 < \mathbb{E}[X^2] < \infty$. Montrer que

$$\mathbb{P}(X > 0) \geq \frac{\mathbb{E}[X]^2}{\mathbb{E}[X^2]}.$$

Indication : remarquer que $\mathbb{E}[X] = \mathbb{E}[X\mathbf{1}_{\{X>0\}}]$.

Problème

Exercice 14 Soit $p \in]0,1[$ et $(X_i, i \geq 1)$ une suite de variables aléatoires indépendantes et de même loi donnée par $\mathbb{P}(X_i = 1) = p$ et $\mathbb{P}(X_i = -1) = 1 - p$. On étudie les variables aléatoires S_n définies par

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$$

pour tout $n \geq 1$. On convient de poser $S_0 = 0$. La suite de variables aléatoires $(S_n, n \geq 1)$ est appelée *marche aléatoire*. Les variables aléatoires $X_i, i \geq 1$ sont appelés les *pas* de la marche aléatoire.

1. Quelles sont les valeurs possibles de S_7 ?
2. Soit $i \geq 1$ et $n \geq 1$, déterminer $\mathbb{E}[X_i]$ puis $\mathbb{E}[S_n]$. Quelle est la limite de $\mathbb{E}[S_n]$ lorsque n tend vers l'infini (on distinguera les cas $p < 1/2$, $p > 1/2$ et $p = 1/2$) ?
3. Montrer que la variance de X_i est $4p(1-p)$. Déterminer la variance $\mathrm{Var}(S_n)$.
4. Montrer que
$$\mathbb{E}[S_n S_{n+1}] = \mathbb{E}[S_n^2] + \mathbb{E}[S_n]\mathbb{E}[X_{n+1}]$$
et
$$\mathbb{E}[S_n]\mathbb{E}[S_{n+1}] = \mathbb{E}[S_n]^2 + \mathbb{E}[S_n]\mathbb{E}[X_{n+1}].$$
En déduire que $\mathrm{cov}(S_n, S_{n+1}) = \mathrm{Var}(S_n)$. Les variables aléatoires S_n et S_{n+1} sont-elles indépendantes ?

5. Montrer que

$$\operatorname{Var}\left(\frac{S_n}{n}\right) = \mathbb{E}\left[\left(\frac{S_n}{n} - (2p-1)\right)^2\right] = \frac{\operatorname{Var}(S_n)}{n^2} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

6. Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$,

$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{S_n}{n} - (2p-1)\right| \geq \varepsilon\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

   Interpréter le résultat obtenu. Il s'agit d'un résultat bien connu. Quel est son nom ?

   Les questions qui suivent sont indépendantes et vont permettre de déterminer la loi de S_{2n}.

7. On pose $Y_i = 1$ si $X_i = 1$ et $Y_i = 0$ si $X_i = -1$. Quelle est la loi de Y_i ? Justifier que $X_i = 2Y_i - 1$ pour tout $i \geq 1$.
8. Soit $n \geq 1$. Quelles sont les valeurs possibles de la variable aléatoire $X_{2n+1} + X_{2n+2}$? Montrer par récurrence que pour tout $n \geq 1$, la variable aléatoire S_{2n} est à valeurs dans $\{2k, k \in \{-n, \dots, n\}\}$.
9. On note M_n le nombre de *montées* parmi les n pas, c'est-à-dire le nombre de X_i qui prennent la valeur 1. Justifier que $M_n = \sum_{i=1}^n Y_i$. Quelle est la loi de M_n ? (On justifiera soigneusement.)
10. A l'aide de la Question 7., montrer que $S_n = 2M_n - n$.
11. On calcule la loi de S_{2n}. Montrer que pour tout $k \in \{-n, \dots, n\}$

$$\mathbb{P}(S_{2n} = 2k) = \binom{2n}{n+k} p^{n+k}(1-p)^{n-k}.$$