

# UNIVERSITÉ PARIS-DAUPHINE

Document de synthèse présenté pour obtenir

## L'HABILITATION À DIRIGER DES RECHERCHES

Spécialité : Mathématiques

par

**Bénédicte HAAS**

## Arbres aléatoires et fragmentations

soutenue le 23 novembre 2010 devant le jury composé de :

M. Jean BERTOIN	Université Pierre et Marie Curie
Mme Brigitte CHAUVIN	Université de Versailles - St.Quentin
M. Nicolas FOURNIER	Université Paris-Est
M. Jean-François LE GALL	Université Paris-Sud
M. Yves LE JAN	Université Paris-Sud
M. Stéphane MISCHLER	Université Paris-Dauphine
M. Stefano OLLA (coordinateur)	Université Paris-Dauphine

et après rapports de :

M. Steven EVANS	University of California
M. Nicolas FOURNIER	Université Paris 12
M. Jean-François LE GALL	Université Paris-Sud



# Remerciements

Je remercie d'abord chaleureusement Steven Evans, Nicolas Fournier et Jean-François Le Gall pour avoir accepté le rôle exigeant de rapporteur et pour leurs remarques constructives qui ont aidé à améliorer la présentation de ce mémoire.

Merci aussi à Brigitte Chauvin, Yves Le Jan et Stéphane Mischler qui me font l'honneur de faire partie du jury. Stefano Olla a assuré en plus la tâche de coordinateur : je l'en remercie vivement. Enfin j'ai une pensée particulière pour Jean Bertoin, qui a guidé mes premiers pas de chercheuse, il y a 9 ans déjà, et continue à s'intéresser à mes travaux depuis. Je suis ravie qu'il participe au jury.

Je n'oublie pas, bien sûr, ma collaboratrice et mes collaborateurs, sans qui mes travaux de recherche ne seraient pas ce qu'ils sont : Christina Goldschmidt, Julien Berestycki, Jean Bertoin, Grégory Miermont, Jim Pitman, Matthias Winkel. Ainsi que Víctor Rivero, qui devrait tout bientôt intégrer cette liste.

Depuis 5 ans, j'exerce le métier de maître de conférences à l'université Paris-Dauphine, au sein du CEREMADE, dont l'excellente ambiance a contribué à rendre mon travail très agréable. Merci donc à tous ses membres, enseignants-chercheurs et administratifs. Merci aussi à toute l'équipe du département MIDO pour son efficacité.

Enfin, je pense à ceux qui me supportent au quotidien et se demandent encore aujourd'hui pourquoi cette HdR a lieu cette année, si chargée par ailleurs : Jean-Noël, Paul et depuis peu, Antoine.



# Présentation

Ce mémoire est une exposition de mes travaux effectués après la thèse ([52, 57, 58, 46, 53, 55, 56]), à l'exception du papier [54], rédigé pendant ma thèse, qui introduit les arbres de fragmentation, objets qui interviennent de façon centrale dans les chapitres 2 et 4 et dont nous exposerons le contenu dans la section 2.1.

Les arbres de fragmentation sont des arbres continus introduits pour modéliser la généalogie des processus de fragmentation auto-similaires de Bertoin. Cet ensemble d'arbres contient notamment l'arbre continu brownien d'Aldous et les arbres de Lévy stables de Duquesne, Le Gall et Le Jan. Leur construction, ainsi que diverses propriétés géométriques sont discutées dans le chapitre 2. On calculera notamment leur dimension de Hausdorff, on étudiera leur codage par des fonctions continues, leurs comportements au voisinage de la racine et de la feuille la plus éloignée de la racine. On s'intéressera également à diverses décompositions spinales de l'arbre, ce qui nous permettra, entre autres, de caractériser les arbres de fragmentation invariants par changement de racine uniforme.

Le chapitre 3 est consacré à l'étude du comportement lorsque  $n$  tend vers l'infini de chaînes de Markov décroissantes à valeurs entières positives issues de  $n$ , dont la probabilité de faire un saut macroscopique est très petite, typiquement proportionnelle à une puissance négative de  $n$ . Ces chaînes, correctement normalisées, vont converger vers des processus de Markov auto-similaires décroissants. On détaille plusieurs applications de cette convergence, aux marches aléatoires avec barrière, aux  $\Lambda$ -coalescents, aux compositions régénératrices non-consistantes ou encore à la hauteur d'une feuille prise au hasard dans certaines suites croissantes d'arbres finis. Cette dernière application a été le point de départ de ce travail, l'objectif étant d'étudier les limites d'échelle de suites croissantes d'arbres aléatoires.

Cette étude est entreprise dans le chapitre 4. Les suites  $(T_n, n \geq 1)$  d'arbres enracinés à  $n$  feuilles (ou  $n$  noeuds) auxquelles on s'intéresse satisfont la propriété suivante : les sous-arbres de l'arbre  $T_n$  situés au-dessus d'une hauteur donnée, sont, conditionnellement à leurs tailles, indépendants, de lois ne dépendant que de leurs tailles respectives. On regarde dans un premier temps de telles familles d'arbres consistantes. Un outil-clé pour étudier leurs limites d'échelle est leur connexion avec les processus de fragmentation homogènes. On s'est intéressé dans un deuxième temps aux cas plus généraux où la condition de consistance n'est pas nécessairement satisfaite. Le problème devient alors plus complexe et c'est là qu'interviennent les résultats du chapitre 3, qui nous permettent d'obtenir le comportement asymptotique de la hauteur d'une feuille prise au hasard, puis, de façon récursive, des sous-arbres engendrés par  $k$  feuilles prises au hasard. On conclut avec un résultat de tension. Dans tous les cas, les arbres continus obtenus à la limite sont les arbres de fragmentation évoqués plus haut.

Ces résultats nous permettent de démontrer la convergence des arbres de Pólya normalisés (arbres enracinés non-ordonnés non-étiquetés) vers l'arbre brownien, résultat conjecturé par Aldous. Ils nous permettent également de caractériser les limites d'échelle de diverses familles d'arbres se construisant récursivement et de récupérer les résultats de convergence, établis par Aldous et Duquesne, des arbres de Galton-Watson conditionnés vers les arbres brownien et stables.

Enfin, dans le cinquième et dernier chapitre, on s'intéresse à un problème déterministe pour l'équation de fragmentation auto-similaire avec formation de poussière suite à une fragmentation intensive des petites masses. Contrairement au cas aléatoire, ce modèle ne s'éteint pas en temps fini et se pose alors la question du comportement en temps grand de ses solutions. On y répond en construisant ces solutions à partir de processus de Markov auto-similaires décroissants positifs, puis en étudiant les limites de Yaglom de ces processus.



# Travaux

## Articles parus ou soumis dans des revues internationales avec comité de lecture :

### Articles issus de la thèse de doctorat :

- [48] B. HAAS. Loss of mass in deterministic and random fragmentations  
*Stoch. Proc. App.* 106, p.245-277 (2003)
- [50] B. HAAS. Regularity of formation of dust in self-similar fragmentations  
*Ann. IHP Probab. Stat.* 40, p. 411-438 (2004)
- [54] B. HAAS, G. MIERMONT. The genealogy of self-similar fragmentations with negative index as a continuum random tree  
*Electr. J. Probab.* 9, p. 57-97 (2004)
- [51] B. HAAS. Equilibrium for fragmentation with immigration  
*Ann. Applied Probab.* 15, p. 1958-1996 (2005)

### Articles postérieurs à la thèse de doctorat :

- [52] B. HAAS. Fragmentation processes with an initial mass converging to infinity  
*J. of Theor. Prob.* 20, p. 721-758 (2007)
- [57] B. HAAS, G. MIERMONT, J. PITMAN, M. WINKEL. Continuum tree asymptotics of discrete fragmentations and applications to phylogenetic models  
*Ann. Probab.* 36, p. 1790-1837 (2008)
- [58] B. HAAS, J. PITMAN, M. WINKEL. Spinal partitions and invariance under re-rooting of continuum random trees  
*Ann. Probab.* 37, p. 1381-1411 (2009)
- [46] C. GOLDSCHMIDT, B. HAAS. Behavior near the extinction time in self-similar fragmentations I : the stable case  
*Ann. IHP Probab. Stat.* 46, p. 338-368 (2010)
- [53] B. HAAS. Asymptotic behavior of solutions to the fragmentation equation with shattering : an approach via self-similar Markov processes  
*Ann. Applied Probab.* 20, p. 382-429 (2010)
- [55] B. HAAS, G. MIERMONT. Self-similar scaling limits of non-increasing Markov chains  
*Prépublication, à paraître dans Bernoulli.*
- [56] B. HAAS, G. MIERMONT. Scaling limits of Markov branching trees, with applications to Galton-Watson and random unordered trees  
*Prépublication.*

### Article invité dans une conférence :

- [49] B. HAAS. Appearance of dust in fragmentations  
*Comm. Math. Science*, Supplemental issue 1, p. 65-73 (2004)  
Proceeding de la conférence GRIP sur les phénomènes de coagulation et fragmentation

### Article de synthèse :

- [10] J. BERESTYCKI, J. BERTOIN, B. HAAS, G. MIERMONT. Quelques aspects fractals des fragmentations aléatoires.  
A paraître dans un tome de la collection *Panoramas et synthèses.*





# Table des matières

<b>1</b>	<b>Préliminaires</b>	<b>1</b>
1.1	Arbres aléatoires . . . . .	1
1.1.1	Arbres réels aléatoires . . . . .	1
1.1.2	Arbres de Lévy stables . . . . .	3
1.2	Fragmentations auto-similaires aléatoires . . . . .	4
1.3	Processus de Markov auto-similaires . . . . .	7
1.4	Quelques notations et définitions supplémentaires . . . . .	8
<b>2</b>	<b>Arbres de fragmentation : quelques aspects géométriques [54, 52, 46, 58]</b>	<b>9</b>
2.1	Arbres de fragmentation, dimension fractale [54] . . . . .	9
2.2	Comportement au voisinage de la racine [52] . . . . .	12
2.3	Comportement au voisinage de la feuille la plus éloignée de la racine : cas des fragmentations stables [46] . . . . .	16
2.4	Décompositions spinales et invariance par changement de racine uniforme [58] . . . . .	18
2.4.1	Décompositions spinales . . . . .	18
2.4.2	Invariance par changement de racine uniforme . . . . .	21
2.5	Remarques et perspectives . . . . .	22
<b>3</b>	<b>Limites d'échelle de chaînes de Markov décroissantes [55]</b>	<b>23</b>
3.1	Limites d'échelle . . . . .	23
3.2	Applications . . . . .	24
3.2.1	Marches aléatoires avec barrière . . . . .	24
3.2.2	$\Lambda$ -coalescents . . . . .	25
3.2.3	Compositions régénératrices . . . . .	27
<b>4</b>	<b>Limites d'échelle d'arbres aléatoires [56, 57]</b>	<b>29</b>
4.1	Le modèle . . . . .	29
4.2	Limites d'échelle : cas consistants . . . . .	31
4.3	Limites d'échelle : cas généraux . . . . .	32
4.4	Applications . . . . .	34
4.4.1	Arbres de Pólya . . . . .	34
4.4.2	Suites récursives d'arbres . . . . .	36
4.4.3	Arbres de Galton-Watson conditionnés . . . . .	37
4.5	Remarques et perspectives . . . . .	37
<b>5</b>	<b>Equation de fragmentation et processus de Markov auto-similaires [53]</b>	<b>39</b>
5.1	Limites de Yaglom et lois quasi-stationnaires des processus de Markov auto-similaires décroissants atteignant 0 en temps fini . . . . .	41
5.2	Comportement asymptotique des solutions de l'équation de fragmentation en temps grand . . . . .	42
5.3	Remarques et perspectives . . . . .	43



# Chapitre 1

## Préliminaires

### 1.1 Arbres aléatoires

Aldous [2, 3, 4] s'est intéressé au début des années 90 à la description des limites de familles d'arbres aléatoires dont le nombre de noeuds tend vers l'infini. Il construit pour cela des *arbres continus aléatoires* (abrégés en CRT pour Continuum Random Tree) comme sous-ensembles fermés connexes de l'espace des suites sommables  $\ell_1$  muni de sa topologie usuelle. En 2006, Evans, Pitman et Winter [36, 37] adoptent un autre point de vue en empruntant aux géomètres le formalisme des arbres réels ([26]) muni de la distance de Gromov-Hausdorff ([47, 21]) pour construire des arbres infinis aléatoires. Ce point de vue a l'avantage d'inclure les notions d'arbres non-étiquetés et non-ordonnés. Il est alors repris par Duquesne et Le Gall [32] pour construire et étudier les *arbres de Lévy*, puis par de nombreux autres probabilistes. On renvoie au livre d'Evans [35] et à l'article de synthèse de Le Gall [68] pour des introductions détaillées sur le sujet.

Avant de rappeler ci-dessous la définition d'un arbre réel (aléatoire), commençons par définir ce qu'on entend par un arbre fini à  $n$  noeuds dans ce manuscrit : c'est un graphe connexe acyclique à  $n$  noeuds, à isomorphisme de graphes près (les noeuds ne sont donc pas étiquetés, et il n'y a pas de notion d'ordre). Les arbres que nous considérons sont en général *enracinés*, c'est-à-dire qu'un noeud est distingué comme étant la *racine*. Le *degré* d'un noeud est son nombre de voisins. Les *feuilles* de l'arbre sont les noeuds de degré 1, avec la convention que la racine n'est pas une feuille, sauf si elle est de degré 0 (arbre à un noeud).

#### 1.1.1 Arbres réels aléatoires

**Définition 1.** *Un arbre réel est un espace métrique  $(\mathcal{T}, d)$  tel que  $\forall x, y \in \mathcal{T}$ ,*

- *il existe une unique isométrie  $\phi_{x,y} : [0, d(x, y)] \rightarrow \mathcal{T}$  telle que  $\phi_{x,y}(0) = x$  et  $\phi_{x,y}(d(x, y)) = y$*
- *pour chaque chemin injectif  $c : [0, 1] \rightarrow \mathcal{T}$  tel que  $c(0) = x$ ,  $c(1) = y$ , on a :  $c([0, 1]) = \phi_{x,y}([0, d(x, y)])$ .*

Les arbres réels que nous considérerons dans la suite sont *enracinés* : un point  $\rho \in \mathcal{T}$  est distingué et appelé *racine*. La *hauteur* d'un point  $x$  de l'arbre est alors sa distance à la racine. Les *feuilles* sont les points  $x \in \mathcal{T} \setminus \{\rho\}$  tels que  $\mathcal{T} \setminus \{x\}$  est connexe, avec la convention, à nouveau, que lorsque l'arbre est réduit à un point, sa racine, ce point est aussi une feuille. On notera  $\mathcal{L}(\mathcal{T})$  l'ensemble des feuilles de  $\mathcal{T}$ . Le complémentaire de cet ensemble est noté  $\mathcal{S}(\mathcal{T}) = \mathcal{T} \setminus \mathcal{L}(\mathcal{T})$  et est appelé *squelette de l'arbre*. Enfin le *degré* d'un point  $x$  est le nombre de composantes connexes de  $\mathcal{T} \setminus \{x\}$ . Il peut être infini.

Pour alléger le texte, on utilisera souvent la notation  $\mathcal{T}$  pour désigner un arbre réel  $(\mathcal{T}, d)$  de racine  $\rho$ . On sera amené à considérer ces arbres changés d'échelle : on notera  $a\mathcal{T}$  l'arbre  $\mathcal{T}$  muni de la distance  $ad$ ,  $a > 0$ .

La distance de Gromov-Hausdorff permet de définir une distance entre deux arbres réels compacts enracinés.

**Définition 2.** Soient  $\mathcal{T}$  et  $\mathcal{T}'$  deux arbres réels compacts enracinés, de racines respectives  $\rho$  et  $\rho'$ . Leur distance de Gromov-Hausdorff est alors définie par :

$$d_{\text{GH}}(\mathcal{T}, \mathcal{T}') = \inf (d_{Z, \mathcal{H}}(\varphi_1(\mathcal{T}), \varphi_2(\mathcal{T}')) \vee d_Z(\varphi_1(\rho), \varphi_2(\rho')))$$

où l'infimum est pris parmi tous les plongements isométriques  $\varphi_1 : \mathcal{T} \hookrightarrow Z$  et  $\varphi_2 : \mathcal{T}' \hookrightarrow Z$  dans un même espace métrique  $(Z, d_Z)$ ;  $d_{Z, \mathcal{H}}$  désigne la distance de Hausdorff usuelle entre deux sous-ensembles compacts de  $Z$ .

Deux arbres réels compacts enracinés sont considérés comme *équivalents* s'il existe une isométrie préservant la racine envoyant l'un sur l'autre. La fonction  $d_{\text{GH}}$  définit bien une distance sur l'espace quotient associé, que l'on notera  $\mathbb{T}$  ([47, 36]). Plus précisément,

**Théorème 1** (Evans, Pitman, Winter [36]).  $(\mathbb{T}, d_{\text{GH}})$  est un espace polonais.

**Arbres réels aléatoires mesurés.** On aura plus généralement à considérer la distance entre deux arbres réels compacts enracinés *mesurés*. Un arbre réel est mesuré s'il est muni d'une probabilité borélienne. Par analogie avec ce qu'on a fait ci-dessus, on identifie deux arbres réels compacts enracinés mesurés  $(\mathcal{T}, \mu)$  et  $(\mathcal{T}', \mu')$ , s'il existe une isométrie envoyant  $\mathcal{T}$  sur  $\mathcal{T}'$  préservant la racine et dont l'image de la mesure  $\mu$  est  $\mu'$ . On note  $\mathbb{T}_{\text{mes}}$  l'espace quotient correspondant, que l'on munit de la distance

$$d_{\text{GHP}}((\mathcal{T}, \mu), (\mathcal{T}', \mu')) = \inf (d_{Z, \mathcal{H}}(\varphi_1(\mathcal{T}), \varphi_2(\mathcal{T}')) \vee d_Z(\varphi_1(\rho), \varphi_2(\rho')) \vee d_{Z, \mathcal{P}}(\varphi_1(\mu), \varphi_2(\mu'))),$$

l'infimum étant toujours pris parmi tous les plongements isométriques  $\varphi_1 : \mathcal{T} \hookrightarrow Z$  et  $\varphi_2 : \mathcal{T}' \hookrightarrow Z$  dans un même espace métrique  $(Z, d_Z)$ . La mesure  $\varphi_1(\mu)$  est l'image par  $\varphi_1$  de la mesure  $\mu$  (et similairement pour  $\varphi_2(\mu')$ ) et  $d_{Z, \mathcal{P}}(\varphi_1(\mu), \varphi_2(\mu'))$  est la distance de Prokhorov entre ces deux mesures. En adaptant des arguments d'Evans et Winter [37] pour les arbres réels compacts mesurés non-enracinés, on montre que l'espace métrique  $(\mathbb{T}_{\text{mes}}, d_{\text{GHP}})$  est polonais.

L'approche d'Aldous, antérieure aux travaux d'Evans, Pitman et Winter, consistait à considérer des représentations particulières d'arbres réels mesurés comme sous-ensembles fermés de  $\ell_1$ . Il imposait en outre aux mesures dont sont munis ces arbres de satisfaire à quelques contraintes. Nous aurons besoin de son point de vue par la suite et appellerons *arbre continu* un arbre réel compact enraciné mesuré vérifiant les contraintes d'Aldous.

**Définition 3.** On appelle *arbre continu* un arbre réel compact enraciné mesuré  $(\mathcal{T}, \mu)$  tel que

- $\mu(\mathcal{L}(\mathcal{T})) = 1$
- $\mu$  n'a pas d'atomes
- $\forall x \in \mathcal{S}(\mathcal{T}), \mu(\{y \in \mathcal{T} : x \text{ appartient à un chemin allant de la racine à } y\}) > 0.$

L'ensemble des feuilles d'un tel arbre est nécessairement non dénombrable et sans point isolé. On appellera *arbre continu aléatoire* (CRT) toute variable aléatoire  $(\mathcal{T}, \mu)$  à valeurs dans  $\mathbb{T}_{\text{mes}}$  telle que l'ensemble  $\{\mu \text{ ne vérifie pas les trois points ci-dessus}\}$  soit négligeable (pour la tribu complétée).

**Codage par des fonctions continues.** On peut construire des arbres réels compacts à partir de fonctions continues sur  $[0, 1]$  de la façon suivante (voir en particulier [4, 32]). Soit  $g : [0, 1] \rightarrow [0, \infty)$  une fonction continue telle que  $g(0) = g(1) = 0$ . A partir de  $g$ , on définit une pseudo-distance sur  $[0, 1]$  par

$$\tilde{d}_g(x, y) = g(x) + g(y) - 2 \min_{z \in [x \wedge y, x \vee y]} g(z), \quad x, y \in [0, 1]$$

et on considère la relation d'équivalence  $x \sim y \Leftrightarrow \tilde{d}_g(x, y) = 0$ . La pseudo-distance  $\tilde{d}_g$  induit alors une distance  $d_g$  sur l'espace quotient  $\mathcal{T}_g := [0, 1] / \sim$ . On distingue un point dans cet espace quotient, la racine, image de 0 par la projection canonique de  $[0, 1]$  sur  $\mathcal{T}_g$ .

**Théorème 2** (Duquesne, Le Gall [32]). (i) *L'espace métrique  $(\mathcal{T}_g, d_g)$  est un arbre réel compact.*

(ii)  $d_{\text{GH}}(\mathcal{T}_{g_1}, \mathcal{T}_{g_2}) \leq 2 \sup_{x \in [0,1]} |g_1(x) - g_2(x)|$ , pour toutes fonctions continues  $g_1, g_2 : [0, 1] \rightarrow [0, \infty)$  s'annulant en 0 et 1.

Notons que l'arbre  $\mathcal{T}_g$  est alors naturellement muni d'un ordre, hérité de l'ordre usuel sur  $[0, 1]$ . Dans la suite, on ne tiendra pas compte, en général, de cet ordre.

Une probabilité naturelle sur  $\mathcal{T}_g$  est obtenue comme image de la mesure de Lebesgue sur  $[0, 1]$  par la projection canonique sur  $\mathcal{T}_g$ . On la notera  $\mu_g$ . On peut alors montrer que si  $g_n$  converge vers  $g$  pour la topologie de la convergence uniforme sur  $[0, 1]$ ,  $d_{\text{GHP}}((\mathcal{T}_{g_n}, \mu_{g_n}), (\mathcal{T}_g, \mu_g)) \rightarrow 0$ .

### 1.1.2 Arbres de Lévy stables

**Définition 4.** Soit  $e : [0, 1] \rightarrow [0, \infty)$  une excursion brownienne normalisée. Le CRT brownien est l'arbre réel enraciné mesuré

$$(\mathcal{T}_{\text{Br}}, \mu_{\text{Br}}) := (\mathcal{T}_e, \mu_e).$$

Comme les minima locaux de l'excursion brownienne sont presque sûrement distincts, l'arbre obtenu est presque sûrement binaire, c'est-à-dire que ses points sont tous de degré 1, 2 ou 3. Par ailleurs, l'ensemble des feuilles de l'arbre est dense dans l'arbre presque sûrement.

Pour être tout à fait exacte, l'arbre brownien introduit par Aldous [2, 3, 4] se construit en fait à partir de la fonction  $2e$ ; on appellera cependant dans la suite *arbre brownien* l'arbre défini ci-dessus à partir de l'excursion  $e$ .

Aldous [4] montre entre autres que cet arbre est la limite d'échelle d'arbres de Galton-Watson conditionnés à avoir un grand nombre de noeuds. Soit  $T_{\text{GW}}$  un arbre de Galton-Watson de loi de reproduction  $\eta = (\eta_k, k \geq 0)$  critique, c'est-à-dire d'espérance 1. On suppose de plus que  $\eta(1) < 1$ , que la variance  $\sigma^2$  de la loi  $\eta$  est finie et que pour tout  $n$  assez grand  $\mathbb{P}(\#T_{\text{GW}} = n) > 0$  (c'est le cas si  $\eta$  est apériodique). Soit  $T_n$  un arbre aléatoire de loi celle de  $T_{\text{GW}}$  conditionné à avoir  $n$  noeuds. On oublie l'ordre naturel sur  $T_n$ , dont on munit par ailleurs les arêtes de longueurs toutes égales à 1.

**Théorème 3** (Aldous [4]). *On a alors la convergence en loi pour la topologie de Gromov-Hausdorff-Prokhorov :*

$$\left( \frac{\sigma}{2\sqrt{n}} T_n, \mu_n \right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} (\mathcal{T}_{\text{Br}}, \mu_{\text{Br}}),$$

la mesure  $\mu_n$  étant la mesure uniforme sur les noeuds de  $T_n$ .

Le résultat d'Aldous est en réalité plus fort que celui énoncé ci-dessus, car il montre la convergence de fonctions continues codant les arbres de Galton-Watson normalisés vers l'excursion brownienne. Duquesne [29] complète ce résultat en étudiant les limites d'échelle d'arbres de Galton-Watson dont la loi de reproduction  $(\eta_k, k \geq 0)$  est critique et dans le domaine d'attraction d'une loi stable d'indice  $\beta \in (1, 2]$ . On rappelle son résultat dans les cas où il existe une constante finie  $C > 0$  telle que  $\eta_k \sim_{\infty} Ck^{-1-\beta}$ ,  $1 < \beta < 2$ . Comme pour le résultat d'Aldous, il existe une version de ce résultat en termes de fonctions continues.

**Théorème 4** (Duquesne [29]). *Il existe un CRT  $(\mathcal{T}_\beta, \mu_\beta)$  tel que*

$$\left( n^{1/\beta-1} T_n, \mu_n \right) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{loi}} \left( \left( \frac{\beta(\beta-1)}{C\Gamma(2-\beta)} \right)^{1/\beta} \mathcal{T}_\beta, \mu_\beta \right),$$

pour la topologie de Gromov-Hausdorff-Prokhorov.

A la différence du cas brownien, les points de l'arbre  $\mathcal{T}_\beta$ ,  $1 < \beta < 2$ , sont tous de degré 1, 2 ou  $\infty$ . Mais comme dans le cas brownien, l'ensemble des feuilles de  $\mathcal{T}_\beta$  est dense dans  $\mathcal{T}_\beta$  et cet arbre satisfait des propriétés de branchement et d'auto-similarité : les sous-arbres composés des points situés à une hauteur strictement supérieure à  $t$  de la racine, sont, conditionnellement à leurs  $\mu_\beta$ -masses, indépendants de même loi que  $\mathcal{T}_\beta$  à un changement d'échelle près. Par ailleurs, l'arbre  $\mathcal{T}_\beta$  peut se construire à partir d'une fonction aléatoire continue via la procédure de codage détaillée dans le paragraphe précédent. Cette fonction est l'excursion normalisée d'un processus appelé *processus de hauteur stable d'indice  $\beta$* , non-markovien, se construisant à partir d'un processus de Lévy stable d'indice  $\beta$ , voir [69, 31, 32].

On appellera dans la suite *arbres de Lévy stables* l'ensemble de ces arbres, y compris l'arbre brownien qui correspond à l'indice de stabilité  $\beta = 2$ . Cet ensemble d'arbres fait partie des *arbres de Lévy* introduits et étudiés par Duquesne, Le Gall et Le Jan [69, 31, 32] pour coder la généalogie des processus de branchement à espaces d'états continus. En particulier l'arbre stable d'indice  $\beta$  code la généalogie d'un processus de branchement de mécanisme de branchement  $u \mapsto u^\beta$ .

## 1.2 Fragmentations auto-similaires aléatoires

Ce sont des modèles aléatoires décrivant l'évolution de masses de particules se scindant en cours du temps, et dont la dynamique est basée sur les deux propriétés suivantes :

- une propriété de branchement : différentes particules vont évoluer indépendamment
- une propriété d'auto-similarité : le taux de fragmentation d'une particule est proportionnel à une puissance de sa masse.

L'hypothèse d'auto-similarité intervient naturellement dans de nombreux modèles (dégradation de polymères, concassage dans l'industrie minière par exemple) et a l'avantage de simplifier considérablement l'étude mathématique du modèle. D'un point de vue historique, le premier, semble-t-il, à avoir étudié un tel modèle est Kolmogorov [63] en 1941, il se concentrait alors sur des modèles où les particules se fragmentent toutes à un même taux. Puis Filippov [38], Brennan et Durrett [19, 20], Aldous et Pitman [6] s'intéressent à divers modèles où les taux de fragmentation dépendent des masses des particules. En 2001, Bertoin [11, 12] introduit les processus de fragmentation auto-similaires dans un cadre général, qui est celui que nous adoptons ici. Nous renvoyons au livre de Bertoin [14] pour une synthèse et une bibliographie détaillée des travaux relatifs à ce modèle.

**Fragmentations de masse.** Soit  $(F(t), t \geq 0)$  un processus markovien, càdlàg, à valeur dans l'ensemble des suites

$$\mathcal{S}^\downarrow = \left\{ \mathbf{s} = (s_1, s_2, \dots) : s_1 \geq s_2 \geq \dots \geq 0, \sum_{i \geq 1} s_i \leq 1 \right\},$$

muni de la distance  $d_{\mathcal{S}^\downarrow}(\mathbf{s}, \mathbf{s}') = \sum_{i \geq 1} |s_i - s'_i|$ . On note  $\mathbb{P}_m^F$  la loi de  $F$  partant de  $(m, 0, \dots)$ .

**Définition 5.** On dit que  $F$  est un processus de fragmentation auto-similaire d'indice  $\alpha \in \mathbb{R}$  si

- (i)  $\forall t \geq 0$ , sachant  $F(t) = (s_1, s_2, \dots)$ ,

$$(F(t+s), s \geq 0) \stackrel{\text{loi}}{\cong} (\{F_i^{(s_j)}(s), i, j \geq 1\}^\downarrow, s \geq 0)$$

où les  $F^{(s_j)}$ ,  $j \geq 1$  sont des fragmentations indépendantes de lois respectives  $\mathbb{P}_{s_j}^F$ ,  $j \geq 1$  et  $\{F_i^{(s_j)}(s), i, j \geq 1\}^\downarrow$  est le réarrangement décroissant des éléments  $F_i^{(s_j)}(s), i, j \geq 1$  ;

- (ii) la loi de  $(mF(m^\alpha t), t \geq 0)$  sous  $\mathbb{P}_1^F$  est  $\mathbb{P}_m^F$ , pour tout  $m \in [0, 1]$ .

Sauf mention du contraire, il est sous-entendu dans la suite de ce manuscrit qu'une fragmentation  $F$  est issue de  $F(0) = (1, 0, \dots)$ . La loi d'un tel processus est alors caractérisée par trois paramètres

[12, 8] : l'indice  $\alpha$ , un *coefficient d'érosion*  $c \geq 0$  codant la fonte continue des fragments (lorsque  $c = 0$ , il n'y a pas d'érosion) et une mesure sigma-finie  $\nu$  sur  $\mathcal{S}^\downarrow$  telle que

$$\int_{\mathcal{S}^\downarrow} (1 - s_1) \nu(ds) < \infty \quad \text{et} \quad \nu((1, 0, \dots)) = 0,$$

appelée *mesure de dislocation*, décrivant les dislocations soudaines des fragments. De façon informelle, une masse  $m$  se scinde en masses  $ms$ ,  $s \in \mathcal{S}^\downarrow$ , au taux  $m^\alpha \nu(ds)$ . Lorsque l'indice  $\alpha = 0$ , la fragmentation est dite *homogène* et se construit alors à l'aide d'un processus ponctuel de Poisson [11, 8].

Partant d'une fragmentation homogène  $(0, c, \nu)$ , on construit, par un changement de temps adéquat dépendant du passé de chaque particule, une fragmentation de paramètres  $(\alpha, c, \nu)$ . Ce changement de temps est complexe et on renvoie à [12] pour sa description détaillée. Retenons simplement qu'il y a un ralentissement (respectivement accélération) du temps pour obtenir une fragmentation d'indice positif (respectivement négatif), et que ce changement de temps est bijectif, on peut passer inversement d'une fragmentation  $(\alpha, c, \nu)$  à une fragmentation  $(0, c, \nu)$ .

Si  $\alpha < 0$ , les petites masses se fragmentent très vite et on observe une *formation de poussière*, c'est-à-dire qu'il y a apparition d'un ensemble de particules de masse 0, dont la masse totale est, elle, non nulle. Ceci quels que soient les paramètres  $c, \nu$ . Bertoin [13] montre plus précisément que le processus de fragmentation atteint alors l'état  $(0, 0, \dots)$  en un temps  $\zeta$  fini presque sûrement. Une partie de ma thèse [48, 50] porte sur l'étude de ce phénomène de formation de poussière.

**Fragmentations à valeurs partitions.** Il y a une correspondance entre les processus de fragmentation auto-similaires à valeurs dans  $\mathcal{S}^\downarrow$  et ceux à valeurs dans l'ensemble des partitions de  $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ , muni de sa topologie usuelle, [12, 8]. De façon informelle, ces derniers sont des processus càdlàg échangeables, issus de la partition  $\{\mathbb{N}\}$ , décroissants dans le sens où les blocs du processus au temps  $s \geq t$  sont inclus dans ceux du processus au temps  $t$  et possèdent une propriété de branchement (différents blocs évoluent indépendamment) et une propriété d'auto-similarité (chaque bloc se fragmente suivant la même dynamique que le bloc initial  $\{\mathbb{N}\}$  à un changement d'échelle près dépendant d'un paramètre d'auto-similarité fixé). On renvoie à [12] pour une définition rigoureuse. Un tel processus  $\Pi$  a alors presque sûrement des fréquences asymptotiques pour tout temps  $t \geq 0$  et si on note  $|\Pi(t)|^\downarrow$  le réarrangement décroissant de ces fréquences asymptotiques, le processus  $(|\Pi(t)|^\downarrow, t \geq 0)$  est un processus de fragmentation auto-similaire à valeurs dans  $\mathcal{S}^\downarrow$ . Réciproquement, partant d'un processus de fragmentation à valeurs dans  $\mathcal{S}^\downarrow$  on lui associe un processus à valeurs partitions, unique en loi, dont les fréquences asymptotiques définissent un processus de même loi que le processus de fragmentation initial. Les lois des processus de fragmentation à valeurs partitions sont donc caractérisées par des triplets  $(\alpha, c, \nu)$ , comme définis ci-dessus.

**Fragment marqué.** Considérons un processus de fragmentation  $\Pi$  à valeurs partitions de paramètres  $(\alpha, c, \nu)$  et pour tout  $t \geq 0$ , la fréquence asymptotique, notée  $\lambda(t)$ , de son bloc contenant 1 au temps  $t$ . Le processus  $(\lambda(t), t \geq 0)$  est appelé *processus du fragment marqué* et a l'avantage de se construire à partir d'un subordonateur changé de temps.

**Théorème 5** (Bertoin [12]). *Il existe un subordonateur  $\xi$  de mesure de Lévy*

$$L(dx) = e^{-x} \sum_{i \geq 1} \nu(-\log s_i \in dx)$$

et de drift  $d = c$ , tué à un taux  $\kappa = c + \int_{\mathcal{S}^\downarrow} (1 - \sum_{i \geq 1} s_i) \nu(ds)$ , tel que

$$\lambda(t) = \exp(-\xi_{\rho(t)}), \quad t \geq 0,$$

où  $\rho$  est le changement de temps  $\rho(t) = \inf \{u \geq 0 : \int_0^u \exp(\alpha \xi_r) dr > t\}$ ,  $t \geq 0$ .

Pour une fragmentation homogène, le processus du fragment marqué est donc simplement l'exponentielle de moins un subordonateur. Signalons au passage que ce processus, bien qu'il apporte beaucoup d'information sur la fragmentation, ne permet pas en général (sauf dans les cas binaires) de reconstruire le processus de fragmentation en entier.

Dans la suite, on travaillera très souvent sous l'hypothèse :

$$c = 0 \quad \text{et} \quad \nu\left(\sum_{i \geq 1} s_i < 1\right) = 0, \quad (1.1)$$

la mesure  $\nu$  étant alors dite *conservatrice*, car il n'y pas de formation de poussière au moment d'une dislocation. Dans ce cas le subordonateur associé au fragment marqué n'a pas de drift et n'est pas tué.

**Fragmentations stables.** Soit  $\beta \in (1, 2]$  et  $(\mathcal{T}_\beta, \mu_\beta)$  l'arbre de Lévy stable d'indice  $\beta$  introduit dans la section 1.1.2 (lorsque  $\beta = 2$  il s'agit de l'arbre brownien  $(\mathcal{T}_{\text{Br}}, \mu_{\text{Br}})$ ). En coupant de deux façons différentes cet arbre, on obtient deux fragmentations auto-similaires, l'une d'indice négatif, l'autre d'indice positif.

*Fragmentation  $\beta$ -stable d'indice négatif.* Cette fragmentation a été introduite par Bertoin [12] dans le cas brownien et généralisée par Miermont [74] aux indices  $\beta \in (1, 2)$ . Elle se construit simplement ainsi : pour chaque  $t \geq 0$ , on considère l'ensemble des points de l'arbre situé à une hauteur strictement plus grande que  $t$  de la racine et on note  $F^{\beta-}(t)$  le réarrangement décroissant des  $\mu_\beta$ -masses de ses composantes connexes. On utilisera plutôt la notation  $F^{\text{Br}}$  dans le cas brownien. Alors, le processus  $F^{\text{Br}}$  est une fragmentation d'indice  $\alpha = -1/2$ , de coefficient d'érosion  $c = 0$  et de mesure de dislocation  $\nu_{\text{Br}}$  où

$$\nu_{\text{Br}}(s_1 + s_2 < 1) = 0, \quad \nu_{\text{Br}}(s_1 \in dx) = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}x^{3/2}(1-x)^{3/2}} \mathbf{1}_{\{1/2 < x < 1\}} dx.$$

Et pour  $1 < \beta < 2$ ,  $F^{\beta-}$  est une fragmentation d'indice  $\alpha = 1/\beta - 1$ , de coefficient d'érosion  $c = 0$  et de mesure de dislocation  $\nu_\beta$  définie pour toute fonction test  $f$  par

$$\int_{\mathcal{S}^\downarrow} f(\mathbf{s}) \nu_\beta(d\mathbf{s}) = \frac{\beta^2 \Gamma(2 - \beta^{-1})}{\Gamma(2 - \beta)} \mathbb{E} \left[ Tf \left( \frac{\Delta_1}{T}, \frac{\Delta_2}{T}, \dots \right) \right],$$

$\Delta_1 > \Delta_2 > \dots$  étant les points d'une mesure de Poisson sur  $\mathbb{R}_+$  d'intensité  $(\beta \Gamma(1/\beta - 1))^{-1} x^{-1/\beta - 1} dx$  et  $T = \sum_{i \geq 1} \Delta_i$ . Dans le cas brownien la fragmentation est donc binaire, tandis que pour les autres indices  $\beta$  chaque fragmentation d'un bloc donne naissance à une infinité de fragments. Dans tous les cas, la mesure de dislocation est infinie et conservatrice.

*Fragmentation  $\beta$ -stable d'indice positif.* Sa construction est plus complexe. Pour  $\beta = 2$ , il s'agit de la fragmentation d'Aldous-Pitman [6], notée  $F^{\text{AP}}$ , construite en coupant les arêtes de l'arbre brownien (changé d'échelle)  $2\mathcal{T}_{\text{Br}}$  suivant une mesure de Poisson d'intensité  $tL$ , où  $L$  est la mesure de longueur sur le squelette de l'arbre et ce de façon consistante quand  $t \geq 0$  varie, puis en considérant les masses des composantes connexes obtenues. Aldous et Pitman l'ont considérée pour étudier le coalescent additif standard qui s'obtient par un retournement de temps exponentiel dans cette fragmentation. Bertoin [12] montre alors qu'il s'agit d'une fragmentation d'indice  $\alpha = 1/2$ , sans érosion et de mesure de dislocation  $\nu_{\text{Br}}/2$ . Miermont [75] construit de façon analogue une fragmentation d'indice  $\alpha = 1/\beta$ , sans érosion et de mesure de dislocation  $\nu_\beta$  en coupant l'arbre  $\mathcal{T}_\beta$  aux noeuds. On la notera  $F^{\beta+}$ ,  $1 < \beta < 2$ .



### 1.3 Processus de Markov auto-similaires

La classe des processus de Markov auto-similaires a été introduite par Lamperti [66, 67] en 1962. On en donne ici une définition légèrement plus générale que celle de Lamperti.

**Définition 6.** *Un processus à valeurs réelles positives  $X$  est un processus de Markov auto-similaire si c'est un processus de Markov fort et s'il existe un réel  $\gamma$  tel que pour tout  $a > 0$*

$$\text{la loi de } (aX(a^{-\gamma}t), t \geq 0) \text{ sous } \mathbb{P}_x \text{ est } \mathbb{P}_{ax},$$

où  $\mathbb{P}_x$  désigne la loi de  $X$  partant de  $x > 0$ .

Le processus du fragment marqué d'une fragmentation auto-similaire est donc un processus de Markov auto-similaire. Plus généralement, si  $\xi$  est un subordonateur (éventuellement tué à un certain taux) et  $\rho$  le changement de temps

$$\rho(t) = \inf \left\{ u \geq 0 : \int_0^u \exp(-\gamma\xi_r) dr > t \right\}, \quad t \geq 0 \quad (1.2)$$

le processus

$$X(t) = x \exp(-\xi_{\rho(x^{-\gamma}t)}), \quad t \geq 0 \quad (1.3)$$

est un processus de Markov auto-similaire décroissant partant de  $x$ . Réciproquement, Lamperti [67] montre que tous les processus de Markov auto-similaires décroissants peuvent s'écrire sous la forme (1.3). De plus, le processus atteindra 0 presque sûrement en temps fini si et seulement si  $\gamma > 0$  ou le subordonateur est tué.

Le générateur du processus (1.3) se déduit facilement de celui du subordonateur associé. Plaçons nous dans le cas où le subordonateur n'est pas tué, a un drift nul et une mesure de Lévy  $\Pi$ . Alors le générateur  $G$  de  $X$  est donné pour toute fonction continûment dérivable  $f$  sur  $(0, \infty)$  à support compact par

$$G(f)(x) = x^{-\gamma} \int_0^\infty (f(x \exp(-y)) - f(x)) \Pi(dy) = x^{-\gamma} \int_0^1 (f(xy) - f(x)) y B(dy), \quad (1.4)$$

où  $B$  est la mesure sur  $(0, 1)$  définie à partir de  $\Pi$  par  $\int_0^1 g(x) B(dx) = \int_0^\infty g(\exp(-u)) \exp(u) \Pi(du)$ , pour toute fonction mesurable  $g : (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}_+$ .

Nous travaillerons souvent dans la suite avec un processus auto-similaire décroissant issu de 1, c'est-à-dire de la forme  $X = \exp(-\xi_\rho)$ . Pour  $\gamma > 0$ , le premier instant auquel ce processus atteint 0 est fini presque sûrement et donné par

$$I = \inf\{t \geq 0 : X(t) = 0\} = \int_0^\infty \exp(-\gamma\xi_r) dr. \quad (1.5)$$

Ce type de variables aléatoires *fonctionnelles exponentielles de processus de Lévy* a été étudié en détails, voir en particulier le papier de Carmona, Petit et Yor [22] et l'article de synthèse de Bertoin et Yor [16]. Parmi les résultats qui nous seront utiles par la suite, rappelons que Carmona, Petit et Yor montrent que la variable  $I$  a des moments positifs de tous les ordres, qu'ils calculent explicitement. De leur côté, Bertoin et Yor montrent qu'il existe une unique mesure de probabilité  $\mu_R$  sur  $(0, \infty)$  telle que si  $R$  est une variable aléatoire de loi  $\mu_R$ , indépendante de  $I$ ,

$$\text{la loi de } RI \text{ est une loi exponentielle de paramètre 1.} \quad (1.6)$$

## 1.4 Quelques notations et définitions supplémentaires

- $\mathbb{Z}_+ = \{0, 1, 2, \dots\} = \mathbb{N} \cup \{0\}$
- $\mathcal{P}_{\mathbb{N}}$  désigne l'ensemble des partitions de  $\mathbb{N}$
- $\mathcal{P}_{[n]}$  l'ensemble des partitions de  $\{1, \dots, n\}$
- $\mathcal{P}_n$  l'ensemble des partitions de l'entier  $n$ . On rappelle qu'une partition de  $n$  est une suite décroissante finie d'entiers strictement positifs  $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_p)$  de somme  $n$ . On note  $p(\lambda)$  la longueur de cette suite.
- une composition de  $\mathbb{N}$  (resp.  $[n], n$ ) est une partition *ordonnée* de  $\mathbb{N}$  (resp.  $[n], n$ ).

## Chapitre 2

# Arbres de fragmentation : quelques aspects géométriques [54, 52, 46, 58]

Les arbres de fragmentation sont des arbres réels, compacts, mesurés, introduits et étudiés avec Grégory Miermont dans l'article [54] pour modéliser la généalogie des processus de fragmentation auto-similaires d'indice *néгатif*. Cette classe d'arbres contient donc, entre autres, les arbres de Lévy stables. Ils vérifient bien sûr une propriété d'auto-similarité et on verra ci-dessous que ce sont, en un certain sens, les seuls CRT à satisfaire cette propriété. Outre leur construction, on va s'intéresser dans ce chapitre au calcul de leur dimension de Hausdorff, et étudier la structure de ces arbres dans un voisinage de la racine, d'une part, et dans un voisinage de la feuille la plus éloignée de la racine, d'autre part. Enfin, on va étudier la décomposition de l'arbre le long d'une épine dorsale, c'est-à-dire du chemin entre la racine et une feuille prise au hasard. Ceci nous donnera des informations supplémentaires sur la structure des arbres de fragmentation. On verra notamment que les seuls arbres de fragmentation invariants par changement de racine uniforme sont les arbres de Lévy stables.

Certains des résultats mentionnés dans ce paragraphe sont valables dans le cadre général des fragmentations auto-similaires d'indice négatif ou positif, et seront alors énoncés en termes de processus de fragmentation plutôt qu'en termes d'arbres.

Dans toute cette section, les processus de fragmentation considérés sont paramétrés par des mesures de dislocation conservatrices, et n'ont pas d'érosion, c'est-à-dire qu'ils vérifient la condition (1.1). On rappelle qu'ils sont de plus supposés partir initialement d'une unique masse, égale à 1. Leurs lois sont donc caractérisées par les paramètres  $\alpha$  et  $\nu$ .

### 2.1 Arbres de fragmentation, dimension fractale [54]

**Construction.** Soit  $\Pi$  une fragmentation à valeurs partitions de paramètres  $\alpha, \nu$  avec  $\alpha < 0$ . On note  $\Pi_B$  la restriction de ce processus à un sous-ensemble  $B \subset \mathbb{N}$ , fini. On commence par construire un arbre réel à  $\#B$  feuilles étiquetées modélisant la généalogie de ce processus restreint. On le notera  $\mathcal{R}_B$ . Sa construction se fait récursivement sur le cardinal de  $B$ . Pour cela, notons  $D_{\{i\}}$  le premier instant où le bloc contenant  $i$  est réduit à un singleton dans la fragmentation  $\Pi$ ,  $i \geq 1$ , et pour un ensemble  $B$  de cardinal plus grand que 2,  $D_B$  le premier instant où les éléments de  $B$  n'appartiennent plus tous à un même bloc,  $D_B = \inf\{t \geq 0 : \Pi_B(t) \neq B\}$ . Les arbres  $\mathcal{R}_B$  se construisent alors ainsi :

- pour tout  $i \in \mathbb{N}$ , l'arbre  $\mathcal{R}_{\{i\}}$  est le segment de longueur  $D_{\{i\}}$  dont une extrémité est la racine, et l'autre est une feuille étiquetée  $L_i$  ;
- supposons que les arbres  $\mathcal{R}_B$  sont construits pour tous les ensembles  $B$  d'entiers de cardinal  $\leq n$  et considérons un ensemble  $B$  de cardinal  $n + 1$ . On note  $B_1, \dots, B_k$  les  $k \geq 2$  blocs en lesquels il se scinde au temps  $D_B$ . Pour  $1 \leq i \leq k$ , on note  $\mathcal{R}_{B_i} - D_B$  l'arbre obtenu à partir de  $\mathcal{R}_{B_i}$  en

remplaçant la longueur  $D_{B_i}$  sur son arête reliant sa racine à son premier point de branchement par la longueur  $D_{B_i} - D_B > 0$ . L'arbre  $R_B$  se construit alors en fusionnant les racines des arbres  $\mathcal{R}_{B_i} - D_B$ ,  $1 \leq i \leq k$  en un même point et en reliant ce point à une nouvelle racine, via une arête de longueur  $D_B$  ;

- la distance associée à  $\mathcal{R}_B$  est celle naturellement induite par les longueurs sur ses arêtes.

**Notations.** On notera  $\mathcal{R}_n$  l'arbre  $\mathcal{R}_{[n]}$  décrivant la généalogie de la fragmentation restreinte aux  $n$  premiers entiers, et  $T_n$  l'arbre combinatoire avec des feuilles étiquetées obtenu à partir de  $\mathcal{R}_n$  en oubliant les longueurs sur les arêtes.

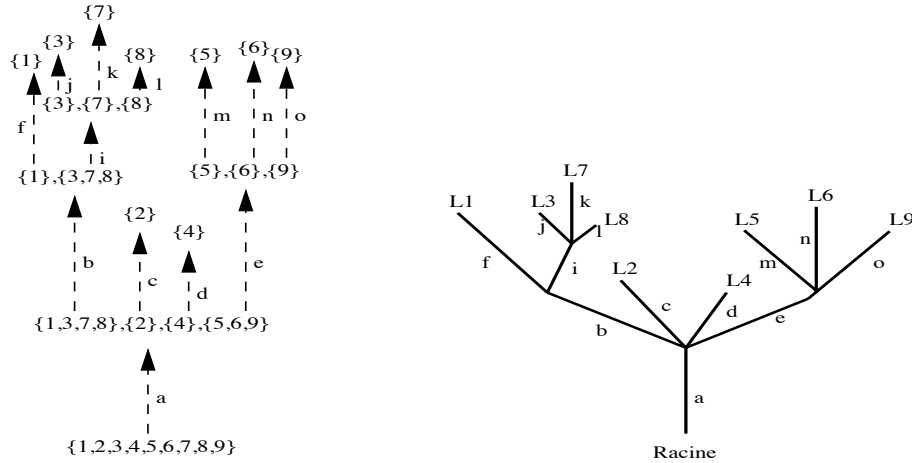


FIGURE 2.1 – La fragmentation  $\Pi_{[9]}$  (à gauche) et l'arbre  $\mathcal{R}_9$  (à droite). Les lettres  $a, b, c, \dots$  désignent les temps de fragmentation des blocs de la fragmentation  $\Pi_{[9]}$  et les longueurs des arêtes correspondantes dans l'arbre  $\mathcal{R}_9$ . La longueur d'une flèche entre deux fois le même singleton dans la fragmentation représente le temps écoulé entre le moment où ce singleton apparaît dans la fragmentation  $\Pi_{[9]}$  et celui où il apparaît dans  $\Pi$ .

Remarquons que la loi de la suite  $(T_n, n \geq 1)$  ne dépend que de la mesure  $\nu$  et pas de l'indice  $\alpha$ , puisque les fragmentations de paramètres  $\alpha, \nu$  s'obtiennent toutes à partir d'une fragmentation homogène de mesure de dislocation  $\nu$  par changement de temps. On verra plus loin (voir la remarque suivant la proposition 2) que si la mesure  $\nu$  est infinie, la fragmentation  $\Pi$  est une fonction mesurable des  $(T_n, n \geq 1)$ .

L'arbre de fragmentation codant la généalogie du processus  $\Pi$ , que l'on notera  $\mathcal{T}_{\alpha, \nu}$ , est alors la limite projective dans  $\ell_1$  des arbres  $\mathcal{R}_n, n \geq 1$  correctement plongés dans  $\ell_1$ . Sa construction formelle se fait grâce au travail d'Aldous [4] qui stipule que puisque la suite  $(\mathcal{R}_n, n \geq 1)$  :

- est *fortement consistante*, c'est-à-dire que pour tout  $n \in \mathbb{N}$  et tout  $k \leq n$ , le sous-arbre engendré par la racine de  $\mathcal{R}_n$  et  $k$  feuilles distinctes prises uniformément au hasard parmi les feuilles de  $\mathcal{R}_n$  a même loi que  $\mathcal{R}_k$  (modulo un re-étiquetage des feuilles)
- a son *ensemble de feuilles tendu* :  $\min_{2 \leq i \leq n} d_n(L_1, L_i) \xrightarrow{p.s.} 0$  quand  $n \rightarrow \infty$ ,  $d_n$  étant la distance sur  $\mathcal{R}_n$

(ce qui est facilement vérifiable), alors on peut construire de façon récursive dans  $\ell_1$  les arbres  $\mathcal{R}_n, n \geq 1$  de sorte à obtenir une suite croissante telle que  $\mathcal{T}_{\alpha, \nu}$ , la fermeture de leur réunion, soit presque sûrement un arbre réel borné, muni d'une mesure de probabilité  $\mu_{\alpha, \nu}$  sur ses feuilles, qui est la limite presque sûre des mesures empiriques sur les feuilles de  $\mathcal{R}_n, n \geq 1$ . Plus précisément, on montre que l'arbre  $\mathcal{T}_{\alpha, \nu}$  est presque sûrement compact et que l'arbre mesuré  $(\mathcal{T}_{\alpha, \nu}, \mu_{\alpha, \nu})$  est un CRT, comme défini dans la

section 1.1.1. (en modifiant si nécessaire la construction de cette variable sur les ensembles négligeables où elle était mal définie). Par ailleurs, on vérifie facilement qu'avec probabilité 1,  $\mathcal{L}(\mathcal{T}_{\alpha,\nu})$  est dense dans  $\mathcal{T}_{\alpha,\nu}$  si et seulement si  $\nu(\mathcal{S}^\downarrow) = \infty$ .

**Exemple.** Lorsque  $\alpha = 1/\beta - 1$ ,  $1 < \beta \leq 2$  et  $\nu = \nu_\beta$  ( $\nu_{\text{Br}}$  si  $\beta = 2$ ), on récupère ainsi une version de l'arbre stable d'indice  $\beta$ .

L'ensemble des arbres de fragmentation ainsi construits est assez général, puisque ce sont les seuls *CRT auto-similaires*, dans le sens suivant : un CRT  $(\mathcal{T}, \mu)$  est auto-similaire d'indice  $\alpha < 0$  si pour tout  $t \geq 0$ , si on note  $\mathcal{T}^{(i)}(t), i \geq 1$  les composantes connexes de  $\{x \in \mathcal{T} : d(x, \rho) > t\}$  numérotées par ordre décroissant de leurs  $\mu$ -masses, et  $\mu^{(i)}(t)$  la mesure de probabilité  $\mu(\cdot \cap \mathcal{T}^{(i)}(t))/\mu(\mathcal{T}^{(i)}(t))$ ,  $i \geq 1$  on a, conditionnellement à  $(\mu(\mathcal{T}^{(i)}(s)), i \geq 1, 0 \leq s \leq t)$  :

- les variables  $(\mathcal{T}^{(i)}(t), \mu^{(i)}(t)), i \geq 1$  sont indépendantes
- pour tout  $i \geq 1$ ,  $(\mathcal{T}^{(i)}(t), \mu^{(i)}(t)) \stackrel{\text{loi}}{=} (\mu(\mathcal{T}^{(i)}(t))^{-\alpha} \mathcal{T}', \mu')$ , où  $(\mathcal{T}', \mu')$  est une copie indépendante de  $(\mathcal{T}, \mu)$ .

On obtient en effet immédiatement le résultat suivant :

**Proposition 1** ([54]). (i) *Le CRT  $(\mathcal{T}_{\alpha,\nu}, \mu_{\alpha,\nu})$  est auto-similaire d'indice  $\alpha$ .*

(ii) *Réciproquement, si  $(\mathcal{T}, \mu)$  est un CRT auto-similaire d'indice  $\alpha < 0$ , il existe une mesure de dislocation  $\nu$  conservatrice telle que  $(\mathcal{T}, \mu)$  ait même loi que  $(\mathcal{T}_{\alpha,\nu}, \mu_{\alpha,\nu})$ .*

Signalons au passage que l'assertion (i) implique que l'intersection entre l'ensemble des arbres de fragmentation et l'ensemble des arbres de Lévy est l'ensemble des arbres de Lévy stables.

Notons également qu'on récupère une version du processus  $\Pi$  à partir de l'arbre  $\mathcal{T}_{\alpha,\nu}$  en piochant un échantillon i.i.d. de feuilles  $(F_i, i \geq 1)$  suivant la mesure  $\mu_{\alpha,\nu}$ , conditionnellement à  $(\mathcal{T}_{\alpha,\nu}, \mu_{\alpha,\nu})$ . En effet, considérons, pour tout  $t \geq 0$ , la partition  $\Pi'(t)$  dont les blocs sont les ensembles d'indices des feuilles  $F_i, i \geq 1$  appartenant à une même composante connexe de  $\{x \in \mathcal{T} : d(x, \rho) > t\}$ . Le processus  $\Pi'$  est alors un processus de fragmentation auto-similaire de même loi que  $\Pi$  et presque sûrement pour tout  $t \geq 0$ , les suites décroissantes des fréquences asymptotiques de  $\Pi'(t)$  et  $\Pi(t)$  sont toutes deux égales à la suite des masses de composantes connexes  $(\mu_{\alpha,\nu}(\mathcal{T}_{\alpha,\nu}^{(i)}(t)), i \geq 1)$ .

**Dimension de Hausdorff.** On utilise la notation  $\dim_{\text{H}}(X)$  pour désigner la dimension de Hausdorff d'un espace métrique  $X$ .

**Théorème 6** ([54]). *Supposons que  $\int_{\mathcal{S}^\downarrow} (s_1^{-1} - 1)\nu(ds) < \infty$ . Alors, presque sûrement,*

$$\dim_{\text{H}}(\mathcal{L}(\mathcal{T}_{\alpha,\nu})) = |\alpha|^{-1}, \quad \dim_{\text{H}}(\mathcal{T}_{\alpha,\nu}) = 1 \vee |\alpha|^{-1}.$$

La condition sur  $\nu$  n'est pas très restrictive et est, par exemple, toujours vérifiée pour les fragmentations dont le nombre moyen de blocs à chaque dislocation est fini. La dimension de Hausdorff de l'arbre se déduit immédiatement de celle de l'ensemble de ses feuilles, puisque l'arbre est l'union de ses feuilles et de son squelette, le squelette ayant une dimension de Hausdorff égale à 1 en tant qu'union dénombrable de segments.

La preuve de la majoration de la dimension de Hausdorff de  $\mathcal{L}(\mathcal{T}_{\alpha,\nu})$  consiste, comme souvent pour ce type de problème, à trouver un bon recouvrement de l'ensemble des feuilles de l'arbre. La minoration est plus complexe et repose sur le lemme de Frostman. Celui-ci nous donne dans un premier temps la minoration voulue lorsque la mesure de dislocation  $\nu$  est finie et telle que  $\nu(s_N > 0) = 0$  pour un entier  $N$ . Pour obtenir la minoration dans le cas général, l'idée consiste à se ramener au cas précédent en considérant des sous-arbres de  $\mathcal{T}_{\alpha,\nu}$  bien choisis, de sorte que les minorants des dimensions de Hausdorff

de leurs ensembles de feuilles, obtenus grâce au lemme de Frostman, convergent vers  $|\alpha|^{-1}$  quand les sous-arbres convergent vers l'arbre entier.

Le théorème ci-dessus nous permet en particulier de calculer la dimension de Hausdorff des arbres de Lévy stables. Ces dimensions ont été calculées parallèlement par Duquesne et Le Gall [32] dans le cadre des arbres de Lévy avec des méthodes propres à ce cadre.

**Corollaire 1** (Duquesne-Le Gall [32], [54]). *Presque sûrement,*

$$\dim_{\text{H}}(\mathcal{T}_{\text{Br}}) = 2, \quad \dim_{\text{H}}(\mathcal{T}_{\beta}) = \frac{\beta}{\beta - 1}, 1 < \beta < 2.$$

**Codage par des fonctions continues.** On a déjà mentionné que les arbres stables se construisent à l'aide d'excursions continues sur  $[0, 1]$  via la procédure rappelée dans la section 1.1.1. Cette construction se généralise aux arbres de fragmentation lorsque la mesure de dislocation  $\nu$  est infinie.

**Théorème 7** ([54]). *Supposons que la mesure de dislocation  $\nu$  est infinie. Alors,*

(i) *il existe une fonction aléatoire  $H_{\alpha, \nu} : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}_+$ , presque sûrement continue, nulle en 0 et 1, strictement positive sur  $(0, 1)$ , telle que  $\mathcal{T}_{\alpha, \nu}$  se construise à partir de  $H_{\alpha, \nu}$  via la procédure rappelée dans la section 1.1.1;*

(ii) *posons*

$$\vartheta_{\text{inf}} := \sup \left\{ b > 0 : \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \varepsilon^b \nu(s_1 < 1 - \varepsilon) = \infty \right\},$$

$$\vartheta_{\text{sup}} := \inf \left\{ b > 0 : \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \varepsilon^b \nu(s_1 < 1 - \varepsilon) = 0 \right\}.$$

*Alors la fonction  $H_{\alpha, \nu}$  est presque sûrement hölderienne d'ordre  $\gamma$  pour tout  $\gamma < \vartheta_{\text{inf}} \wedge |\alpha|$ , et, sous l'hypothèse supplémentaire  $\int_{\mathcal{S}^{\downarrow}} (s_1^{-1} - 1) \nu(ds) < \infty$ , n'est presque sûrement pas hölderienne d'ordre  $\gamma$  pour  $\gamma > \vartheta_{\text{sup}} \wedge |\alpha|$ .*

La construction de la fonction  $H_{\alpha, \nu}$  consiste essentiellement à enrichir les arbres  $\mathcal{R}_n, n \geq 1$  d'une structure d'ordre consistante et à passer à la limite, ce qu'on fait en utilisant à nouveau un résultat d'Aldous [4]. Le majorant  $|\alpha|$  pour l'indice de régularité hölderienne de  $H_{\alpha, \nu}$  vient de la minoration de la dimension de Hausdorff de l'arbre  $\mathcal{T}_{\alpha, \nu}$ , car si  $H_{\alpha, \nu}$  est hölderienne d'indice  $\gamma$ , la dimension de l'arbre  $\mathcal{T}_{\alpha, \nu}$  est alors plus petite que  $1/\gamma$ . Le reste de la preuve est long et technique, nous renvoyons donc à [54] pour en avoir une idée.

Dans le cas des arbres stables on vérifie que  $\nu_{\beta}(s_1 < 1 - \varepsilon) \sim_0 C\varepsilon^{1/\beta-1}$ . On retrouve ainsi le résultat de régularité de Duquesne et Le Gall [31] pour une excursion  $\mathbf{e}$  d'un processus de hauteur stable d'indice  $\beta \in (1, 2]$ , généralisant le cas brownien.

**Corollaire 2** (Duquesne-Le Gall [31]). *Presque sûrement, l'excursion  $\mathbf{e}$  est hölderienne d'ordre  $\gamma$  pour tout  $\gamma < 1 - 1/\beta$  et n'est pas hölderienne d'ordre  $\gamma$  pour  $\gamma > 1 - 1/\beta$ .*

## 2.2 Comportement au voisinage de la racine [52]

Dans cette partie,  $F$  désigne une fragmentation auto-similaire d'indice  $\alpha \in \mathbb{R}$ . On s'intéresse à son comportement en temps petit. A titre indicatif, le comportement en temps grand de ce processus a été étudié dans un premier temps par Bertoin [13] (puis d'autres lorsque  $\alpha = 0$ , voir Berestycki [9], Krell [64]) : pour  $\alpha > 0$ , les masses décroissent typiquement à la vitesse  $t^{-1/\alpha}$ , tandis qu'elles décroissent exponentiellement vite pour  $\alpha = 0$ . Pour  $\alpha < 0$ , le processus s'éteint presque sûrement en temps fini. L'étude de son comportement au voisinage du temps d'extinction est l'objet de la section suivante.

Nous ne faisons pas d'hypothèse ici sur le signe de l'indice  $\alpha$ , mais nous verrons plus loin que les résultats les plus intéressants sont obtenus lorsque cet indice est négatif. Dans ce cas, nos résultats se traduiront en termes d'arbres de fragmentation.

Par continuité à droite, on a bien sûr  $F(\varepsilon) \rightarrow (1, 0, \dots)$  p.s. lorsque  $\varepsilon \rightarrow 0$  et on cherche ici à évaluer le comportement en loi des processus  $(1 - F_1(\varepsilon \cdot), F_2(\varepsilon \cdot), F_3(\varepsilon \cdot), \dots)$  lorsque  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Ceci n'a pas d'intérêt lorsque la mesure  $\nu$  est finie, la limite fini-dimensionnelle étant clairement le processus constant égal à  $(0, 0, \dots)$  quelle que soit la renormalisation choisie. Il est donc implicite dans la suite de cette partie que les mesures  $\nu$  considérées sont infinies.

Commençons par un exemple. Aldous [2] montre que l'arbre brownien dont les longueurs sont multipliées par un facteur  $1/\varepsilon$  converge en loi lorsque  $\varepsilon \rightarrow 0$  vers un arbre continu infini composé de la demi-droite  $[0, \infty)$  sur laquelle sont attachés des arbres compacts, distribués comme l'arbre brownien à un changement d'échelle près. Du point de vue de la fragmentation brownienne, son résultat se traduit ainsi :

$$\varepsilon^{-2} (F_2^{\text{Br}}(\varepsilon \cdot), F_3^{\text{Br}}(\varepsilon \cdot) \dots) \rightarrow FI^{\text{Br}}$$

où le processus limite est un processus de fragmentation avec immigration de paramètres  $\alpha = -1/2$ ,  $\nu_{\text{Br}}$ ,  $\mathbf{I}_{\text{Br}}$ . La mesure  $\mathbf{I}_{\text{Br}}$  est une mesure sur  $\ell_1^\downarrow$ , l'ensemble des suites décroissantes positives et sommables, définie par :

$$\mathbf{I}_{\text{Br}}(s_1 \in dx) = (2\pi x^3)^{-1/2} dx, \quad x > 0, \quad \text{et} \quad \mathbf{I}_{\text{Br}}(s_2 > 0) = 0.$$

De façon générale, les processus de fragmentation avec immigration sont à valeurs dans  $\ell_1^\downarrow$  et conduits par trois paramètres :  $\alpha \in \mathbb{R}$ , une mesure de dislocation  $\nu$  et une mesure  $\mathbf{I}$  à valeurs dans  $\ell_1^\downarrow$ . Informellement, des masses immigrer suivant un processus de Poisson ponctuel d'intensité  $\mathbf{I}$ , et commencent alors à se fragmenter de façon indépendante suivant une fragmentation de dynamique  $(\alpha, \nu)$ .

**Définition 7.** Soit  $\mathbf{I}$  une mesure sur  $\ell_1^\downarrow$  telle que

$$\int_{\ell_1^\downarrow} \left( \sum_{i \geq 1} s_i \wedge 1 \right) \mathbf{I}(ds) < \infty, \quad (2.1)$$

et  $((r_i, \mathbf{u}^i), i \geq 1)$  un processus de Poisson ponctuel d'intensité  $\mathbf{I}$ . Indépendamment de ce processus d'immigration, on considère  $F^{i,j}, i, j \geq 1$ , des fragmentations i.i.d. de paramètres  $\alpha, \nu$ . On vérifie que presque sûrement, pour chaque  $t$ , la suite de masses  $(u_j^i F_k^{i,j} ((u_j^i)^\alpha (t - r_i)), i, j, k \geq 1 : r_i \leq t)$  est sommable et on note  $FI(t) \in \ell_1^\downarrow$  son réarrangement décroissant. Le processus  $FI$  est appelé processus de fragmentation avec immigration de paramètres  $\alpha, \nu, \mathbf{I}$ .

**Remarque.** On inclut dans cette définition les processus d'immigration pure, où  $\nu$  est la mesure nulle.

On notera pour toute mesure  $\mathbf{I}$  vérifiant (2.1)

$$\sigma_{\mathbf{I}}(t) = \sum_{r_i \leq t} \sum_{j \geq 1} u_j^i, t \geq 0$$

le subordonateur décrivant la masse totale de particules ayant immigrées jusqu'au temps  $t$ . On vérifie facilement que sous l'hypothèse d'intégrabilité imposée à  $\mathbf{I}$ ,  $\sigma_{\mathbf{I}}(t) < \infty$  p.s. pour tout  $t$ . Pour énoncer nos résultats, on a également besoin de construire pour tout  $\varepsilon \in (0, 1)$ , une mesure  $\nu_\varepsilon$  sur  $\ell_1^\downarrow$  définie à partir de la mesure  $\nu$  par :

$$\int_{\ell_1^\downarrow} f(\mathbf{s}) \nu_\varepsilon(d\mathbf{s}) = \int_{\mathcal{S}^\downarrow} f(s_2 \varepsilon^{-1}, s_3 \varepsilon^{-1}, \dots) \nu(d\mathbf{s}),$$

$f$  étant une fonction test, et

$$\varphi_\nu(\varepsilon) := \inf\{x > 1 : \nu(s_1 < 1 - x^{-1}) > \varepsilon^{-1}\}.$$

Notons, par exemple, que si  $\nu(s_1 < 1 - \varepsilon) \sim_0 \varepsilon^{-\gamma}$ , alors  $\varphi_\nu(\varepsilon) \sim_0 \varepsilon^{-1/\gamma}$ .

Enfin, on munit l'espace  $\ell_1^\downarrow$  de la distance

$$d_{\ell_1^\downarrow}(\mathbf{s}, \mathbf{s}') \mapsto \sum_{i \geq 1} |s_i - s'_i|$$

et l'ensemble des mesures sur  $\ell_1^\downarrow$  vérifiant (2.1) de la distance

$$(\mathbf{I}, \mathbf{J}) \mapsto \sup_f \left| \int_{\ell_1^\downarrow} f(\mathbf{s})(\mathbf{I} - \mathbf{J})(d\mathbf{s}) \right|$$

le supremum étant pris sur l'ensemble des fonctions  $f : \ell_1^\downarrow \rightarrow \mathbb{R}$  continues, bornées en valeur absolue par la fonction  $\mathbf{s} \mapsto \sum_{i \geq 1} s_i \wedge 1$  (on identifie les mesures dont la différence ne charge que  $(0, \dots)$ ).

**Théorème 8** ([52]). *Supposons qu'il existe une mesure  $\mathbf{I}$  non nulle vérifiant (2.1) telle que*

$$\frac{\nu_\varepsilon}{\nu(s_1 < 1 - \varepsilon)} \rightarrow \mathbf{I} \quad \text{et} \quad \varepsilon^{-\alpha} \nu(s_1 < 1 - \varepsilon) \rightarrow \ell \in [0, \infty], \quad \text{quand } \varepsilon \rightarrow 0.$$

Alors,

$$\varphi_\nu(\varepsilon) (1 - F_1(\varepsilon \cdot), (F_2(\varepsilon \cdot), F_3(\varepsilon \cdot), \dots)) \xrightarrow{\text{loi}} (\sigma_{\mathbf{I}}, FI)$$

où le processus limite  $FI$  est :

- un processus de fragmentation avec immigration de paramètres  $(\alpha, \ell^{-1}\nu, \mathbf{I})$  lorsque  $\ell \in (0, \infty)$ ,
- un processus d'immigration pure codée par la mesure  $\mathbf{I}$  lorsque  $\ell = \infty$
- le processus constant nul lorsque  $\ell = 0$ .

La convergence a lieu pour la topologie de Skorokhod lorsque  $\ell > 0$  et au sens fini-dimensionnel lorsque  $\ell = 0$ .

Lorsque  $\ell = 0$ , le subordonateur  $\sigma_I$  n'est pas trivial, bien que le processus  $FI$  soit constant, égal à 0. Ceci s'interprète ainsi : les particules immigreront suivant la mesure  $I$  et se fragmentent alors à un taux infini. Elles sont donc immédiatement réduites à l'état de poussière.

Notons par ailleurs que les processus apparaissant à la limite dans le théorème ci-dessus sont nécessairement auto-similaires, et que pour les indices  $\alpha$  négatifs, ce théorème nous donne le comportement de la masse totale de poussière au voisinage de 0.

Il n'y a en fait que les cas où  $\varepsilon \mapsto \nu(s_1 < 1 - \varepsilon) \sim_0 C\varepsilon^{-\gamma}$ , avec  $\gamma \in (0, 1)$  et  $C > 0$ , où l'on peut avoir à la limite un processus de fragmentation avec immigration non-trivial et ceci arrive alors pour un unique indice d'auto-similarité :  $\alpha = -\gamma$ . Pour ce type de paramètres, on obtient une version "arbres" du théorème ci-dessus, qui stipule que l'arbre de fragmentation de paramètres  $\alpha, \nu$  dont les longueurs ont été multipliées par  $\varepsilon^\alpha$  et la mesure sur les feuilles par  $\varepsilon^{-1}$ , converge, sous l'hypothèse  $\nu_\varepsilon/\nu(s_1 < 1 - \varepsilon) \rightarrow \mathbf{I}$ , vers un arbre de fragmentation avec immigration, c'est-à-dire un arbre composé de la demi-droite  $[0, \infty)$  sur laquelle sont greffés des arbres compacts distribués comme l'arbre de fragmentation initial à un changement d'échelle près. On renvoie au théorème 17 du papier [52] pour un énoncé rigoureux.

Typiquement, ce théorème va s'appliquer aux fragmentations stables d'indice négatif  $F^{\beta-}$ . On retrouve ainsi le résultat de convergence de la fragmentation brownienne évoqué plus haut. Dans les cas non-browniens,  $1 < \beta < 2$ , on vérifie que  $\varepsilon^{1-1/\beta} \nu_{\beta, \varepsilon} \rightarrow \mathbf{I}_\beta$ , avec

$$\int_{\ell_1^\downarrow} f(\mathbf{s}) \mathbf{I}_\beta(d\mathbf{s}) = \beta(\beta - 1)(\Gamma(2 - \beta))^{-1} \int_0^\infty \mathbb{E} \left[ f \left( x^\beta \left( \Delta_1^{1/\beta}, \Delta_2^{1/\beta}, \dots \right) \right) \right] x^{-\beta} dx$$



pour toute fonction mesurable  $f : l_1^\downarrow \rightarrow \mathbb{R}_+$ , où  $(\Delta_1^{1/\beta}, \Delta_2^{1/\beta}, \dots)$  est la suite décroissante des tailles des sauts avant le temps 1 d'un subordonateur stable  $T^{1/\beta}$  d'exposant de Laplace  $q \in \mathbb{R}_+ \mapsto q^{1/\beta}$ . On en déduit que le processus  $F^{\beta-}(\varepsilon \cdot)$  multiplié par  $\varepsilon^{\beta/(1-\beta)}$  converge, au sens mentionné ci-dessus, vers un processus de fragmentation avec immigration de paramètres  $(1/\beta - 1, \nu_\beta, \mathbf{I}_\beta)$ . Et similairement pour les arbres. L'arbre limite est alors l'arbre généalogique d'un processus de branchement avec immigration à espace d'état continu, de mécanisme de branchement  $u^\beta$  et de mécanisme d'immigration  $\beta u^{\beta-1}$ . Ce résultat est très proche d'un résultat de Duquesne [30] (établi dans le cadre des arbres de Lévy) sur la convergence des processus de hauteur des arbres stables normalisés vers des processus de hauteur codant des processus de branchement stables avec immigration. On peut déduire de ceci et d'un théorème de Ray-Knight pour les processus de branchement avec immigration montré par Lambert [65], le comportement de la masse de poussière  $M_{\text{Pouss}}^{\beta-}(t) = 1 - \sum_{i \geq 1} F_i^{\beta-}(t)$  au voisinage de 0 :

$$\varepsilon^{\beta/(1-\beta)} \left( M_{\text{Pouss}}^{\beta-}(\varepsilon t), t \geq 0 \right) \xrightarrow{\text{loi}} \left( \int_0^t L^\beta(u) du, t \geq 0 \right),$$

où  $L^\beta$  est le processus de branchement avec immigration cité ci-dessus.

Revenons au théorème 8. On a immédiatement le corollaire suivant lorsque la mesure  $\nu$  est binaire.

**Corollaire 3** ([52]). *Si la mesure  $\nu$  est binaire, si  $\varphi_\nu(\varepsilon) = \varepsilon^{-1/\gamma} \ell(\varepsilon)$  pour une fonction  $\ell$  à variation lente en 0 et un réel  $\gamma \in (0, 1)$ , et si  $\alpha > -\gamma$ , alors*

$$\varphi_\nu(\varepsilon) (1 - F_1(\varepsilon \cdot), (F_2(\varepsilon \cdot), F_3(\varepsilon \cdot), \dots)) \xrightarrow{\text{loi}} (\sigma^\gamma, \Delta_1^\gamma, \Delta_2^\gamma, \dots),$$

où  $\sigma^\gamma$  est un subordonateur stable d'exposant de Laplace  $q \in \mathbb{R}_+ \mapsto \Gamma(1 - \gamma)q^\gamma$  et  $(\Delta_1^\gamma(t), \Delta_2^\gamma(t), \dots)$  la suite décroissante de ses sauts jusqu'au temps  $t$ .

On retrouve ainsi un résultat d'Aldous et Pitman [6] pour leur fragmentation  $F^{\text{AP}}$  (de paramètres  $\alpha = 1/2, \nu_{\text{Br}}$ ). Plus généralement, le théorème 8 s'applique aussi aux fragmentations stables d'indice positif  $F^{\beta+}$ . Pour  $1 < \beta < 2$ , soit  $\varrho^{\beta-1}$  un subordonateur stable d'exposant de Laplace  $q \in \mathbb{R}_+ \mapsto \beta q^{\beta-1}$ , indépendant du subordonateur  $T^{1/\beta}$  introduit ci-dessus. Alors, en notant  $(\Delta_1^{1/\beta}(t), \Delta_2^{1/\beta}(t), \dots)$  la suite décroissante des sauts de  $T^{1/\beta}$  jusqu'au temps  $t$ ,

$$\varepsilon^{\beta/(1-\beta)} \left( 1 - F_1^{\beta+}(\varepsilon \cdot), (F_2^{\beta+}(\varepsilon \cdot), F_3^{\beta+}(\varepsilon \cdot), \dots) \right) \xrightarrow{\text{loi}} \left( T_{\varrho^{\beta-1}(\cdot)}^{1/\beta}, \left( \Delta_1^{1/\beta}(\varrho^{\beta-1}(\cdot)), \Delta_2^{1/\beta}(\varrho^{\beta-1}(\cdot)), \dots \right) \right).$$

On complète ainsi un résultat de Miermont [75], qui montre cette convergence au sens 1-dimensionnel.

Terminons cette section en donnant une idée de la preuve du théorème 8. Il faut pour cela considérer la construction à l'aide d'un processus ponctuel de Poisson de la fragmentation et "voir" la fragmentation comme la demi-droite  $[0, \infty)$  sur laquelle sont greffés des processus de fragmentation de même loi, normalisés. Considérons pour cela le processus décroissant du *plus gros sous-fragment*, partant de la masse initiale égale à 1 et obtenu ensuite en ne gardant à chaque dislocation que le plus gros sous-fragment du fragment considéré jusque là (notons que ce processus est différent du processus  $F_1$  du plus gros fragment de la fragmentation; cela dit ils coïncident dans un voisinage de 0). À chaque temps de saut  $t$  de ce processus, on considère les masses des sous-fragments obtenus autres que celle du plus gros sous-fragment, et on greffe alors au point  $t$  sur la demi-droite  $[0, \infty)$ , des processus de fragmentation indépendants (conditionnellement à leurs masses initiales) décrivant l'évolution de chacune de ces masses. Correctement normalisé, et sous les hypothèses du théorème 8, ce schéma va ensuite "converger" vers une demi-droite sur laquelle sont greffés des processus de fragmentation, modélisant un processus de fragmentation avec immigration.

Les travaux résumés dans cette section ont été exposés dans un cadre plus général dans le papier [52] : celui des fragmentations de saut pur non-nécessairement auto-similaires où les particules de masse

$m$  se fragmentent au taux  $\tau(m)\nu(ds)$ , pour une fonction  $\tau$  à valeurs positives fixée. Dans ce cadre, les résultats décrivent le comportement de fragmentations issues d'une masse initiale convergeant vers l'infini, ce qui revient à regarder le comportement de la fragmentation issue d'une masse 1 au voisinage de 0 dans les cas auto-similaires où la fonction  $\tau$  est une puissance.

## 2.3 Comportement au voisinage de la feuille la plus éloignée de la racine : cas des fragmentations stables [46]

Dans cette partie, l'indice d'auto-similarité  $\alpha$  est strictement négatif. Dans le paragraphe précédent, on regardait le comportement d'un arbre de fragmentation au voisinage de sa racine. Il s'agit à présent de faire un zoom sur le voisinage de la feuille la plus éloignée de la racine. Considérons une fragmentation  $F$  associée et  $\zeta$  son temps d'extinction. Intuitivement, l'auto-similarité du processus peut laisser penser que la bonne façon de normaliser la suite  $F((\zeta - \varepsilon)^+)$  est de la multiplier par  $\varepsilon^{1/\alpha}$  pour obtenir une limite non-triviale lorsque  $\varepsilon \rightarrow 0$ , dans le sens

$$\varepsilon^{1/\alpha} F((\zeta - \varepsilon)^+) \xrightarrow{\text{loi}} F_\infty \quad (2.2)$$

où la limite est une suite décroissante positive de somme finie, i.e. appartenant à l'espace  $(\ell_1^+, d_{\ell_1^+})$ . On a vu cependant dans la partie précédente que la normalisation en  $\varepsilon^{1/\alpha}$  n'est pas toujours la bonne pour observer la fragmentation près de 0 et il se peut que la "conjecture" (2.2) ne soit pas toujours vérifiée. Plusieurs éléments nous laissent penser qu'elle doit quand même être vraie dans un cadre assez général.

On a montré proprement, pour l'instant, la convergence (2.2) pour les fragmentations stables, dans le travail [46] avec Christina Goldschmidt. On y montre en fait un résultat plus général, en étudiant l'excursion normalisée d'un processus de hauteur stable au voisinage de son maximum. Soit donc  $\beta \in (1, 2]$  et  $\mathbf{e}$  une excursion normalisée du processus de hauteur stable d'indice  $\beta$ . Presque sûrement, elle atteint son maximum,  $\zeta$ , en un unique point de  $[0, 1]$ , noté  $x_\star$ . On prolonge cette excursion comme fonction sur  $\mathbb{R}$ , en posant  $\mathbf{e}(x) = 0$  pour  $x \notin [0, 1]$ . On rappelle que l'indice d'auto-similarité de la fragmentation  $F^{\beta-}$  associée est égal à  $1/\beta - 1$ .

La topologie considérée sur l'ensemble des fonctions continues sur  $\mathbb{R}$  est celle de la convergence uniforme sur les compacts. Celle sur les ouverts bornés de  $\mathbb{R}$  est celle associée à la distance

$$d_{\mathcal{O}}(A, B) = \sum_{k \in \mathbb{N}} 2^{-k} d_{\mathbb{R}, \mathcal{H}} \left( (A \cap (-k, k))^c \cap [-k, k], (B \cap (-k, k))^c \cap [-k, k] \right),$$

$d_{\mathbb{R}, \mathcal{H}}$  étant la distance de Hausdorff usuelle sur les compacts de  $\mathbb{R}$  et  $E^c$  le complémentaire dans  $\mathbb{R}$  d'un ensemble de réels  $E$ .

**Théorème 9** ([46]). *Il existe un processus  $H_\infty$  défini sur  $\mathbb{R}$ ,*

- *presque sûrement continu, convergeant vers l'infini quand  $x \rightarrow +\infty$  ou  $x \rightarrow -\infty$ , prenant la valeur 0 en 0, strictement positif ailleurs,*
- *auto-similaire :  $m^{1/\beta-1} H_\infty(m \cdot)$  a même loi que  $H_\infty$  pour tout  $m > 0$*
- *symétrique en loi :  $(H_\infty(x), x \geq 0)$  a même loi que  $(H_\infty(-x), x \geq 0)$ ,*

*tel que :*

(i)

$$\varepsilon^{-1} \left( \zeta - \mathbf{e}(x_\star + \varepsilon^{\beta/(\beta-1)}) \right) \xrightarrow{\text{loi}} H_\infty, \quad \varepsilon \rightarrow 0$$

(ii) *si  $O(t) = \{x \in \mathbb{R} : \mathbf{e}(x) > t\}$ ,  $t \geq 0$ ,*

$$\varepsilon^{\beta/(1-\beta)} \left( O((\zeta - \varepsilon)^+) - x_\star \right) \xrightarrow{\text{loi}} \{x \in \mathbb{R} : H_\infty(x) < 1\}, \quad \varepsilon \rightarrow 0$$

(iii)  $F_\infty$  étant la suite décroissante des longueurs des composantes connexes de l'ouvert  $\{x \in \mathbb{R} : H_\infty(x) < 1\}$ ,

$$\varepsilon^{\beta/(1-\beta)} F^{\beta-}((\zeta - \varepsilon)^+) \xrightarrow{\text{loi}} F_\infty, \quad \varepsilon \rightarrow 0.$$

Signalons que dans le cas brownien ( $\beta = 2$ ), une version de ce résultat a été montrée parallèlement par Uribe Bravo [83].

Très informellement, le processus  $H_\infty$  apparaissant dans le théorème 9 est une excursion du processus de hauteur de longueur infinie, centrée à son “maximum” et retournée de sorte que ce maximum, qui est devenu un minimum, vaille 0 et soit atteint en 0. Voir dessin ci-dessous.

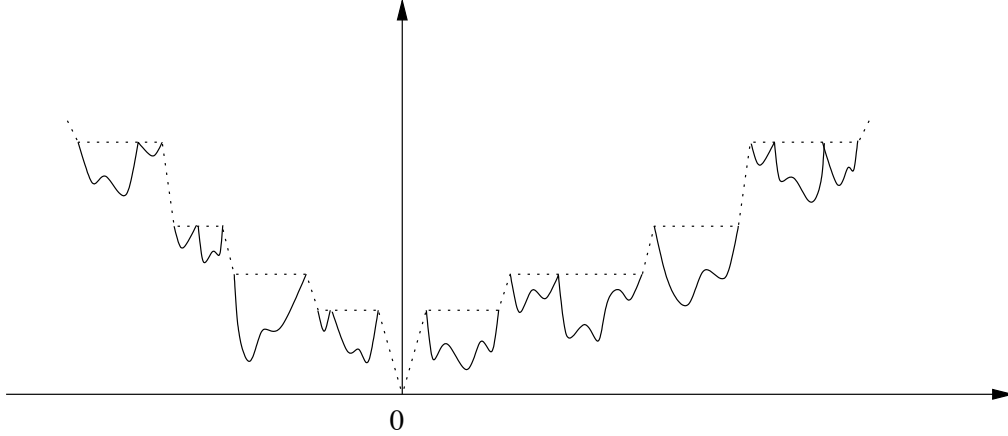


FIGURE 2.2 – Dessin schématique de  $H_\infty$  : on colle, sous le supremum dessiné en pointillé, des excursions inversées du processus de hauteur, conditionnées à ne pas descendre en-dessous de 0.

On renvoie à [46] pour une construction du processus  $H_\infty$  à l’aide de mesures de Poisson. Celle-ci, ainsi que la preuve du théorème ci-dessus repose sur la décomposition de Williams de l’excursion stable établie par Abraham et Delmas [1], généralisant la décomposition de Williams de l’excursion brownienne [81]. Dans le cas brownien,

$$H_\infty(x) = R_+(x)\mathbf{1}_{\{x \geq 0\}} + R_-(x)\mathbf{1}_{\{x < 0\}},$$

où  $R_+, R_-$  sont deux processus de Bessel de dimension 3 indépendants. On remarque alors que le comportement au voisinage du temps d’extinction de la fragmentation est relié à celui de son comportement au voisinage de 0 : le processus de fragmentation avec immigration  $FI^{\text{Br}}$  mentionné dans la partie précédente se construit en effet à partir du processus  $H_\infty$ , en considérant pour tout temps  $t \geq 0$ , les longueurs des composantes connexes bornées de l’ensemble des réels  $x$  tels que  $H_\infty(x) > t$ . Cette corrélation semble spécifique au cas brownien.

Revenons au cadre plus général des fragmentations stables et notons que l’assertion (i) du théorème 9 n’implique pas directement l’assertion (ii). Il est facile de trouver des exemples de fonctions convergent pour la topologie de la convergence uniforme sur les compacts, mais dont les ouverts associés au sens de (ii) ne convergent pas pour la distance  $d_{\mathcal{O}}$ . Cependant ici, avec probabilité 1, 1 n’est pas un maximum local de  $H_\infty$  et la mesure de Lebesgue de l’ensemble des réels  $x$  tels que  $H_\infty(x) = 1$  est nulle, ce qui va nous permettre de déduire la deuxième assertion de la première. Les assertions (i) et (ii) n’impliquent pas non plus directement l’assertion (iii). Pour obtenir cette troisième assertion, on doit vérifier un résultat d’uniformité, à savoir que pour tout  $\eta > 0$ , il existe un réel  $K > 0$  tel que la probabilité que l’ouvert  $\varepsilon^{\beta/(1-\beta)} (\mathcal{O}((\zeta - \varepsilon)^+) - x_\star)$  intersecte  $(-\infty, -K] \cup [K, \infty)$  est inférieure à  $\eta$  pour tout  $\varepsilon$  assez petit.

Un corollaire intéressant du théorème 9 concerne le *processus du dernier fragment* : on note  $F_\star^{\beta-}(t)$  la masse du fragment au temps  $t$  qui s'éteindra au temps  $\zeta$ , autrement dit, la longueur de la composante connexe de  $\{x : \mathbf{e}(x) > t\}$  contenant  $x_\star$ ,  $t \geq 0$ , avec  $F_\star^{\beta-}(t) = 0$  si  $t \geq \zeta$ .

**Corollaire 4** ([46]). *Lorsque  $\varepsilon \rightarrow 0$ ,*

$$\varepsilon \left( F_\star^{\beta-}(\zeta - \varepsilon)^+ \right)^{1/\beta-1} \xrightarrow{\text{loi}} \zeta_\star$$

où  $\zeta_\star$  est une version biaisée de  $\zeta$ , au sens  $\mathbb{P}(\zeta_\star \leq x) = \mathbb{E}[\zeta^{1/(\beta-1)}; \zeta \leq x] / \mathbb{E}[\zeta^{1/(\beta-1)}]$ ,  $x \geq 0$ .

La limite  $\zeta_\star$  est en fait distribuée comme la longueur à la puissance  $1/\beta - 1$  d'une excursion du processus de hauteur stable d'indice  $\beta$  conditionnée à avoir un maximum égal à 1. Dans le cas brownien, on peut préciser la distribution de cette limite, grâce à un résultat de Biane, Pitman et Yor [17] :  $\zeta_\star$  a alors même loi que  $\pi/(2\zeta)$ , la loi de  $\zeta$  étant par ailleurs connue (voir Kennedy [61]).

Pour terminer, soulignons qu'on obtient aussi des convergences presque sûres pour les logarithmes des masses du plus gros fragment  $F_1$  et du dernier fragment  $F_\star$ , ces convergences ayant lieu pour un ensemble de fragmentations assez générales, incluant les fragmentations stables :

$$\frac{\log F_1((\zeta - \varepsilon)^+)}{\log(\varepsilon)} \xrightarrow{\text{p.s.}} -1/\alpha, \quad \frac{\log F_\star((\zeta - \varepsilon)^+)}{\log(\varepsilon)} \xrightarrow{\text{p.s.}} -1/\alpha.$$

## 2.4 Décompositions spinales et invariance par changement de racine uniforme [58]

Partant d'un arbre de fragmentation  $(\mathcal{T}_{\alpha,\nu}, \mu_{\alpha,\nu})$  et conditionnellement à cet arbre, on considère  $(L_i, i \geq 1)$  un échantillon i.i.d. de feuilles de loi  $\mu_{\alpha,\nu}$ . On note  $\Pi$  la fragmentation à valeurs partitions associée : les blocs de  $\Pi(t)$  sont formés des indices des feuilles appartenant à une même composante connexe de  $\{x \in \mathcal{T}_{\alpha,\nu} : d(x, \rho) > t\}$ . On note ensuite  $\mathcal{R}_n$  le sous-arbre de  $\mathcal{T}_{\alpha,\nu}$  à  $n$  feuilles engendré par les feuilles  $L_1, \dots, L_n$  et la racine. Autrement dit,  $\mathcal{R}_n$  est l'arbre généalogique de la fragmentation  $\Pi$  restreinte aux  $n$  premiers entiers. Enfin  $T_n$  désigne l'arbre combinatoire associé obtenu en oubliant les longueurs sur les arêtes de  $\mathcal{R}_n$ . On rappelle que la loi de la suite  $(T_n, n \geq 1)$  est indépendante du paramètre d'auto-similarité de la fragmentation.

On appelle *épine dorsale* de l'arbre  $T_n$  le chemin reliant la racine à la feuille  $L_1$ . De façon analogue, on appelle *épine dorsale* de l'arbre continu de fragmentation le chemin reliant la racine à la feuille  $L_1$ . Dans une première partie, on va étudier des décompositions de ces arbres le long de leur épine dorsale. Ceci nous apportera en particulier certaines informations sur les arbres stables. Dans une deuxième partie, on utilisera ces décompositions spinales pour caractériser les arbres de fragmentation dont la loi est invariante par changement de racine uniforme. Les résultats exposés dans cette section font partie d'un travail en collaboration avec Jim Pitman et Matthias Winkel [58].

### 2.4.1 Décompositions spinales

On va considérer deux types de décompositions de l'arbre  $T_n$  le long de son épine dorsale.

**Décomposition grossière.** On appelle *partition spinale grossière* la partition de  $\{2, \dots, n\}$  obtenue en enlevant chaque arête composant l'épine dorsale de  $T_n$  et en considérant alors les blocs composés des indices des feuilles des différentes composantes connexes (exceptée la feuille  $L_1$ ). On appelle *composition spinale grossière* la version ordonnée de cette partition, l'ordre des blocs étant celui de leur emplacement le long de l'épine dorsale, le premier étant le plus proche de la racine.

**Décomposition fine.** La *partition spinale fine* de  $\{2, \dots, n\}$  est obtenue de façon similaire en enlevant les arêtes composant l'épine dorsale, ainsi que les arêtes connectées à cette épine dorsale.

La partition fine est donc emboîtée dans la partition grossière et, presque sûrement, ces deux partitions sont identiques pour tout  $n$  si et seulement si la fragmentation est binaire.

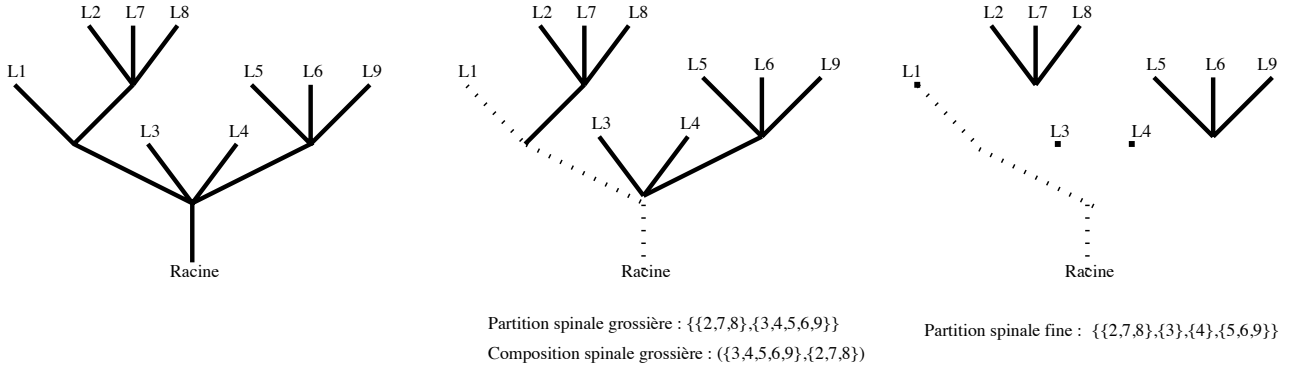


FIGURE 2.3 – Décompositions spinales de l'arbre  $T_9$ .

Par construction, ces partitions spinales s'étendent à des partitions de  $\mathbb{N} \setminus \{1\}$ , qui sont conjointement échangeables, et ont donc des fréquences asymptotiques presque sûrement. Ces fréquences correspondent aux masses des sous-arbres se greffant sur l'épine dorsale de l'arbre  $\mathcal{T}_{\alpha,\nu}$ . On les appellera respectivement *partitions de masse grossière et fine*. Là encore, il existe une version ordonnée de la partition de masse grossière suivant l'ordre spinal, qu'on appellera *composition de masse grossière*. Celle-ci correspond donc aux longueurs ordonnées des composantes connexes de l'ouvert complémentaire de  $\{1 - \exp(-\xi_t), t \geq 0\}$ ,  $\xi$  étant le subordonateur intervenant dans la construction du fragment marqué, qui est ici celui correspondant à l'évolution du bloc contenant 1 dans la fragmentation  $\Pi$ .

A partir de la famille de compositions spinales grossières, on peut récupérer la fermeture de l'image du processus  $1 - \exp(-\xi)$  : si on note  $S_{n,k}$  le cardinal total des  $k$  premiers blocs de la composition spinale grossière de  $\{2, \dots, n\}$ , on a, d'après Gneden et Pitman [43],

$$\{S_{n,k}/n, k \geq 1\} \xrightarrow{\text{P.S.}} \overline{\{1 - \exp(-\xi_t), t \geq 0\}},$$

la convergence ayant lieu au sens de la distance de Hausdorff sur les compacts de  $[0, 1]$ . De ceci, et du fait que la trajectoire de  $\xi$  peut se construire à partir de son image lorsque sa mesure de Lévy est infinie et connue, on déduit le résultat suivant :

**Proposition 2** ([58]). *Supposons que la mesure  $\nu$  est infinie. Alors, connaissant le paramètre  $\alpha$ , sur un ensemble de probabilité 1, la fragmentation  $\Pi$  et l'arbre  $\mathcal{T}_{\alpha,\nu}$  se reconstruisent à partir de la famille d'arbres combinatoires  $(T_n, n \geq 1)$ .*

**Remarque.** Cette propriété est plus généralement valable pour toute fragmentation auto-similaire  $\Pi'$  (pas nécessairement construite à partir d'un arbre et sans restriction sur l'indice d'auto-similarité) : connaissant ses paramètres, si sa mesure de dislocation est infinie, on peut la reconstruire à partir de la famille d'arbres combinatoires associée.

Si on note  $B_{n,1}, \dots, B_{n,K_n}$  les blocs de la partition spinale grossière, on peut calculer explicitement son EPPF (de l'anglais "exchangeable partition probability function"), à savoir, pour tous  $k \geq 1, n \geq 2$  et pour toute composition  $(n_1, \dots, n_k)$  de  $n - 1$ ,

$$p(n_1, \dots, n_k) = \mathbb{P}(\{B_{n,1}, \dots, B_{n,K_n}\} = \pi), \forall \pi \text{ partition de } \{2, \dots, n\} \text{ en blocs de tailles } n_1, \dots, n_k.$$

On renvoie à [58] pour des formules explicites en fonction de  $\nu$ .

Nous n'avons pas réussi à calculer les quantités analogues pour la partition spinale fine dans un cadre général. En ajoutant des conditions sur la mesure  $\nu$ , on va quand même pouvoir décrire la loi de cette partition fine à partir de celle de la partition grossière. Notons  $\mathbb{P}_\nu$  la mesure mélange sur les partitions de  $\mathbb{N}$  (qui n'est une probabilité que si  $\nu$  l'est) :

$$\mathbb{P}_\nu(\cdot) = \int_{\mathcal{S}^\downarrow} \mathbb{P}_s(\cdot) \nu(ds),$$

où  $\mathbb{P}_s$  est la loi d'une partition échangeable de fréquences asymptotiques ordonnées  $s$ . Introduisons alors, par analogie avec les EPPFs ci-dessus, les fonctions

$$p_\nu(n_1, \dots, n_k) = \mathbb{P}_\nu(\{\pi' \in \mathcal{P}_\mathbb{N} : \pi'_n = \pi\}), \forall \pi \text{ partition de } \{1, \dots, n\} \text{ en } k \text{ blocs de tailles } n_1, \dots, n_k,$$

définies pour toute composition  $(n_1, \dots, n_k)$  de  $n$ . La notation  $\pi'_n$  désigne ici la restriction de la partition  $\pi'$  à  $\{1, \dots, n\}$ . Il est facile de voir que ces quantités sont finies dès que  $k \geq 2$ , puisque  $\nu$  intègre la fonction  $s \mapsto 1 - s_1$ . On montre de plus que pour toute composition  $(n_1, \dots, n_k)$  de  $n$  telle que  $k \geq 2$ ,

$$p_\nu(n_1, \dots, n_k) = g(n, n_1) p_{\hat{\nu}(n, n_1)}(n_2, \dots, n_k)$$

pour une certaine fonction  $g$  et des mesures de probabilité  $\hat{\nu}(n, n_1)$  sur  $\mathcal{S}^\downarrow$  indexées par  $(n, n_1)$ . On dira dans la suite que la mesure  $\nu$  admet une probabilité  $\hat{\nu}$  sur  $\mathcal{S}^\downarrow$  comme *facteur* si  $\hat{\nu}(n, n_1) = \hat{\nu}$  pour tous les entiers  $n, n_1$  tels que  $1 \leq n_1 < n$ .

**Théorème 10** ([58]). *Soit  $\nu$  une mesure de dislocation,  $(T_n, n \geq 1)$  une famille d'arbres combinatoires associée, et  $\hat{\nu}$  une mesure de probabilité sur  $\mathcal{S}^\downarrow$ . Les deux assertions suivantes sont équivalentes :*

- (i)  $\nu$  admet  $\hat{\nu}$  comme facteur
- (ii) la partition de masse fine de  $(T_n, n \geq 1)$  s'obtient à partir de sa partition de masse grossière en fragmentant chaque masse  $m$  de cette partition grossière en masses  $m\mathbf{s}$ ,  $\mathbf{s}$  étant distribuée suivant  $\hat{\nu}$ , et ceci de façon indépendante pour les différentes masses de la partition grossière.

Les mesures de dislocation de type Poisson-Dirichlet font partie des mesures de dislocation admettant un facteur. Elles dépendent de deux paramètres  $a \in (0, 1)$  et  $\theta > -2a$  et se construisent alors à partir des points  $\Delta_1 > \Delta_2 > \dots$  d'une mesure de Poisson sur  $\mathbb{R}_+$  d'intensité  $a(\Gamma(a-1))^{-1}x^{-a-1}dx$  :

$$\int_{\mathcal{S}^\downarrow} f(\mathbf{s}) \text{PD}^*(a, \theta)(d\mathbf{s}) = \mathbb{E} \left[ T^{-\theta} f \left( \frac{\Delta_1}{T}, \frac{\Delta_2}{T}, \dots \right) \right],$$

avec  $T = \sum_{i \geq 1} \Delta_i$ ,  $f$  étant une fonction test. Pour  $\theta = -1$  et  $a = 1/\beta$ , on retrouve, à une constante multiplicative près, la mesure de dislocation de l'arbre stable  $\mathcal{T}_\beta$ ,  $1 < \beta < 2$ . De façon générale, on vérifie que la mesure  $\text{PD}^*(a, \theta)$  est bien une mesure de dislocation et qu'elle est finie si et seulement si  $\theta > -a$ . Lorsque  $\theta > -a$ , cette mesure est simplement la distribution de Poisson-Dirichlet usuelle  $\text{PD}(a, \theta)$ , multipliée par la constante  $\Gamma(1 + \theta/a)/\Gamma(1 + \theta)$ . On rappelle que pour  $a \in (0, 1), \theta > -a$ ,  $\text{PD}(a, \theta)$  est la loi du réarrangement décroissant de la suite

$$X_1, (1 - X_1)X_2, (1 - X_1)(1 - X_2)X_3, \dots$$

où les  $X_i, i \geq 1$  sont des variables indépendantes, de loi Beta( $1 - a, ia + \theta$ ) respectivement. Enfin, on peut montrer que la mesure  $\text{PD}^*(a, \theta)$  admet la distribution  $\text{PD}(a, a + \theta)$  comme facteur, pour tous les paramètres  $a \in (0, 1), \theta > -2a$ .

On en déduit les résultats suivants sur l'arbre stable  $\mathcal{T}_\beta$ ,  $1 < \beta < 2$ , après avoir rappelé que le subordinateur  $\xi$  associé à cet arbre a une mesure de Lévy proportionnelle à

$$(1 - e^{-x})^{1/\beta-2} e^{(1/\beta-1)x} \mathbf{1}_{\{x>0\}} dx \tag{2.3}$$

et qu'il est bien connu que dans ce cas la fermeture de l'image de  $1 - \exp(-\xi)$  est réversible, de même loi que l'ensemble des 0 d'un pont de Bessel de dimension  $2/\beta$ , et que le réarrangement décroissant des longueurs des intervalles de l'ouvert complémentaire suit une loi  $\text{PD}(1 - 1/\beta, 1 - 1/\beta)$ , voir [43, 78].

**Corollaire 5** ([58]). Soit  $(\mathcal{T}_\beta, \mu_\beta)$  un arbre stable d'indice  $\beta \in (1, 2)$ .

- (i) Le réarrangement décroissant de sa partition de masse grossière suit une loi  $\text{PD}(1-1/\beta, 1-1/\beta)$ .
- (ii) Sa partition de masse fine s'obtient à partir de la partition grossière en fragmentant chaque masse de façon indépendante, suivant une loi  $\text{PD}(1/\beta, 1/\beta - 1)$ .
- (iii) Le réarrangement décroissant de sa partition de masse fine suit une loi  $\text{PD}(1/\beta, 1 - 1/\beta)$ .
- (iv) Sa partition de masse grossière s'obtient à partir de la partition de masse fine en coagulant des masses suivant une loi  $\text{PD}(\beta - 1, \beta - 1)$ , suivant la procédure de coagulation définie dans [77].

## 2.4.2 Invariance par changement de racine uniforme

Soit  $(\mathcal{T}, \mu)$  un CRT de racine  $\rho$  et conditionnellement à ce CRT,  $(L_1, L_2, \dots)$  un échantillon i.i.d. de feuilles de loi  $\mu$ . On note  $\mathcal{R}(\mathcal{T}, L_1, L_2, \dots, L_n)$  le sous-arbre de  $\mathcal{T}$ , à  $n$  feuilles, engendré par  $\rho$  et  $L_1, \dots, L_n$ ,  $n \geq 1$ . On note ensuite  $\mathcal{T}^{[L_1]}$  l'arbre  $\mathcal{T}$  ré-enraciné en  $L_1$  et  $\mathcal{R}(\mathcal{T}^{[L_1]}, \rho, L_2, \dots, L_n)$  l'arbre  $\mathcal{R}(\mathcal{T}, L_1, L_2, \dots, L_n)$  ré-enraciné en  $L_1$  également.

**Définition 8.** On dit que (la loi de)  $(\mathcal{T}, \mu)$  est invariante(e) par changement de racine uniforme si pour tout  $n \geq 1$ ,

$$\mathcal{R}(\mathcal{T}, L_1, L_2, \dots, L_n) \stackrel{\text{loi}}{=} \mathcal{R}(\mathcal{T}^{[L_1]}, \rho, L_2, \dots, L_n).$$

Aldous [3] et Duquesne et Le Gall [32, 33] ont montré, respectivement, que l'arbre brownien et les arbres de Lévy en général sont invariants par changement de racine uniforme. Intuitivement, pour l'arbre brownien, cette propriété vient du fait que l'arbre de Galton-Watson de loi de reproduction une loi de Poisson de paramètre 1, conditionné à avoir  $n$  noeuds, vérifie une variante discrète de cette propriété d'invariance par changement de racine uniforme, pour tout  $n \geq 1$ . Cette propriété passe alors à la limite et est donc valable pour l'arbre brownien.

Nous montrons ici que les seuls arbres de fragmentation à être invariants par changement de racine uniforme sont les arbres stables, à un changement d'échelle près.

**Théorème 11.** (i) (Aldous [3], Duquesne-Le Gall [32, 33]) *L'arbre stable  $(\mathcal{T}_\beta, \mu_\beta)$  est invariant par changement de racine uniforme pour tout  $\beta \in (1, 2]$ .*

(ii) ([58]) *Si un arbre de fragmentation  $(\mathcal{T}_{\alpha, \nu}, \mu_{\alpha, \nu})$  est invariant par changement de racine uniforme alors il existe  $\beta \in (1, 2]$  tel que  $\nu$  est proportionnelle à  $\nu_\beta$  et  $\alpha = 1/\beta - 1$ .*

L'assertion (ii) repose sur le fait que pour qu'un arbre de fragmentation soit invariant par changement de racine uniforme, il faut que sa composition de masse grossière soit réversible. En utilisant un résultat de Gnedin et Pitman [43] et en jouant un peu avec la mesure de dislocation  $\nu$ , on remarque alors que nécessairement la mesure de Lévy du subordonateur du fragment marqué est proportionnelle à celle associée à un arbre stable, c'est-à-dire de la forme (2.3), pour un  $\beta \in (1, 2]$ . Ceci ne suffit pas a priori à caractériser la mesure de dislocation  $\nu$  (sauf dans les cas binaires). La suite de la preuve consiste à montrer que pour un arbre de fragmentation invariant par changement de racine uniforme, qui doit nécessairement satisfaire certaines propriétés de symétrie, la mesure de dislocation  $\nu$  est caractérisée par la mesure de Lévy du subordonateur associé. Cette mesure  $\nu$  est donc proportionnelle à  $\nu_\beta$ . On obtient ensuite facilement que  $\alpha = 1/\beta - 1$ , en utilisant que les longueurs des trois arêtes de  $\mathcal{R}(\mathcal{T}, L_1, L_2)$  ont même loi.

Notons qu'on peut également proposer avec notre approche une preuve combinatoire de l'assertion (i). Comme on l'a déjà mentionné, pour les arbres stables la composition de masse grossière est réversible. Par ailleurs, la partition de masse fine s'obtient à partir de la partition grossière en la fragmentant de façon indépendante suivant une même loi. Dit autrement, et de façon assez informelle : qu'on la regarde de  $\rho$  vers  $L_1$  ou de  $L_1$  vers  $\rho$ , la collection de lois des masses des arbres greffés sur l'épine dorsale de  $\mathcal{T}_\beta$  est la même. Conditionnellement à leurs tailles, ces sous-arbres sont indépendants de même loi que  $\mathcal{T}_\beta$  à un changement d'échelle près dépendant de leur tailles respectives. D'où l'invariance en loi par changement de racine uniforme.

## 2.5 Remarques et perspectives

Il existe une version de l'arbre stable  $(\mathcal{T}_\beta, \mu_\beta)$  telle que la mesure  $\mu_\beta$  se construise à partir de l'arbre  $\mathcal{T}_\beta$  et plus précisément à partir d'un processus de "mesures de temps local" de l'arbre. Ceci est plus généralement vrai pour les arbres de Lévy (voir [32]). Il est naturel de se demander si cette propriété peut s'étendre aux arbres de fragmentation. Pour aborder cette question, on peut envisager de construire des mesures de temps local comme dans les cas stables, en utilisant l'existence d'un processus de temps local pour la masse totale de la fragmentation. Dans le papier [50], je donne des conditions nécessaires et des conditions suffisantes sur  $\alpha$  et  $\nu$  pour l'existence de ce temps local : pour la plupart des mesures  $\nu$ , il y a aura existence si et seulement si  $\alpha \in (-1, 0)$ . Une question liée est d'essayer d'obtenir une définition d'"arbre auto-similaire" pour des arbres réels compacts non-mesurés (c'est-à-dire que la définition ne dépendrait pas d'une mesure sur l'arbre, mais que de la structure de l'arbre), puis de caractériser les arbres aléatoires vérifiant cette définition.

Par ailleurs, avec Christina Goldschmidt, on a entrepris l'étude du comportement des fragmentations au voisinage de leur point d'extinction dans un cadre beaucoup plus général que celui des fragmentations stables. Le problème est qu'on ne peut pas adapter l'approche utilisée pour les cas stables, car on n'a plus, alors, de théorie des excursions liée à la fragmentation. On pense cependant que la normalisation (2.2) est la bonne, différentes tentatives d'approche vont dans ce sens. Cela dit on n'a obtenu de résultat rigoureux, pour l'instant, que pour les mesures de dislocation finies (outre les cas stables) : on montre alors que le processus du dernier fragment se comporte comme conjecturé au voisinage du point d'extinction.

Enfin, signalons que la décomposition spinale fine des arbres stables du corollaire 5 est un élément-clé d'une démonstration de Croydon et Hambly [25], qui l'utilisent de façon récursive pour obtenir des propriétés spectrales de la forme de Dirichlet naturelle sur les arbres stables.



## Chapitre 3

# Limites d'échelle de chaînes de Markov décroissantes [55]

Dans ce chapitre, nous nous intéressons au comportement de chaînes de Markov décroissantes à valeurs entières positives (chaînes de “mort pure”) issues de  $n$  lorsque  $n \rightarrow \infty$ . L'hypothèse principale sous laquelle nous travaillons est que les sauts macroscopiques, c'est-à-dire de taille supérieure à  $n\varepsilon$  pour un  $\varepsilon > 0$  fixé, arrivent asymptotiquement avec une probabilité de l'ordre de  $n^{-\gamma}$ ,  $\gamma > 0$ . Cette hypothèse, on le verra, est satisfaite par un ensemble assez diversifié d'exemples, incluant des marches aléatoires avec barrière, des  $\Lambda$ -coalescents, des compositions régénératrices non nécessairement consistantes. Une application majeure de notre résultat, développée dans le chapitre suivant, concerne les limites d'échelle de famille d'arbres satisfaisant une certaine propriété de Markov branchante. La chaîne de Markov décroissante correspondante intervient alors dans l'étude de la suite des tailles des sous-arbres contenant une feuille marquée, lorsqu'on remonte dans l'arbre le long du chemin reliant la racine à la feuille marquée.

### 3.1 Limites d'échelle

Soit  $(X_n(k), k \in \mathbb{Z}_+)$  une chaîne de Markov décroissante à valeurs dans  $\mathbb{Z}_+$  issue de  $X_n(0) = n$ . A partir de ses probabilités de transition  $p_{n,k}, 0 \leq k \leq n$ , on définit une probabilité sur  $[0, 1]$  par

$$p_n^*(dx) = \sum_{k=0}^n p_{n,k} \delta_{k/n}(dx),$$

loi de la variable  $X_n(1)/n$ . Notre hypothèse principale est la suivante :

**(H1)** il existe,

- une suite  $(a_n, n \geq 1)$  où  $a_n = n^\gamma \ell(n)$ , avec  $\gamma > 0$  et  $\ell : \mathbb{R}_+ \rightarrow (0, \infty)$  est une fonction à variation lente à l'infini,
- une mesure finie non-triviale  $\mu$  sur  $[0, 1]$ ,

telles qu'on ait la convergence faible de mesures sur  $[0, 1]$  :

$$a_n(1-x)p_n^*(dx) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{faible}} \mu(dx).$$

Sous cette hypothèse, la limite d'échelle de la chaîne de Markov va s'exprimer en fonction d'un subordinateur  $\xi$  tué à un taux  $k = \mu(\{0\})$ , de mesure de Lévy l'image de la mesure  $\mathbf{1}_{\{0 < x < 1\}} \mu(dx)/(1-x)$  par l'application  $x \mapsto -\ln(x)$  et de drift  $d = \mu(\{1\})$ . Plus précisément, considérons le processus de

Markov auto-similaire

$$X(t) = \exp(-\xi_{\rho(t)}), \quad t \geq 0,$$

où  $\rho$  est le changement de temps  $\rho(t) = \inf\{u \geq 0 : \int_0^u \exp(-\gamma\xi_r)dr > t\}$ ,  $t \geq 0$ , et notons

$$I = \int_0^\infty \exp(-\gamma\xi_r)dr$$

le temps auquel ce processus atteint 0, et  $A_n$  le premier instant où la chaîne  $X_n$  atteint un état absorbant.

**Théorème 12** ([55]). *Sous l'hypothèse (H1),*

$$\left( \left( \frac{X_n(\lfloor a_n t \rfloor)}{n}, t \geq 0 \right), \frac{A_n}{a_n} \right) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{loi}} (X, I),$$

la topologie considérée sur l'ensemble des fonctions càdlàg de  $\mathbb{R}_+$  dans  $\mathbb{R}_+$  étant celle de Skorokhod.

On obtient également la convergence de tous les moments positifs de  $A_n/a_n$  vers ceux de  $I$ . La preuve de ce théorème consiste, dans ses grandes lignes, à montrer que la suite de processus changés de temps,

$$Z_n(t) = \frac{X_n(\lfloor a_n \rho_n^{-1}(t) \rfloor)}{n}, \quad t \geq 0,$$

avec

$$\rho_n^{-1}(t) = \inf \left\{ u \geq 0 : \int_0^u \left( \frac{X_n(\lfloor a_n r \rfloor)}{n} \right)^{-\gamma} dr > t \right\},$$

est tendue, puis que pour toute limite éventuelle  $Z$  de  $Z_n$ , les processus  $(Z^\lambda(t) \exp(\psi(\lambda)t), t \geq 0)$ , indexés par  $\lambda > 0$ , sont des martingales càdlàg, où  $\psi$  est l'exposant de Laplace du subordonateur  $\xi$ . Il s'ensuit que  $Z$  a nécessairement même loi que  $\exp(-\xi)$ , puis la convergence voulue de la suite  $X_n$  normalisée vers  $X$ .

**Remarque 1.** La convergence des temps d'absorption  $A_n$  normalisés vers le temps de mort  $I$  n'est pas une conséquence directe de la convergence des chaînes de Markov  $X_n$  normalisées vers le processus  $X$ . On a besoin d'utiliser à nouveau un argument de tension pour conclure.

**Remarque 2.** On peut obtenir ainsi, comme limite d'échelle de chaînes de Markov décroissantes à valeurs entières positives, n'importe quel processus de Markov auto-similaire de la forme  $\exp(-\xi_\rho)$  construit à partir d'un subordonateur  $\xi$  et d'un réel  $\gamma > 0$ .

## 3.2 Applications

### 3.2.1 Marches aléatoires avec barrière

Iksanov et Möhle [60] se sont intéressés au nombre de sauts avant absorption de marches aléatoires avec un certain type de barrières. Le théorème ci-dessus nous permet de retrouver et compléter leurs résultats dans les cas où l'espérance d'un saut est infinie. Notons que leur approche diffère fortement de la notre : elle consiste à mettre en place et étudier des formules récursives sur les temps d'absorption de ces marches avec barrières.

Soit  $(Y_i, i \geq 1)$  une suite de variables à valeurs dans  $\mathbb{Z}_+$  indépendantes et de même loi, et  $(S(k), k \geq 0)$  la marche aléatoire associée :

$$S(k) = \sum_{i=1}^k Y_i, \quad k \geq 1; \quad S_0 = 0.$$

On note  $q_n = \mathbb{P}(Y_1 = n)$ ,  $\bar{q}_n = \sum_{i>n} q_i$ ,  $n \in \mathbb{Z}_+$  et on exclut dans la suite le cas trivial où  $q_0 = 1$ . On considère alors trois chaînes de Markov associées à cette marche :

1. la marche tuée lorsqu'elle dépasse  $n$  :  $S_n^{(1)}(k) = \min(S(k), n)$ ,  $k \geq 0$  ;
2. la marche qui ignore les sauts qui la feraient dépasser  $n$ , définie récursivement par

$$S_n^{(2)}(k+1) = S_n^{(2)}(k) + Y_{k+1} \mathbf{1}_{\{S_n^{(2)}(k) + Y_{k+1} \leq n\}}, \quad S_n^{(2)}(0) = 0;$$

3. la marche dont les sauts sont conditionnés à ne pas la faire dépasser  $n$ , qu'on notera  $S_n^{(3)}$  (avec la convention que la loi du saut conditionné est la mesure de Dirac en 0 si le conditionnement n'est pas défini) ; on peut construire une version de  $S_n^{(3)}$  à partir de  $S_n^{(2)}$ , version qu'on considérera dans la suite, en posant  $S_n^{(3)}(k) = S_n^{(2)}(T_n(k))$  avec  $T_n(0) = 0$  et  $T_n(k+1) = \inf\{i > T_n(k) : S_n^{(2)}(i-1) + Y_i \leq n\}$ ,  $k \geq 0$ .

On note

$$X_n^{(1)}(k) = n - S_n^{(1)}(k), \quad X_n^{(2)}(k) = n - S_n^{(2)}(k), \quad X_n^{(3)}(k) = n - S_n^{(3)}(k), \quad k \geq 0,$$

les chaînes décroissantes associées et  $A_n^{(1)}$ ,  $A_n^{(2)}$  et  $A_n^{(3)}$  leurs temps d'absorption respectifs (les deuxième et troisième chaînes ne sont pas nécessairement absorbées en 0, contrairement à la première). Le théorème 12 nous amène alors au résultat suivant.

**Théorème 13** ([55]). *Supposons que  $\bar{q}_n = n^{-\gamma} \ell(n)$ , pour une fonction à variation lente  $\ell$  et un réel  $\gamma \in (0, 1)$ . Considérons un subordonateur  $\xi$  d'exposant de Laplace*

$$\psi(\lambda) = \int_0^\infty (1 - e^{-\lambda y}) \frac{\gamma e^{-y} dy}{(1 - e^{-y})^{\gamma+1}}, \quad \lambda \geq 0,$$

$\rho$  le changement de temps usuel (1.2) défini à partir de  $\xi$  et  $\gamma$ , et  $\xi^t$  le subordonateur tué :  $\xi_t^t = \xi_t + \infty \mathbf{1}_{\{\mathbf{e}(1) \leq t\}}$  où  $\mathbf{e}(1)$  est une variable aléatoire exponentielle de paramètre 1, indépendante de  $\xi$ . Alors, on a la convergence jointe

$$\left( \frac{X_n^{(1)}(\lfloor \cdot / \bar{q}_n \rfloor)}{n}, \frac{X_n^{(2)}(\lfloor \cdot / \bar{q}_n \rfloor)}{n}, \frac{X_n^{(3)}(\lfloor \cdot / \bar{q}_n \rfloor)}{n} \right) \xrightarrow{\text{loi}} (\exp(-\xi_\rho^t), \exp(-\xi_\rho), \exp(-\xi_\rho)),$$

conjointement avec

$$\bar{q}_n (A_n^{(1)}, A_n^{(2)}, A_n^{(3)}) \xrightarrow{\text{loi}} \left( \int_0^{\mathbf{e}(1)} \exp(-\xi_r) dr, \int_0^\infty \exp(-\xi_r) dr, \int_0^\infty \exp(-\xi_r) dr \right).$$

Le lien avec le travail d'Iksanov et Möhle est le suivant : les marches avec barrières qu'ils considèrent sont nos marches  $S_n^{(2)}$  lorsque  $q_0 = 0$ . Dans ce cas  $A_n^{(3)}$  est le nombre de sauts strictement positifs de la marche avant absorption et c'est la quantité qu'ils étudient.

### 3.2.2 $\Lambda$ -coalescents

Soit  $\Lambda$  une mesure finie sur  $[0, 1]$ . Un  $\Lambda$ -coalescent est un processus markovien échangeable à valeurs dans l'ensemble des partitions de  $\mathbb{N}$  modélisant l'évolution d'un système de blocs qui coalescent de telle sorte que le seul type de transitions possible est l'agglomération d'un ensemble de blocs en un unique bloc. Plus précisément, le taux auquel  $n$  blocs coalescent en  $k$  blocs suite à l'agglomération de  $n - k + 1$  blocs est donné par

$$g_{n,k} = \binom{n}{k-1} \int_{[0,1]} x^{n-k-1} (1-x)^{k-1} \Lambda(dx).$$

Les  $\Lambda$ -coalescents ont été introduits par Pitman [77] et Sagitov [82] en 1999. Lorsque  $\Lambda = \delta_0$ , on retrouve le coalescent de Kingman. Lorsque  $\Lambda$  est la mesure de Lebesgue sur  $[0, 1]$ , on retrouve le coalescent de Bolthausen et Sznitman.

Partant d'un système ayant initialement  $n$  blocs, on s'intéresse à la chaîne de Markov  $(X_n(k), k \geq 0)$  décrivant l'évolution du nombre total de blocs :  $X_n(0) = n$ ,  $X_n(1) = j_1$  s'il reste  $j_1$  blocs après la première agglomération,  $X_n(2) = j_2$  s'il reste  $j_2$  blocs après la deuxième agglomération, etc., la chaîne restant constante égale à 1 une fois qu'elle a atteint cet état. On notera  $A_n$  le temps d'absorption à l'état 1. Le comportement de ce temps d'absorption lorsque  $n \rightarrow \infty$  a fait l'objet de plusieurs travaux [42, 45, 59, 60]. A l'exception de [60] (nous en reparlerons ci-dessous), ces travaux se concentrent sur des cas où soit la mesure  $x^{-2}\Lambda(dx)$  est finie sur  $(0, 1]$ , soit la mesure  $x^{-1}\Lambda(dx)$  est infinie sur  $(0, 1]$ , montrant alors l'existence de suites déterministes  $(a_n, n \geq 0), (b_n, n \geq 0)$  telles que  $(A_n - a_n)/b_n$  converge vers une loi stable. Nous considérons au contraire les cas où la mesure  $x^{-2}\Lambda(dx)$  est infinie et la mesure  $x^{-1}\Lambda(dx)$  est finie. Soit

$$h(u) = \int_{[u,1]} x^{-2}\Lambda(dx), \quad u \in (0, 1].$$

En remarquant que les probabilités de transition de la chaîne sont

$$p_{n,j} = \mathbb{P}(X_n(1) = j) = \frac{g_{n,j}}{g_n}, \quad 1 \leq j \leq n-1,$$

où  $g_n$  est le taux de coalescence total  $g_n = \sum_{j=1}^{n-1} g_{n,j}$ , et en utilisant le théorème 12, on obtient,

**Théorème 14** ([55]). *Supposons que  $h(u) = u^{-\gamma}\ell(u)$ ,  $u \in (0, 1]$ , pour une fonction  $\ell$  à variation lente en 0 et un réel  $\gamma \in (0, 1)$ . Considérons le subordonateur  $\xi$  d'exposant de Laplace*

$$\psi(\lambda) = \frac{1}{\Gamma(2-\gamma)} \int_0^1 (1-(1-x)^\lambda)x^{-2}\Lambda(dx), \quad \lambda \geq 0,$$

ainsi que le changement de temps  $\rho$  défini par (1.2) à partir de  $\xi$  et  $\gamma$ . Alors, quand  $n \rightarrow \infty$ ,

$$\left( \frac{X_n(\lfloor h(1/n) \cdot \rfloor)}{n}, \frac{A_n}{h(1/n)} \right) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{loi}} \left( \exp(-\xi_\rho), \int_0^\infty \exp(-\gamma\xi_r) dr \right).$$

Ceci s'applique en particulier aux  $\beta$ -coalescents, dont la mesure  $\Lambda$  est une mesure de loi Beta,

$$\Lambda(dx) = \frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} x^{a-1}(1-x)^{b-1} dx \mathbf{1}_{(0,1)}(x)$$

pour des paramètres  $a \in (1, 2)$  et  $b > 0$ .

**Corollaire 6** ([55]). *Pour un  $\beta$ -coalescent de paramètres  $1 < a < 2$  et  $b > 0$ , la chaîne  $X_n$  du nombre de blocs vérifie*

$$\left( \frac{X_n(\lfloor n^{2-a} \cdot \rfloor)}{n}, \frac{A_n}{n^{2-a}} \right) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{loi}} \left( \exp(-\xi_\rho), \int_0^\infty \exp(-(2-a)\xi_r) dr \right)$$

où  $\xi$  est un subordonateur d'exposant de Laplace

$$\psi(\lambda) = \frac{2-a}{\Gamma(a)} \int_0^\infty (1-e^{-\lambda y}) \frac{e^{-by}}{(1-e^{-y})^{3-a}} dy$$

et  $\rho$  le changement de temps usuel (1.2) défini à partir de  $\xi$  et  $\gamma = 2-a$ .

Lorsque  $b = 1$  et  $a \in (1, 2)$ , on récupère ainsi un résultat qu'Iksanov et Möhle [60] montrent sur le comportement asymptotique de  $A_n$ , en faisant le lien entre ces modèles et des marches aléatoires avec barrière.

### 3.2.3 Compositions régénératrices

Partant d'une chaîne de Markov  $X_n$  *strictement décroissante* avant son temps d'absorption  $A_n$  en 0, à valeurs dans  $\mathbb{Z}_+$ , on construit une composition aléatoire de  $n$

$$C^{(n)} = \left( C_1^{(n)}, \dots, C_{A_n}^{(n)} \right)$$

de longueur  $A_n$ , en posant  $C_k^{(n)} = X_n(k-1) - X_n(k)$ ,  $1 \leq k \leq A_n$ . On rappelle qu'une composition de  $n$  est une suite finie d'éléments de  $\mathbb{N}$  de somme  $n$ . La suite de compositions  $(C^{(n)}, n \geq 1)$  est *régénératrice*, dans le sens où la loi de  $(C_2^{(n)}, \dots, C_{A_n}^{(n)})$  sachant  $C_1^{(n)} = c_1$  est celle de  $C^{(n-c_1)}$ . Réciproquement, à partir d'une suite de compositions régénératrice, on construit, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , une chaîne de Markov décroissante issue de  $n$  en posant  $X_n(k) = n - \sum_{i=1}^k C_i^{(n)}$  pour tout  $k$  plus petit que la longueur de la composition  $C^{(n)}$ , et  $X_n(k) = 0$  sinon. Le théorème 12 peut donc se traduire en termes de compositions régénératrices, voir [55, Theorem 5].

Ceci complète des résultats de Gnedin, Pitman et Yor [44] sur le comportement asymptotique de compositions aléatoires régénératrices et *consistantes*. On rappelle qu'une suite de compositions  $(C^{(n)}, n \geq 1)$  est dite consistante si, pour tout  $n \geq 2$ , lorsque  $n$  boules sont réparties dans des urnes ordonnées suivant  $C^{(n)}$ , on obtient en enlevant une de ces boules uniformément au hasard une composition de  $n-1$  de même loi que  $C^{(n-1)}$ . Gnedin et Pitman [43] montrent qu'une suite de compositions est régénératrice et consistante si et seulement si il existe un subordonateur (éventuellement tué)  $\xi$  et une suite de variables  $(U_i, i \geq 1)$  indépendantes uniformément distribuées sur  $(0, 1)$ , indépendantes de  $\xi$ , telles que  $C^{(n)}$  soit la composition correspondant aux longueurs des blocs de la partition ordonnée de  $\{1, \dots, n\}$  obtenue en considérant que  $i$  et  $j$  sont dans un même bloc si et seulement si  $U_i$  et  $U_j$  sont dans la même composante connexe de  $[0, 1] \setminus \{\overline{1 - \exp(-\xi_t)}, t \geq 0\}$ . Ceci  $\forall n \geq 1$ .

Rappelons, pour terminer, un des résultats de Gnedin, Pitman et Yor. Dans le théorème qui suit,  $A_n$  désigne la longueur de la composition  $C^{(n)}$ ,  $n \geq 1$ , pour une suite de compositions  $(C^{(n)}, n \geq 1)$  construite à partir d'un subordonateur  $\xi$ .

**Théorème 15** (Gnedin, Pitman, Yor [44]). *Si le subordonateur  $\xi$  n'est pas tué, n'a pas de drift et a une mesure de Lévy  $\Pi$  telle que  $x \mapsto \overline{\Pi}(x) = \int_x^\infty \Pi(dy) = x^{-\gamma} \ell(x)$ , où  $\ell$  est une fonction à variation lente en 0 et  $\gamma \in (0, 1)$ , alors,*

$$\frac{A_n}{\Gamma(1-\gamma)\overline{\Pi}(1/n)} \xrightarrow{\text{p.s.}} \int_0^\infty \exp(-\gamma\xi_r) dr.$$

Notre théorème 12 nous permet de retrouver cette convergence, mais seulement en loi.



## Chapitre 4

# Limites d'échelle d'arbres aléatoires [56, 57]

La description des limites continues de familles de grands arbres aléatoires a fait l'objet de plusieurs travaux ces dernières années, à commencer par les travaux d'Aldous [2, 3, 4], comme nous l'avons déjà vu. L'objet de ce chapitre est d'étudier les limites d'échelle de familles d'arbres satisfaisant une certaine propriété de Markov branchante. Les limites continues que l'on obtient sont les arbres de fragmentation étudiés au chapitre 2.

Notre principale application concerne la suite des arbres de Pólya à  $n$  noeuds,  $n \geq 1$ , c'est-à-dire des arbres tirés uniformément parmi les arbres enracinés, non-ordonnés, non-étiquetés à  $n$  noeuds,  $n \geq 1$ . Bien que cette suite ne satisfait pas la propriété de Markov branchante, elle n'en est pas loin, et grâce à un argument de couplage on montre que sa limite d'échelle est l'arbre brownien d'Aldous, confirmant ainsi une conjecture de ce dernier. Nos résultats nous permettent aussi de retrouver les résultats classiques de convergence des arbres de Galton-Watson normalisés vers les arbres brownien et stables. On verra enfin que d'autres arbres de fragmentation apparaissent comme limites d'échelle de modèles naturels se construisant récursivement, comme par exemple les arbres phylogénétiques de Ford [40] ou d'Aldous [5].

### 4.1 Le modèle

Les arbres finis avec lesquels nous travaillons sont ceux introduits au début de la section 1.1 : ils sont enracinés, non-ordonnés et non-étiquetés, sauf mention du contraire. Pour l'instant, leurs arêtes ne sont pas munies de longueurs. On va considérer deux types de suites d'arbres, indexées par le nombre de feuilles d'une part, et par le nombre de noeuds d'autre part. On appellera *décomposition d'un arbre  $T$  au-dessus de sa racine* l'ensemble des sous-arbres obtenus en retranchant à  $T$  sa racine ainsi que les arêtes adjacentes.

**Définition 9.** Soit  $(T_n, n \geq 1)$  (resp.  $(\tilde{T}_n, n \geq 1)$ ) une suite d'arbres finis,  $T_n$  (resp.  $\tilde{T}_n$ ),  $n \geq 1$ , étant un arbre à  $n$  feuilles (resp.  $n$  noeuds). On dit que la suite (des lois de)  $T_n, n \geq 1$  est Markov branchante si, pour tout  $n \geq 2$ , sachant que  $T_n$  se décompose au-dessus de sa racine en  $p$  sous-arbres ayant respectivement  $\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_p$  feuilles, ces sous-arbres sont indépendants, de lois respectives celles de  $T_{\lambda_1}, \dots, T_{\lambda_p}$ . Et similairement pour les suites d'arbres indexées par leur nombre de noeuds  $(\tilde{T}_n, n \geq 1)$ .

Par exemple, les arbres de Galton-Watson conditionnés à avoir  $n$  feuilles ou  $n$  noeuds, les alpha-modèles de Ford [40] et leurs extensions par Chen, Ford et Winkel [23], ou les beta-modèles d'Aldous [5] satisfont cette propriété de Markov branchante. De même pour les arbres combinatoires  $(T_n, n \geq 1)$  associés à une fragmentation (section 2.1), dont on oublie les étiquettes (avec la convention ici que

la racine et le premier noeud de branchement de ces arbres sont confondus). Dans la section 2.1, on avait construit ces arbres pour des fragmentations sans érosion, d'indice d'auto-similarité négatif et de mesure de dislocation conservatrice, mais la construction reste valable sans hypothèse sur les paramètres de la fragmentation. Le coefficient d'érosion  $c$  et la mesure de dislocation  $\nu$  étant fixés, la loi de la famille  $(T_n, n \geq 1)$  ne dépend pas alors du paramètre d'auto-similarité. On notera dans la suite de cette section  $(T_n^{(c,\nu)}, n \geq 1)$  une telle famille lorsque les feuilles sont étiquetées et  $(T_n^{(c,\nu,\circ)}, n \geq 1)$  la même famille d'arbres sans les étiquettes. Il est sous-entendu dans toute la section que la racine et le premier noeud de branchement de ces arbres sont confondus.

On rappelle que pour tout entier  $n \geq 1$ ,  $\mathcal{P}_n$  désigne l'ensemble des partitions de  $n$ , c'est-à-dire l'ensemble des suites finies décroissantes  $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_p)$  à valeurs entières strictement positives et de somme  $n$ . La longueur de la partition  $\lambda$  est alors notée  $p(\lambda)$ .

Une famille de lois d'arbres  $T_n, n \geq 1$  Markov branchante, indexée par le nombre de feuilles, est caractérisée par une famille de probabilités  $(q_n, n \geq 1)$ ,  $q_n$  étant une probabilité sur  $\mathcal{P}_n$  telle que  $q_n((n)) < 1, \forall n \in \mathbb{N}$ . Lorsque  $n = 1$  on ajoute un point cimetièrè  $\Delta$  de sorte que  $q_1(\Delta) = 1 - q_1((1))$ . La probabilité  $q_n(\lambda), \lambda \in \mathcal{P}_n$ , correspond alors à la probabilité que  $T_n$  se décompose au-dessus de sa racine en  $p(\lambda)$  sous-arbres de tailles  $\lambda_1, \dots, \lambda_{p(\lambda)}$ . L'hypothèse  $q_n((n)) < 1$  vient du fait que l'arbre  $T_n$  est fini. Enfin  $q_1(\Delta)$  est la probabilité que  $T_1$  ait un seul noeud.

A partir de la suite  $(q_n, n \geq 1)$  on peut reconstruire la suite des lois des  $T_n, n \geq 1$  à l'aide d'un système d'urnes et de boules : on part d'une urne initiale avec  $n$  boules. Avec probabilité  $q_n(\lambda)$ , cette urne se scinde en  $p(\lambda)$  urnes contenant respectivement  $\lambda_1, \dots, \lambda_{p(\lambda)}$  boules. Puis, conditionnellement à leurs tailles, chacune de ces urnes, indépendamment des autres, est scindée en sous-urnes suivant les lois  $q_{\lambda_1}, \dots, q_{\lambda_{p(\lambda)}}$ , et ainsi de suite. Notons qu'une urne contenant  $n$  boules reste de taille constante pendant un temps de loi géométrique de paramètre  $1 - q_n((n))$ . Dans le cas particulier d'une urne à une boule, on considère qu'elle "meurt" au bout de ce temps de loi géométrique. L'arbre  $T_n$  est alors l'arbre généalogique associé à ce système d'urnes, la racine correspondant à l'urne initiale à  $n$  boules.

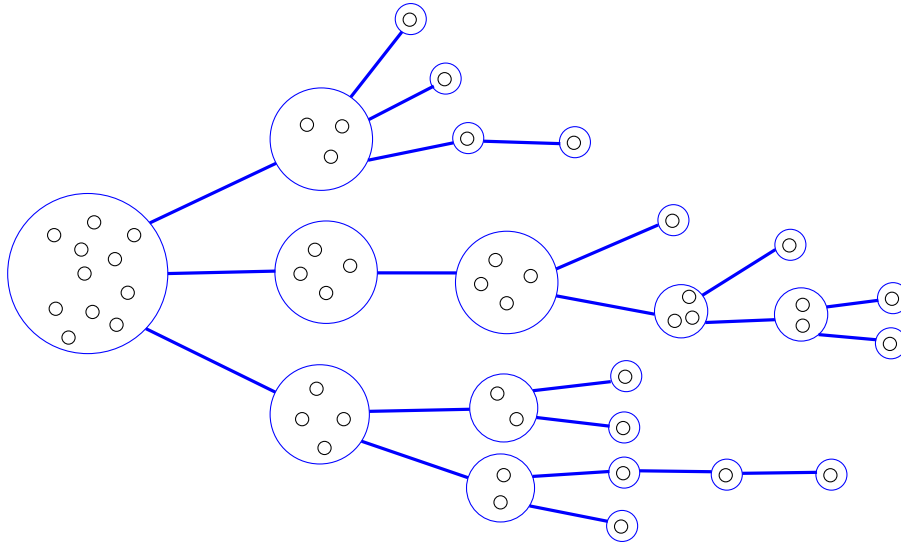


FIGURE 4.1 – Une version de l'arbre  $T_{11}$ .

De même, une famille de lois d'arbres  $\tilde{T}_n, n \geq 1$  Markov branchante indexée par le nombre de noeuds est caractérisée par une famille de probabilités  $(\tilde{q}_n, n \geq 1)$ ,  $\tilde{q}_n$  étant une probabilité sur  $\mathcal{P}_n$ , telle que  $\tilde{q}_1((1)) = 1$ . La probabilité  $\tilde{q}_n(\lambda)$  est alors celle que  $\tilde{T}_{n+1}$  se décompose en  $p(\lambda)$  sous-arbres de tailles respectives  $\lambda_1, \dots, \lambda_{p(\lambda)}$ . Le décalage d'indices vient du fait que la décomposition de  $\tilde{T}_{n+1}$  au-dessus de sa racine donne une partition des  $n$  noeuds restants.



Remarquons pour finir que la famille d'arbres  $(T_n, n \geq 1)$ ,  $T_n$  ayant  $n$  feuilles, obtenue à partir de  $(\tilde{T}_n, n \geq 1)$  en ajoutant à  $\tilde{T}_n$  une arête et une feuille fantômes à chaque noeud de  $\tilde{T}_n$  qui n'est pas une feuille, est également une famille Markov branchante, dirigée par les probabilités  $q_n, n \geq 1$  définies à partir des probabilités  $\tilde{q}_n, n \geq 1$  par  $q_1((1)) = 0$  et pour  $n \geq 2$ ,

$$q_n((\lambda_1, \dots, \lambda_{p(\lambda)}, 1)) = \tilde{q}_{n-1}(\lambda), \quad \forall \lambda \in \mathcal{P}_{n-1}.$$

On utilisera ce lien dans la suite pour déduire les comportements asymptotiques de familles d'arbres indexées par le nombre de noeuds de celui de familles d'arbres indexées par le nombre de feuilles.

## 4.2 Limites d'échelle : cas consistants

Avec Grégory Miermont, Jim Pitman et Matthias Winkel, nous nous sommes intéressés [57] aux familles d'arbres Markov branchantes  $(T_n, n \geq 1)$  indexées par le nombre de feuilles, telles que  $q_n((n)) = 0$  pour tout  $n$  (aucun noeud n'est de degré 2, excepté peut-être la racine), satisfaisant en outre une propriété de consistance :

**Définition 10.** *La famille  $(T_n, n \geq 1)$  est consistante si, pour tout  $n \geq 3$ , la loi de l'arbre obtenu en enlevant une feuille uniformément au hasard dans  $T_n$ , ainsi que l'arête adjacente, est celle de  $T_{n-1}$  (il est sous-entendu ici qu'on "oublie" le noeud sur lequel était plantée l'arête enlevée s'il était de degré 3 et différent de la racine, fusionnant alors ses deux arêtes voisines restantes de sorte à obtenir un arbre à  $n-1$  feuilles sans noeuds de degré 2; de même, si l'arête enlevée était plantée sur la racine et que celle-ci était de degré 2, on identifie alors la racine et son unique descendant restant).*

On note dans la suite  $(q_n, n \geq 1)$  la famille de probabilités "consistantes" associée. Un exemple fondamental de familles satisfaisant ces propriétés sont les familles  $(T_n^{(c,\nu,\circ)}, n \geq 1)$  d'arbres combinatoires de fragmentation; on note  $(q_n^{(c,\nu)}, n \geq 1)$  les probabilités associées. Ce sont en un certain sens les seules, car pour toute famille  $(T_n, n \geq 1)$  Markov branchante consistante il existe un réel  $c \geq 0$  et une mesure de dislocation  $\nu$  tels que  $T_n$  a même loi que  $T_n^{(c,\nu,\circ)}$  pour tout  $n \geq 1$ . Plus précisément, on a le résultat suivant :

**Théorème 16** ([57]). *Les familles  $(q_n, n \geq 1)$  consistantes sont toutes de la forme suivante :*

$$q_n(\lambda) = q_n^{(c,\nu)}(\lambda) = \frac{C_\lambda}{Z_n} \left( nc \mathbf{1}_{\{\lambda(p)=2, \lambda_2=1\}} + \int_{\mathcal{S}^\downarrow} \sum_{l=0}^{m_1(\lambda)} \binom{m_1(\lambda)}{l} \sum_{i_1 \neq \dots \neq i_{r-l} \geq 1} s_0^l \prod_{j=1}^{r-l} s_{i_j}^{\lambda_j} \nu(ds) \right),$$

$\forall \lambda \in \mathcal{P}_n, \forall n \geq 2$ , pour une paire  $(c, \nu)$  où  $c \geq 0$  et  $\nu$  est une mesure de dislocation. Ici,  $m_i(\lambda)$  est le nombre d'occurrences de l'entier  $i$  dans la partition  $\lambda$ ,  $s_0 = 1 - \sum_{i \geq 1} s_i$ ,  $C_\lambda$  est un facteur combinatoire, et  $Z_n$  une constante de normalisation :

$$C_\lambda = \frac{n!}{\lambda_1! \dots \lambda_{p(\lambda)}! m_1(\lambda)! \dots m_n(\lambda)!}, \quad Z_n = nc + \int_{\mathcal{S}^\downarrow} \left( 1 - \sum_{i \geq 1} s_i^n \right) \nu(ds).$$

De plus,  $q_n^{(c,\nu)} = q_n^{(c',\nu')}$ ,  $\forall n \geq 1$ , si et seulement si il existe un réel  $K > 0$  tel que  $(c', \nu') = (Kc, K\nu)$ .

Pour décrire les comportements en loi des familles d'arbres Markov branchantes et consistantes on peut donc se restreindre aux familles  $(T_n^{(c,\nu,\circ)}, n \geq 1)$ . On munit dans la suite les arêtes des arbres  $T_n^{(c,\nu,\circ)}, n \geq 1$  de longueurs toutes égales à 1. Le résultat principal de cette section est le suivant :

**Théorème 17** ([57]). *Supposons que  $c = 0$ ,  $\nu$  est conservatrice et  $\nu(s_1 \leq 1 - \varepsilon) = \varepsilon^{-\gamma} \ell(\varepsilon^{-1})$ ,  $\forall \varepsilon \in (0, 1)$ , pour un  $\gamma \in (0, 1)$  et une fonction  $\ell$  à variation lente à l'infini. Il existe alors un arbre de fragmentation  $\mathcal{T}_{-\gamma,\nu}$  tel que*

$$\frac{T_n^{(c,\nu,\circ)}}{n^\gamma \ell(n) \Gamma(1 - \gamma)} \xrightarrow{\text{proba}} \mathcal{T}_{-\gamma,\nu},$$

pour la topologie de Gromov-Hausdorff.

Parmi les exemples de mesures de dislocation satisfaisant les hypothèses de ce théorème, citons la mesure de dislocation brownienne  $\nu_{\text{Br}}$ , les mesures de dislocations des fragmentations stables  $\nu_\beta$ ,  $1 < \beta < 2$  et plus généralement les mesures de Poisson-Dirichlet  $\text{PD}^*(a, \theta)$ ,  $a \in (0, 1)$ ,  $\theta \in (-2a, a)$ , introduites dans la section 2.4.

Ce théorème est montré sous une hypothèse technique supplémentaire dans [57], qu'on utilisait pour un résultat de tension. Cependant, on s'est aperçu au cours du travail [56] qu'elle n'est pas nécessaire. La première étape de la preuve consiste à remarquer qu'on ne perd rien à supposer que la suite  $(T_n^{(0, \nu)}, n \geq 1)$  se construit à partir d'un arbre  $(\mathcal{T}_{-\gamma, \nu}, \mu_{-\gamma, \nu})$  en piochant, conditionnellement à cet arbre, un échantillon de feuilles i.i.d. de loi  $\mu_{-\gamma, \nu}$ , puis en considérant  $\mathcal{R}_n^{(0, \nu)}$  le sous-arbre de  $\mathcal{T}_{-\gamma, \nu}$  engendré par les  $n$  premières feuilles et la racine, et enfin en considérant que  $T_n^{(0, \nu)}$  est l'arbre  $\mathcal{R}_n^{(0, \nu)}$  dont on a remplacé les longueurs sur les arêtes par des longueurs toutes égales à 1. La preuve du théorème se divise ensuite en trois autres étapes :

- étude de la hauteur, notée  $H_n^{(0, \nu)}$ , de la feuille 1 dans  $T_n^{(0, \nu)}$ . Compte tenue de la construction (théorème 5) du fragment marqué à l'aide d'un subordonateur  $\xi$ , ceci correspond exactement au contexte du théorème 15, qui nous amène au résultat suivant (sous les hypothèses du théorème 17 ci-dessus) :

$$\frac{H_n^{(0, \nu)}}{n^\gamma \ell(n) \Gamma(1 - \gamma)} \xrightarrow{\text{p.s.}} \int_0^\infty \exp(-\gamma \xi_r) dr,$$

la limite étant bien la longueur de l'arbre à une feuille  $\mathcal{R}_1^{(0, \nu)}$  ;

- convergence fini-dimensionnelle : on regarde l'arbre à  $k$  feuilles  $T_n^{(0, \nu)}([k])$ , sous-arbre de  $T_n^{(0, \nu)}$  engendré par les feuilles  $1, \dots, k$  et la racine de  $T_n^{(c, \nu)}$ . En utilisant la propriété de branchement de la famille d'arbres  $(T_n^{(0, \nu, \circ)}, n \geq 1)$  et en raisonnant par récurrence sur  $k$ , on montre que

$$\frac{T_n^{(0, \nu, \circ)}([k])}{n^\gamma \ell(n) \Gamma(1 - \gamma)} \xrightarrow{\text{p.s.}} \mathcal{R}_k^{(0, \nu, \circ)}$$

la notation  $\circ$  signifiant comme précédemment que les arbres sont non-étiquetés ;

- on conclut avec un résultat de tension.

On complète, dans le papier [57], le théorème 17 en montrant que des fonctions de hauteur codant (dans un sens légèrement différent de celui évoqué dans la section 1.1) une version ordonnée des arbres  $T_n^{(0, \nu, \circ)}$ ,  $n \geq 1$ , convergent en probabilité et pour la topologie de la convergence uniforme, correctement normalisées, vers la fonction de hauteur  $H_{-\gamma, \nu}$  codant une version ordonnée de l'arbre  $\mathcal{T}_{-\gamma, \nu}$ , introduite dans le théorème 7.

### 4.3 Limites d'échelle : cas généraux

Nous avons ensuite cherché, avec Grégory Miermont [56], à étendre ces résultats de convergence d'arbres à un cadre plus général. On oublie à présent l'hypothèse de consistance de la section précédente ainsi que le fait que  $q((n)) = 0$  pour tout  $n \geq 1$  et on se concentre sur des familles  $(T_n, n \geq 1)$  Markov branchantes, indexées par le nombre de feuilles pour l'instant, dirigées par une suite de probabilités  $(q_n, n \geq 1)$  telles que  $q_n((n)) < 1$  pour tout  $n$  et

**(H2)** il existe une paire  $(\gamma, \nu)$ , avec  $\gamma > 0$  et  $\nu$  une mesure de dislocation conservatrice, et une fonction  $\ell : (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$  à variation lente à l'infini, tel que :

$$n^\gamma \ell(n) \sum_{\lambda \in \mathcal{P}_n} q_n(\lambda) \left(1 - \frac{\lambda_1}{n}\right) f\left(\frac{\lambda}{n}\right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_{\mathcal{S}^\downarrow} (1 - s_1) f(\mathbf{s}) \nu(\mathrm{d}\mathbf{s}),$$

pour toute fonction  $f : \mathcal{S}^\downarrow \rightarrow \mathbb{R}$  continue bornée.

Par exemple, pour tout  $\gamma > 0$ , la famille de probabilités définies pour  $n \geq 2$  et  $\lambda \in \mathcal{P}_n$  par

$$q_n((n)) = 1 - n^{-\gamma}, \quad q_n([\lceil n/2 \rceil, \lfloor n/2 \rfloor]) = n^{-\gamma}, \quad q_n(\lambda) = 0 \quad \text{sinon,}$$

associées à un système d'urnes tel qu'une urne à  $n$  boules reste de taille constante égale à  $n$  pendant un temps de loi géométrique de paramètre  $n^{-\gamma}$  puis se scinde en deux urnes de taille  $n/2$  (ou  $(n+1)/2, (n-1)/2$  si  $n$  est impair) va vérifier cette hypothèse, avec  $\nu(\mathrm{d}\mathbf{s}) = \delta_{(1/2, 1/2, 0, \dots)}(\mathrm{d}\mathbf{s})$  et  $\ell \equiv 1$ . Plus généralement, et plus informellement, l'hypothèse **(H2)** signifie qu'à chaque scission d'urne on obtient avec une grosse probabilité une urne de taille essentiellement la même que l'urne initiale, ainsi, éventuellement, qu'un ensemble d'urnes de tailles microscopiques, et qu'avec la petite probabilité complémentaire, une urne se scinde en plusieurs urnes de tailles macroscopiques.

Comme dans la section précédente, il est sous-entendu dans la suite que les arbres discrets que nous considérons ont leurs arêtes munies de longueurs toutes égales à 1.

**Théorème 18** ([56]). *Sous l'hypothèse **(H2)**, lorsque l'arbre  $T_n$  est muni de la mesure uniforme sur ses feuilles,*

$$\frac{T_n}{n^\gamma \ell(n)} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{loi}} (\mathcal{T}_{-\gamma, \nu}, \mu_{-\gamma, \nu})$$

pour la topologie de Gromov-Hausdorff-Prokhorov.

Ce théorème implique en particulier une version faible du théorème 17, puisqu'il permet de récupérer la convergence énoncée, mais seulement en loi.

Le schéma de la preuve est le même que celui du théorème 17, mais l'absence de l'hypothèse de consistance, et par suite du lien avec les fragmentations homogènes, rend l'approche plus complexe. En particulier, l'étude de la hauteur d'une feuille prise uniformément au hasard dans  $T_n$  ne peut plus se faire via le théorème 15 de Gneden, Pitman et Yor. L'idée ici est de considérer la construction urnes-boules de l'arbre  $T_n$  et de marquer une boule dans l'urne initiale. Si  $X_n(k)$  est le nombre de boules de l'urne contenant la boule marquée après  $k$  étapes (avec pour convention  $X_n(k) = 0$  si la boule marquée est dans l'état cimetièr), la chaîne  $(X_n(k), k \geq 0)$  est markovienne décroissante, de probabilités de transition

$$p_{i,j} = \sum_{\lambda \in \mathcal{P}_i} q_i(\lambda) m_j(\lambda) \frac{j}{i}, \quad 1 \leq j \leq i, \quad \text{avec } m_j(\lambda) = \#\{i, 1 \leq i \leq p(\lambda) : \lambda_i = j\},$$

et  $p_{1,0} = 1 - p_{1,1} = q_1(\Delta)$ . Notons que la hauteur  $H_n$  de la feuille marquée dans l'arbre  $T_n$  est égale au premier instant où la chaîne  $X_n$  touche 0, moins 1. L'hypothèse **(H2)** sur les probabilités  $q_n, n \geq 1$  implique l'hypothèse **(H1)** du chapitre 3 pour les probabilités de transition de la chaîne. D'où, d'après le théorème 12, la convergence de la chaîne normalisée vers un processus de Markov auto-similaire décrivant la masse du fragment marqué dans la fragmentation de paramètres  $(-\gamma, \nu)$ , conjointement avec la convergence de  $H_n/(n^\gamma \ell(n))$  vers la hauteur d'une feuille marquée dans l'arbre  $\mathcal{T}_{(-\gamma, \nu)}$ .

La preuve du critère de tension ne peut pas non plus être adaptée de celle des cas constants, d'abord parce que l'approche utilisée dans ces cas repose à nouveau fortement sur la fragmentation jointe au modèle, mais aussi parce qu'elle ne marche que sous l'hypothèse  $\nu(s_1 < 1 - \varepsilon) = \varepsilon^{-\gamma} \ell(\varepsilon^{-1})$ ,

avec  $\ell$  à variation lente à l'infini, sur la mesure de dislocation. Or dans le cas général, on ne fait aucune hypothèse sur  $\nu$ . Sans rentrer dans les détails, un point-clé de la preuve est de montrer la majoration

$$\mathbb{P}(H_n \geq xn^\gamma \ell(n)) \leq C_p/x^p$$

pour tout  $x > 0$ , tout  $n \in \mathbb{N}$ , et un réel  $p$  assez grand ( $C_p$  ne dépendant que de  $p$ ). De façon assez surprenante, ce résultat se montre plutôt facilement par récurrence sur  $n$ .

**Remarque.** Il est facile de voir que pour toute paire  $(\gamma, \nu)$ , avec  $\gamma > 0$ ,  $\nu$  mesure de dislocation conservatrice, il existe une suite de probabilités  $(q_n, n \geq 1)$  telle que la convergence de l'hypothèse **(H2)** soit satisfaite. Par conséquent, tout arbre de fragmentation  $\mathcal{T}_{-\gamma, \nu}$  est la limite d'échelle d'une suite d'arbres Markov branchante.

Tournons-nous à présent vers les familles d'arbres Markov branchantes indexées par le nombre de noeuds. En utilisant la remarque de la fin de la section 4.1 sur les liens entre les familles d'arbres indexées par les noeuds et celles indexées par les feuilles, on obtient :

**Théorème 19** ([56]). *Soit  $(\tilde{T}_n, n \geq 1)$  une famille d'arbres Markov branchante indexée par le nombre de noeuds, dirigée par une famille de probabilités  $(\tilde{q}_n, n \geq 1)$  vérifiant **(H2)** avec  $0 < \gamma < 1$ , ou  $\gamma = 1$  et  $\ell(n) \rightarrow 0$ . Munissons chaque arbre  $\tilde{T}_n$  de la mesure uniforme sur ses noeuds. Alors,*

$$\frac{\tilde{T}_n}{n^\gamma \ell(n)} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{loi}} (\mathcal{T}_{-\gamma, \nu}, \mu_{-\gamma, \nu}),$$

pour la topologie de Gromov-Hausdorff-Prokhorov.

**Remarque.** L'hypothèse supplémentaire sur les paramètres  $\gamma, \ell$  dans ce théorème est nécessaire. L'arbre  $\tilde{T}_n$  ayant une hauteur bornée par  $n$ , il est nécessaire de prendre  $\gamma \leq 1$  pour espérer avoir une limite non-triviale. Lorsque  $\gamma = 1$  et  $\ell(n) \rightarrow l \in (0, \infty]$ , les arbres normalisés  $\tilde{T}_n/(n\ell(n))$  ont une hauteur bornée par une même constante déterministe. Il ne peut donc y avoir convergence vers un arbre de fragmentation, dont la hauteur ne peut pas être bornée pas une constante déterministe.

## 4.4 Applications

### 4.4.1 Arbres de Pólya

Soit  $m$  un entier fixé dans  $\{2, 3, \dots\} \cup \{\infty\}$ . On appelle *arbre de Pólya* à  $n$  noeuds un arbre uniformément distribué sur  $\mathbf{T}_n^{(m)}$ , l'ensemble des arbres enracinés, non-ordonnés, non-étiquetés, à  $n$  noeuds tels que chaque noeud ait au plus  $m$  enfants. Aldous [3] a conjecturé qu'un arbre de Pólya à  $n$  noeuds normalisé par  $\sqrt{n}$  converge vers l'arbre brownien (à une constante près dépendant de  $m$ ). Rappelons ici, pour comparaison lorsque  $m = \infty$ , qu'un arbre pioché uniformément parmi les arbres enracinés *ordonnés* à  $n$  noeuds a même loi qu'un arbre de Galton-Watson de loi de reproduction une loi géométrique de paramètre  $1/2$  conditionné à avoir  $n$  noeuds, et admet donc comme limite d'échelle l'arbre brownien. De même, un arbre pioché uniformément parmi les arbres enracinés *non-ordonnés étiquetés* à  $n$  noeuds a même loi qu'un arbre de Galton-Watson de loi de reproduction une loi de Poisson de paramètre  $1$  conditionné à avoir  $n$  noeuds, dont on oublie l'ordre et dont les noeuds sont numérotés uniformément. Il admet donc également l'arbre brownien comme limite d'échelle. Signalons enfin que Miermont et Marckert [71] montrent la conjecture d'Aldous pour les arbres de Pólya binaires, c'est-à-dire uniformément distribués sur l'ensemble des arbres binaires enracinés (non-ordonnés, non-étiquetés) à  $n$  noeuds ( $n$  étant alors nécessairement impair).

Nous allons utiliser ici le théorème 19 pour montrer la conjecture d'Aldous pour tous les entiers  $m \in \{2, 3, \dots\} \cup \{\infty\}$ . Pour cela, notons pour tout entier  $n \geq 1$  :

- $\tilde{T}_n^{(m)}$  un arbre uniformément distribué sur  $\mathbf{T}_n^{(m)}$ ,  $m \in \{2, 3, \dots\} \cup \{\infty\}$
- $\bar{T}_{nm+1}^{(m)}$  un arbre uniformément distribué parmi les arbres de  $\mathbf{T}_{nm+1}^{(m)}$   $m$ -aires, c'est-à-dire tels que chaque noeud interne ait exactement  $m$  enfants,  $m = 2, 3, \dots$ .

Lorsque  $m$  est fini, un arbre enraciné dont chaque noeud interne a exactement  $m$  enfants a nécessairement un nombre total de noeuds de la forme  $nm + 1$  pour un entier  $n$ . Notons que si on enlève à cet arbre chacune de ses feuilles et leurs arêtes adjacentes, on obtient un arbre de  $\mathbf{T}_n^{(m)}$ . Réciproquement, partant d'un arbre de  $\mathbf{T}_n^{(m)}$ , si on ajoute à chacun de ses noeuds (y compris les feuilles) le nombre d'arêtes manquantes (reliées chacune à une feuille) pour qu'il ait exactement  $m$  enfants, on obtient un arbre de  $\mathbf{T}_{nm+1}^{(m)}$  tel que chaque noeud interne a exactement  $m$  enfants. Les arbres  $\tilde{T}_n^{(m)}$  et  $\bar{T}_{nm+1}^{(m)}$  auront donc le même comportement asymptotique.

L'idée est d'utiliser les résultats de la section 4.3 pour décrire le comportement asymptotique de  $\tilde{T}_n^{(m)}$ , cependant on ne peut pas les appliquer directement car la suite  $(\tilde{T}_n^{(m)}, n \geq 1)$  n'est pas Markov branchante. On peut s'en convaincre facilement en conditionnant par exemple l'arbre à se décomposer en deux sous-arbres de même taille lorsque  $n$  est impair : les décompositions en deux sous-arbres identiques sont favorisées dans le cas uniforme par rapport à ce qu'elles devraient être dans le cas Markov branchant. Ce type de problème va disparaître asymptotiquement lorsque  $n \rightarrow \infty$ . L'idée est plus précisément de coupler la famille d'arbres de Pólya  $(\tilde{T}_n^{(m)}, n \geq 1)$  avec une famille Markov branchante  $(\tilde{R}_n^{(m)}, n \geq 1)$  de telle sorte que la distance de Gromov-Hausdorff-Prokhorov entre les arbres  $\tilde{T}_n^{(m)}/\sqrt{n}$  et  $\tilde{R}_n^{(m)}/\sqrt{n}$  converge en probabilité vers 0 et que la famille de probabilités dirigeant la suite  $(\tilde{R}_n^{(m)}, n \geq 1)$  vérifie la propriété **(H2)** ad hoc. Une fois le couplage mis en place, un point-clé pour vérifier la propriété **(H2)** est le résultat suivant établi par Otter ([76]) en se basant sur des techniques de fonctions génératrices développées par Pólya (d'où le nom des arbres que nous étudions) : il existe des constantes dépendant de  $m$ ,  $\kappa_m > 0$  et  $\rho_m > 1$ , telles que

$$\#\mathbf{T}_n^{(m)} \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \kappa_m \frac{\rho_m^n}{n^{3/2}}.$$

On arrive alors au résultat suivant. Il est sous-entendu dans cet énoncé que tous les arbres finis sont munis de la mesure uniforme sur leurs noeuds (et toujours de longueurs 1 sur leurs arêtes).

**Théorème 20** ([56]). *Pour tout  $m \in \{2, 3, \dots\} \cup \{\infty\}$ , il existe  $c_m \in (0, \infty)$  tel que*

$$\frac{\tilde{T}_n^{(m)}}{\sqrt{n}} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{loi}} (c_m \mathcal{T}_{\text{Br}}, \mu_{\text{Br}})$$

pour la topologie de Gromov-Hausdorff-Prokhorov, et lorsque  $m < \infty$ ,

$$\frac{\bar{T}_{nm+1}^{(m)}}{\sqrt{n}} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{loi}} (c_m \mathcal{T}_{\text{Br}}, \mu_{\text{Br}})$$

pour la topologie de Gromov-Hausdorff-Prokhorov.

Les constantes  $c_m$  peuvent s'exprimer de la façon suivante. Soit  $\mathbf{T}_n^{(m,2)}$  le sous-ensemble de  $\mathbf{T}_n^{(m)}$  d'arbres dont la racine a au plus  $m - 2$  enfants, et considérons la fonction génératrice

$$\psi^{(m)}(x) = \sum_{n \geq 1} \#\mathbf{T}_n^{(m,2)} x^n, \quad n \geq 1.$$

On a alors

$$c_m = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi} \kappa_m \psi^{(m)}(1/\rho_m)},$$

en particulier

$$c_\infty = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi\kappa_\infty}} \quad \text{et} \quad c_2 = \frac{\sqrt{2}\rho_2}{\sqrt{\pi\kappa_2}}.$$

En effet,  $\mathbf{T}_n^{(\infty,2)} = \mathbf{T}_n^{(\infty)}$ , ce qui implique que  $\psi^{(\infty)}(1/\rho_\infty) = 1$  (voir [39]) et nous amène à l'expression ci-dessus de  $c_\infty$ . Par ailleurs, on a immédiatement  $\psi^{(2)}(x) = x$ .

#### 4.4.2 Suites récursives d'arbres

Les théorèmes 17 et 18 s'appliquent à diverses suites d'arbres aléatoires indexées par les feuilles se construisant récursivement.

Comme premiers exemples, il y a évidemment les suites d'arbres combinatoires de fragmentation  $(T_n^{(0,\nu,\circ)}, n \geq 1)$ , avec une mesure  $\nu$  vérifiant l'hypothèse de variation régulière du théorème 17. On détaille ici plus spécifiquement deux de ces modèles.

Pour commencer, lorsque la mesure de dislocation  $\nu$  est binaire, conservatrice et telle que  $\nu(s_1 \in dx)$  a une densité par rapport à la mesure de Lebesgue sur  $(1/2, 1)$  proportionnelle à  $x^\beta(1-x)^\beta$ ,  $-2 < \beta < -1$ , on rend rigoureux ainsi des résultats de convergence évoqués heuristiquement par Aldous [5] pour ses beta-modèles, introduits pour la modélisation d'arbres phylogénétiques.

Ensuite, Marchal [70] propose une construction récursive d'une version de la famille d'arbres  $(T_n^{(0,\nu_\beta,\circ)}, n \geq 1)$ ,  $1 < \beta < 2$ , à l'aide de poids sur les noeuds et arêtes, en procédant de la façon suivante : une fois l'arbre à  $n$  feuilles construit, on attribue des masses  $1 - 1/\beta$  à chacune de ses arêtes et  $k/\beta - 1$  à chacun de ses noeuds donnant naissance à  $k \geq 2$  sous-arbres. On choisit ensuite une arête ou un noeud au hasard avec une probabilité proportionnelle au poids qu'on lui a attribué et on ajoute alors une nouvelle arête avec une feuille soit directement sur le noeud choisi (augmentant ainsi son degré de 1), soit "au milieu" de l'arête choisie scindant ainsi cette arête en deux nouvelles arêtes liées à un même nouveau noeud sur lequel on plante la nouvelle arête.

On obtient pour ces deux modèles des convergences en probabilité des arbres normalisés, grâce au théorème 17. A noter que les arbres  $(T_n^{(0,\nu_\beta,\circ)}, n \geq 1)$ ,  $1 < \beta < 2$ , sont des arbres de Galton-Watson conditionnés (voir [31]). Il n'est donc pas surprenant qu'ils convergent vers l'arbre de Lévy stable associé. Cependant ici le conditionnement est sur le nombre de feuilles et non sur le nombre de noeuds.

Notre deuxième ensemble d'exemples est celui des alpha-modèles que Ford [40] a introduits comme modèles d'arbres phylogénétiques. L'étude de leurs limites d'échelle était le point de départ du papier [57]. Ils se construisent récursivement de la façon suivante. Soit  $\alpha \in [0, 1]$ . L'arbre  $T_1$  est simplement l'arbre à deux noeuds, dont un est une racine, l'autre une feuille. Supposons l'arbre  $T_n$  construit, on attribue alors à chacune de ses arêtes un poids  $1 - \alpha$  si elle est liée à une feuille,  $\alpha$  sinon. Puis on choisit une arête avec une probabilité proportionnelle au poids attribué et on y ajoute une nouvelle arête (plantée sur un nouveau noeud) et une nouvelle feuille. Ford montre qu'une telle famille d'arbres est Markov branchante et consistante (avec, à nouveau, la convention ici que la racine et le premier point de branchement de l'arbre sont confondus). Notons que ces arbres sont binaires. On identifie dans [57] la mesure de dislocation associée (le coefficient d'érosion est, quant à lui, nul) :  $\nu_{\text{Ford},\alpha}(s_1 + s_2 < 1) = 0$  et,

$$\nu_{\text{Ford},\alpha}(s_1 \in dx) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} (\alpha(x(1-x))^{-\alpha-1} + (2-4\alpha)(x(1-x))^{-\alpha}) \mathbf{1}_{\{1/2 \leq x \leq 1\}}(dx).$$

On en déduit la convergence en loi des arbres normalisés par  $n^\alpha$ , pour tout  $\alpha \in (0, 1)$ . On ne peut pas avoir mieux, en général, qu'une convergence en loi avec notre approche, car en dehors du cas  $\alpha = 1/2$ , la loi jointe de la suite de ces alpha-modèles  $(T_n, n \geq 1)$  n'est pas la même que celle de la suite des arbres combinatoires de fragmentation associée. On a cependant pu montrer une convergence finie-dimensionnelle presque sûre dans le sens suivant : pour tout  $k \in \mathbb{N}$ , l'arbre  $T_n([k])$  à  $k$  feuilles obtenu

à partir de  $T_n$  en ne gardant que sa racine et les  $k$  premières feuilles, les feuilles étant numérotées par ordre d'apparition dans la construction séquentielle de Ford, converge presque sûrement, normalisé par  $n^\alpha$ , vers un sous-arbre de  $\mathcal{T}_{-\alpha, \nu_{\text{Ford}, \alpha}}$  à  $k$  feuilles dont on peut décrire la loi explicitement (voir [57]). Chen et Winkel [24] ont obtenu récemment la convergence en probabilité, au sens de Gromov-Hausdorff, des alpha-modèles de Ford normalisés.

Enfin, Chen, Ford et Winkel [23] proposent un modèle d'arbres se contruisant récursivement en ajoutant des arêtes et feuilles suivant des poids attribués aux noeuds et aux arêtes, généralisant et unifiant les constructions de Ford et Marchal. Ce modèle définit bien une famille d'arbres Markov branchante consistante. Chen, Ford et Winkel identifient les paramètres  $c, \nu$  associés et en déduisent les limites d'échelle de ces arbres grâce au théorème 17. A nouveau, Chen et Winkel [24] étendent cette convergence en loi à une convergence en probabilité.

Mentionnons pour terminer des exemples de familles d'arbres Markov branchantes non consistantes en général, introduites par Pitman et Winkel [79]. Il s'agit d'arbres binaires se construisant récursivement à partir de deux paramètres  $\alpha \in (0, 1)$  et  $\theta \geq 0$  suivant un schéma plus complexe que ceux développés ci-dessus et que nous ne détaillerons pas ici. Pitman et Winkel ont montré les convergences fini-dimensionnelles de ces arbres correctement normalisés dans un sens presque sûr. Le théorème 18 nous permet d'obtenir dans [56] la convergence en loi de ces arbres pour la topologie de Gromov-Hausdorff-Prokhorov.

#### 4.4.3 Arbres de Galton-Watson conditionnés

Le théorème 19 nous permet aussi de retrouver, avec une approche nouvelle, les résultats d'Aldous et Duquesne sur les limites d'échelle d'arbres de Galton-Watson conditionnés à avoir un grand nombre de noeuds (théorèmes 3 et 4 respectivement). Pour être plus précis, nous retrouvons ces résultats lorsque la loi de reproduction (critique) de l'arbre de Galton-Watson est de variance finie ou de la forme  $\eta_k \sim_\infty C/k^{1+\beta}$ . Le principe est bien sûr de montrer que les probabilités  $(\tilde{q}_n, n \geq 1)$  associées à ces familles d'arbres Markov branchantes vérifient l'hypothèse **(H2)** avec des mesures de dislocation stables à la limite, ce qu'on fait à l'aide de la formule d'Otter-Dwass [78, chapitre 6] liant les distributions d'arbres ou de forêts d'arbres de Galton-Watson conditionnés à avoir une certaine taille à celles de certaines marches aléatoires, et de théorèmes limites locaux pour les marches aléatoires ayant des sauts dans le domaine d'attraction d'une loi stable.

### 4.5 Remarques et perspectives

Drmota et Gittenberger ont étudié la convergence du profil des hauteurs normalisé des arbres de Pólya ([28]) et des arbres de Galton-Watson critiques de variance finie ([27]). On rappelle que le profil des hauteurs d'un arbre enraciné à  $n$  noeuds est la suite  $(P_n(k), k \geq 1)$  où  $P_n(k)$  est le nombre de noeuds situés à la hauteur  $k$ . Dans les cas des arbres de Pólya et de Galton-Watson critiques de variance finie, le processus  $(n^{-1/2}P_n(tn^{1/2}), t \in \mathbb{R}_+)$  – on construit le processus  $(P_n(t), t \in \mathbb{R}_+)$  à partir des  $P_n(k), k \geq 1$  par interpolation linéaire – converge en loi vers le processus des temps locaux de l'excursion brownienne normalisée (modulo une normalisation de ce processus limite). Citons par ailleurs [29, 31, 62] pour des résultats sur la convergence du profil des hauteurs d'arbres de Galton-Watson critiques de variance infinie.

Il est légitime d'espérer que le profil des hauteurs d'une famille d'arbres Markov branchante converge, correctement normalisé et sous l'hypothèse **(H2)**, vers le profil des hauteurs d'un arbre de fragmentation. A condition que le profil des hauteurs de l'arbre limite existe, ce qui, en gros, est le cas si l'indice d'auto-similarité de cet arbre appartient à  $(-1, 0)$ , comme on l'a déjà mentionné (voir [50] pour une condition suffisante plus précise). Nos résultats impliquent déjà la convergence du profil des hauteurs cumulé, il reste donc, en substance, à montrer un critère de tension pour le profil des hauteurs normalisé.





## Chapitre 5

# Equation de fragmentation et processus de Markov auto-similaires [53]

L'équation de fragmentation est une équation déterministe décrivant l'évolution temporelle d'un très grand nombre de particules sujettes à la fragmentation [72, 73]. Plus précisément, elle décrit l'évolution des distributions des masses des particules. Il s'agit donc d'une version macroscopique des modèles microscopiques de fragmentation aléatoires vus jusqu'à présent. Nous nous plaçons dans le cadre suivant :

- il n'y a pas de perte de masse lors de dislocations soudaines (système conservateur)
- le taux de fragmentation d'une particule est proportionnel à sa masse à la puissance  $\alpha \in \mathbb{R}$
- la distribution des masses relatives masses des particules filles/masse de la particule mère ne dépend que de ces masses relatives et pas de la masse de la mère.

Nous nous concentrons donc sur les fragmentations avec une dynamique auto-similaire, comme dans les cas aléatoires. La forme faible de l'équation de fragmentation s'écrit alors

$$\partial_t \langle \mu_t, f \rangle = \int_0^\infty x^\alpha \left( \int_0^1 (f(yx) - f(x)y) B(dy) \right) \mu_t(dx), \quad (5.1)$$

où  $(\mu_t, t \geq 0)$  est une famille de mesures sur  $(0, \infty)$ ,  $f$  une fonction test et  $B$  une mesure sur  $(0, 1)$  telle que

$$\int_0^1 y(1-y)B(dy) < \infty, \text{ et } B((0, 1)) > 0.$$

La quantité  $\mu_t(dx)$  représente la concentration de particules ayant une masse dans l'intervalle  $[x, x+dx)$  au temps  $t$ . L'équation (5.1) correspond alors aux modèles où des particules de masses  $xy$ ,  $0 < y < 1$ , sont produites suite à la fragmentation d'une particule de masse  $x$  au taux  $x^\alpha B(dy)$ . Remarquons que le taux global de fragmentation d'une particule de masse  $x$ ,  $x^\alpha \int_0^1 yB(dy)$ , peut-être infini. Nous noterons dans la suite

$$m(t) = \int_0^\infty x \mu_t(dx),$$

la masse totale de particules de masse strictement positive présentes au temps  $t$ .

**Définition 11.** Soit  $(\mu_t, t \geq 0)$  une famille de mesures sur  $(0, \infty)$ , telle que  $\int_0^\infty x \mu_0(dx) = 1$ . On dit que c'est une solution de l'équation de fragmentation (5.1) si

- $(\mu_t, t \geq 0)$  satisfait (5.1) pour toute fonction continûment dérivable  $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  à support compact
- $m(t) \leq m(0) = 1$ , pour tout  $t \geq 0$
- $\mu_0([M, \infty)) = 0 \Rightarrow \mu_t([M, \infty)) = 0$  pour tout  $t \geq 0$ , quel que soit  $M > 0$ .

On évite avec cette définition les solutions “non-physiques” (il en existe [7]) avec création de masse. Notons l’auto-similarité des solutions : si  $(\mu_t, t \geq 0)$  est une solution de l’équation de fragmentation, il en est de même pour  $(\gamma^{-1}\mu_{t\gamma^\alpha} \circ (\gamma \text{id})^{-1})$ , pour tout  $\gamma > 0$ , où  $\text{id}$  désigne l’application identité.

On reconnaît dans l’équation (5.1) le générateur d’un processus de Markov auto-similaire. Plus précisément, si on définit la fonction  $\tilde{f}$  à partir de  $f$  par  $\tilde{f}(x) = f(x)/x$ ,  $x > 0$ , l’équation (5.1) se réécrit

$$\partial_t \langle x\mu_t, \tilde{f} \rangle = \langle x\mu_t, G(\tilde{f}) \rangle$$

où  $G$  est l’opérateur défini à partir de la mesure  $B$  et du réel  $\gamma = -\alpha$  par (1.4). Introduisons donc la mesure  $\Pi$  sur  $(0, \infty)$ , image de  $xB(dx)$  par l’application  $x \mapsto -\ln(x)$ , et  $\xi$  le subordonateur (non tué, sans drift) de mesure de Lévy  $\Pi$ . Soit ensuite  $X$  le processus de Markov auto-similaire associé issu de  $X(0) \sim x\mu_0(dx)$ , défini par

$$X(t) = X(0) \exp(-\xi_\rho(X(0)^{\alpha t}), \quad t \geq 0$$

avec  $X(0)$  indépendante de  $\xi$  et  $\rho$  le changement de temps habituel construit à partir de  $\xi$  et  $\gamma = -\alpha$  par (1.2). Soit enfin  $(\mu_t, t \geq 0)$  la famille de mesures sur  $(0, \infty)$  définies pour toute fonction test  $f : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ ,  $f(0) = 0$ , par

$$\int_0^\infty f(x)x\mu_t(dx) = \mathbb{E}[f(X(t))].$$

La mesure  $x\mu_t(dx)$  n’est pas en général une mesure de probabilité sur  $(0, \infty)$  puisqu’elle ne tient pas compte du poids attribué par la loi de  $X(t)$  à 0. L’équation backward de Kolmogorov nous amène au résultat suivant :

**Théorème 21** ([48, 53]). *La famille  $(\mu_t, t \geq 0)$  est solution de l’équation (5.1) dès que  $\alpha \leq 0$ , ou  $\alpha > 0$  et  $\int_1^\infty x \ln(x)\mu_0(dx) < \infty$ . De plus cette solution est unique dès que  $\mu_0$  a un support borné.*

La variable  $X(t)$ , de loi  $x\mu_t(dx) + (1-m(t))\delta_0(dx)$ , représente alors la masse d’une particule typique au temps  $t$ . Cette construction des solutions à l’aide de processus de Markov auto-similaires fait le lien avec les processus de fragmentation auto-similaires, puisque le processus du fragment marqué est markovien auto-similaire et, par conséquent, la famille de mesures associée aux contributions strictement positives du fragment marqué est solution d’une certaine équation de fragmentation. Remarquons que nous ne récupérons pas de cette manière toutes les équations de fragmentation, la mesure de Lévy du fragment marqué devant respecter certaines contraintes, il en est de même pour la mesure  $B$  associée. Nous ne rentrerons pas plus dans ces détails et considérerons dans la suite l’équation de fragmentation sous sa forme générale (5.1).

Si les processus de fragmentation d’indice  $\alpha < 0$  s’éteignent presque sûrement en un temps fini, il n’en est pas de même pour le modèle déterministe : la masse  $m(t)$  est strictement positive pour tout  $t \geq 0$ ,  $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ . Plus précisément, pour toute solution à l’équation (5.1), la fonction  $m$  est constante égale à 1 si  $\alpha \geq 0$ , tandis qu’elle est strictement décroissante sur  $\mathbb{R}_+$  si  $\alpha < 0$  (voir [7, 41, 48, 53, 72, 84] pour des études relatives à ce phénomène de formation de poussière pour les équations de fragmentation). Il est alors naturel de s’interroger sur le comportement en temps grand de cette masse et plus généralement sur celui des solutions  $(\mu_t, t \geq 0)$ . Escobedo, Mischler et Rodriguez-Ricard [34] ont étudié cette question pour les indices  $\alpha > 0$ . Avec nos notations, et sous les hypothèses  $\int_0^\infty |\ln(x)|xB(dx) < \infty$ ,  $\alpha > 0$  et  $\mu_0 = \delta_1$ , ils obtiennent l’existence d’une mesure de probabilité  $\eta_\infty$  sur  $(0, \infty)$ , dépendant à la fois de  $B$  et  $\alpha$ , telle que

$$\int_0^\infty f(t^{1/\alpha}x)x\mu_t(dx) \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} \int_0^\infty f(x)\eta_\infty(dx),$$

pour toute fonction test  $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  continue bornée. Notons que ce résultat peut se retrouver via le théorème 21 ci-dessus et les résultats de Bertoin-Caballero [15] sur le comportement asymptotique des processus de Markov auto-similaires décroissants n’atteignant pas 0 en temps fini.

L'objectif du travail [53] est d'étudier les cas où  $\alpha$  est négatif, à l'aide des processus de Markov auto-similaires décroissants atteignant 0 en temps fini. Plus précisément, on va étudier les limites en loi de ces processus conditionnés à ne pas s'éteindre (limites de Yaglom) et leurs distributions quasi-stationnaires (lois stationnaires pour le processus conditionné à ne pas s'éteindre), ce qui a aussi un intérêt en tant que tel d'un point de vue probabiliste.

## 5.1 Limites de Yaglom et lois quasi-stationnaires des processus de Markov auto-similaires décroissants atteignant 0 en temps fini

Soit  $\xi$  un subordonateur non-tué, sans drift, de mesure de Lévy  $\Pi$ . Soit  $\alpha$  un réel strictement négatif et  $X$  le processus de Markov auto-similaire

$$X(t) := X(0) \exp(-\xi_{\rho(X(0)^\alpha t)}), \quad t \geq 0$$

avec  $X(0)$  strictement positive, indépendante de  $\xi$  et  $\rho$  le changement de temps habituel (1.2) avec  $\gamma = -\alpha$ . Le premier instant auquel  $X$  touche 0 est alors égal à  $X(0)^{|\alpha|}I$ , avec

$$I = \int_0^\infty \exp(\alpha \xi_r) dr.$$

On sera amené à faire l'hypothèse suivante :

$$u \mapsto \int_u^\infty \Pi(dx) \text{ varie régulièrement en } 0 \text{ avec indice } -\beta, \quad \beta \in [0, 1). \quad (\mathbf{H3})$$

On rappelle qu'une fonction  $r : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  est à variation régulière en 0 (respectivement  $\infty$ ) d'indice  $\gamma \in \mathbb{R}$  si  $r(x) = x^\gamma \ell(x)$ ,  $x > 0$ , pour une fonction  $\ell$  à variation lente en 0 (respectivement  $\infty$ ). Soit  $\psi$  l'exposant de Laplace du subordonateur  $\xi$  et  $\varphi$  l'inverse de la fonction  $t \mapsto t/\psi(t)$  (inverse bien défini dans un voisinage de l'infini). D'après les théorèmes abéliens-tauberiens de Karamata (voir [18]), l'hypothèse **(H3)** est équivalente à la variation régulière de  $\psi$  à l'infini avec un indice  $\beta$ , ou encore à celle  $\varphi$  à l'infini avec indice  $1/(1 - \beta)$ .

**Comportement asymptotique des probabilités  $\mathbb{P}(I > t)$ .** Le résultat suivant est un point-clé dans l'étude du comportement asymptotique de la loi de la variable  $X(t)$  conditionnée à être strictement positive. Il nous donnera par ailleurs le comportement en temps grand de la masse totale  $m(t)$  dans l'équation de fragmentation associée.

**Proposition 3** (Rivero [80] pour  $\beta \in (0, 1)$ , [53] pour  $\beta = 0$ ). *Sous l'hypothèse **(H3)**, la fonction  $t \mapsto \ln(\mathbb{P}(I > t))$  varie régulièrement à l'infini avec indice  $1/(1 - \beta)$ . Plus précisément,*

$$-\ln(\mathbb{P}(I > t)) \underset{\infty}{\sim} (1 - \beta) |\alpha|^{\beta/(1-\beta)} \varphi(t).$$

**Limites de Yaglom.** On va supposer dans ce qui suit que le support de la loi de  $X(0)$  est borné et que son supremum est égal à 1, c'est-à-dire

$$\mathbb{P}(X(0) > 1) = 0, \quad \mathbb{P}(X(0) > 1 - \varepsilon) > 0, \quad \forall \varepsilon > 0.$$

Les résultats ci-dessous s'étendent à n'importe quelle valeur de ce supremum, en utilisant l'auto-similarité du processus  $X$ .

**Théorème 22** ([53]). *Supposons **(H3)** et  $\int^\infty x \Pi(dx) < \infty$ . Alors, pour toute fonction continue bornée  $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,*

$$\mathbb{E} \left[ f \left( \left( \frac{\varphi(|\alpha|t)}{|\alpha|t} \right)^{1/|\alpha|} X(t) \right) \middle| X(t) > 0 \right] \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \mathbb{E} \left[ f(R^{1/|\alpha|}) \right]$$

où  $R$  est la variable intervenant dans la factorisation exponentielle (1.6).

Remarquons qu'il n'y a que les cas où la mesure de Lévy est finie où la loi de  $X(t)|X(t) > 0$  converge vers une limite non-triviale. Dans les autres cas,  $X(t)|X(t) > 0$  converge en loi vers la mesure de Dirac en 0 et il faut normaliser le processus pour obtenir une limite non-triviale.

La preuve du théorème 22 repose sur l'identité en loi

$$\left(X(0)^{|\alpha|}I - t\right)^+ \stackrel{\text{loi}}{=} X(t)^{|\alpha|}\tilde{I} \quad (5.2)$$

où  $\tilde{I}$  est une variable indépendante de  $X$ , de même loi que  $I$ . Regarder le comportement en loi et en temps grand de la variable  $X(t)$  conditionnée à être strictement positive revient alors à étudier celui de la variable  $X(0)^{|\alpha|}I - t$  conditionnellement à  $X(0)^{|\alpha|}I > t$ , ce que l'on fait à l'aide du résultat de variation régulière de la proposition 3.

**Lois quasi-stationnaires.** Une loi quasi-stationnaire pour  $X$  est une mesure de probabilité  $\varsigma$  sur  $(0, \infty)$  telle que

$$X(0) \sim \varsigma \Rightarrow X(t)|X(t) > 0 \sim \varsigma, \quad \forall t \geq 0.$$

Le résultat suivant est vrai sous la seule hypothèse  $\alpha < 0$ .

**Proposition 4** ([53]). *Les distributions des variables  $\lambda R^{1/|\alpha|}$ ,  $\lambda > 0$ , sont des lois quasi-stationnaires pour  $X$  et ce sont les seules. De plus, si  $X(0) \sim \lambda R^{1/|\alpha|}$ ,*

$$\mathbb{P}(X(t) > 0) = \exp(-\lambda^\alpha t), \quad \forall t \geq 0.$$

Ce résultat est une simple conséquence de la factorisation exponentielle (1.6), de l'identité en loi (5.2) et du fait que sous l'hypothèse de quasi-stationnarité du processus markovien  $X$ , son temps de mort,  $X(0)^{|\alpha|}I$ , suit nécessairement une loi exponentielle.

## 5.2 Comportement asymptotique des solutions de l'équation de fragmentation en temps grand

Ce paragraphe ne fait que traduire les résultats de la section précédente en terme d'équations de fragmentation, à l'aide du théorème 21. On supposera donc ici que  $\alpha < 0$ , que le support de  $\mu_0$  a un supremum fini égal à 1 et que l'application  $u \mapsto \int_0^{1-u} xB(dx)$  varie régulièrement en 0 avec un indice  $-\beta \in (-1, 0]$  (c'est l'équivalent de l'hypothèse **(H3)**). La famille  $(\mu_t, t \geq 0)$  désigne l'unique solution de l'équation (5.1) issue de  $\mu_0$  et la fonction  $\varphi$  est celle construite dans la section précédente à partir de la mesure de Lévy  $\Pi$ , elle même construite à partir de la mesure  $B$ .

**Théorème 23** ([53]). *Sous ces hypothèses,*

(i)

$$-\ln(m(t)) \underset{t \rightarrow \infty}{\sim} (1 - \beta)|\alpha|^{\beta/(1-\beta)}\varphi(t);$$

(ii) *si de plus  $\int_0 |\ln(x)|xB(dx) < \infty$ ,*

$$\frac{1}{m(t)} \int_0^\infty f \left( \left( \frac{\varphi(|\alpha|t)}{|\alpha|t} \right)^{1/|\alpha|} x \right) x\mu_t(dx) \underset{t \rightarrow \infty}{\rightarrow} \int_0^\infty f(x)x\mu_\infty(dx),$$

*pour toute fonction test continue bornée  $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ , où  $x\mu_\infty(dx)$  est la loi de la variable  $R^{1/|\alpha|}$ ,  $R$  intervenant dans la factorisation exponentielle (1.6).*

**Remarque.** Grâce à l'hypothèse de variation régulière **(H3)**, on obtient des informations sur les queues de distribution de  $\mu_\infty$  en 0 et à l'infini. Par exemple, si  $\beta \in (0, 1)$ ,

$$-\ln \left( \int_x^\infty y \mu_\infty(dy) \right) \underset{x \rightarrow \infty}{\sim} \frac{\beta}{|\alpha|} \psi^{-1}(x^{|\alpha|})$$

en particulier, ce logarithme varie régulièrement avec indice  $|\alpha|/\beta$  à l'infini. Tandis que lorsque  $\int_0^1 xB(dx) < \infty$ ,  $\mu_\infty$  a un support borné. De même, on voit facilement que  $\int_0^x y \mu_\infty(dy)$  décroît au moins à la vitesse  $x^{|\alpha|-\varepsilon}$ ,  $\forall \varepsilon > 0$ , quand  $x \rightarrow 0$ .

Il est intéressant de comparer la convergence du théorème 23 à celle d'Escobedo, Mischler et Rodriguez-Ricard lorsque l'indice  $\alpha$  est positif : la vitesse de décroissance d'une masse typique (nécessairement non nulle) est alors proportionnelle à  $t^{-1/\alpha}$  et ne dépend donc pas de la mesure  $B$ , tandis que pour les indices  $\alpha$  négatifs, la vitesse de décroissance d'une masse typique non nulle est proportionnelle à  $t^{-\beta/((1-\beta)|\alpha|)}$  (sous l'hypothèse **(H3)** et lorsque la fonction à variation régulière est une fonction puissance) et dépend donc fortement du taux de formation des masses relatives filles/mères proches de 1.

Notons que les résultats du théorème 23 peuvent être étendus, dans une certaine mesure, aux cas où  $\mu_0$  a un support non-borné. Par exemple, si  $\mu_0$  a une densité  $u_0$  par rapport à la mesure de Lebesgue sur  $(0, \infty)$  dont le comportement à l'infini est du type  $\ln(u_0(x)) \sim -Cx^\gamma$ ,  $\gamma > 0$ , on montre que  $\ln(m(t))$  varie régulièrement à l'infini avec indice  $1/(1 - \beta + |\alpha|/\gamma)$  (toujours sous l'hypothèse **(H3)**). On obtient également des résultats sur le comportement asymptotique des mesures  $\mu_t$ , mais l'énoncé de ces résultats est moins agréable que celui du théorème 23, car il repose sur des hypothèses assez contraignantes. Voir [53] pour plus de détails.

Nous terminons cette section par l'étude des solutions quasi-stationnaires.

**Définition 12.** Une solution  $(\mu_t, t \geq 0)$  de l'équation (5.1) est quasi-stationnaire si

$$\mu_t = m(t)\mu_0, \quad \forall t \geq 0, \quad (m(t) = \langle \mu_t, \text{id} \rangle).$$

Posons pour  $\lambda > 0$ ,

$$\mu_\infty^{(\lambda)} = \lambda^{-1} \mu_\infty \circ (\lambda \text{id})^{-1}.$$

La première partie du résultat suivant est une conséquence de la proposition 4. La deuxième, par contre, nécessite un petit travail supplémentaire, puisque nous ne savons pas si la solution construite à partir d'un processus de Markov auto-similaire est unique lorsque la mesure initiale a un support non borné. On ne fait pas d'hypothèse dans le théorème qui suit sur la mesure  $B$ .

**Théorème 24** ([53]). Soit  $\alpha < 0$ .

(i) Pour  $\lambda > 0$ , soit  $(\mu_{\infty,t}^{(\lambda)}, t \geq 0)$  la solution de l'équation (5.1) issue de  $\mu_\infty^{(\lambda)}$  et construite à partir d'un subordonateur. Alors,

$$\mu_{\infty,t}^{(\lambda)} = \exp(-\lambda^\alpha t) \mu_\infty^{(\lambda)} = m(t) \mu_\infty^{(\lambda)}, \quad \forall t \geq 0.$$

(ii) Il n'y a pas d'autres solutions quasi-stationnaires.

### 5.3 Remarques et perspectives

Dans un travail en cours avec Víctor Rivero, nous étudions les limites de Yaglom de processus de Markov auto-similaires issus de 1 s'éteignant en temps fini, sans hypothèse de monotonie. On montre que l'existence de ces limites est équivalente à l'appartenance du temps d'extinction  $I$  du processus au

domaine d'attraction d'une loi extrême. Deux différents types de régimes peuvent alors être observés, suivant que  $I$  est dans le domaine d'attraction d'une loi de Gumbel (qui correspond au cas traité ici des processus décroissants) ou que  $I$  est dans le domaine d'attraction d'une loi de Fréchet (la bonne normalisation consiste alors à diviser le processus au temps  $t$  par  $t$ ). On obtient des conditions nécessaires et des conditions suffisantes sur le processus de Lévy sous-jacent pour que la variable  $I$  appartienne à ces domaines d'attraction. Concernant le cas traité ici, une question reste ouverte : la condition de variation régulière **(H3)** est-elle nécessaire pour avoir une limite de Yaglom ? Le lien avec les lois extrêmes laisse penser que la réponse pourrait être non. Cependant, pour l'instant, nous n'avons ni réussi à obtenir un exemple allant dans ce sens, ni réussi à montrer la nécessité de la variation régulière.

# Bibliographie

- [1] Romain ABRAHAM et Jean-François DELMAS : Williams' decomposition of the Lévy continuum random tree and simultaneous extinction probability for populations with neutral mutations. *Stochastic Process. Appl.*, 119(4):1124–1143, 2009.
- [2] David ALDOUS : The continuum random tree. I. *Ann. Probab.*, 19(1):1–28, 1991.
- [3] David ALDOUS : The continuum random tree. II. An overview. In *Stochastic analysis*, volume 167 de *London Math. Soc. Lecture Note Ser.*, pages 23–70. Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1991.
- [4] David ALDOUS : The continuum random tree. III. *Ann. Probab.*, 21(1):248–289, 1993.
- [5] David ALDOUS : Probability distributions on cladograms. In *Random discrete structures*, volume 76 de *IMA Vol. Math. Appl.*, pages 1–18. Springer, New York, 1996.
- [6] David ALDOUS et Jim PITMAN : The standard additive coalescent. *Ann. Probab.*, 26(4):1703–1726, 1998.
- [7] Jacek BANASIAK : Conservative and shattering solutions for some classes of fragmentation models. *Math. Models Methods Appl. Sci.*, 14(4):483–501, 2004.
- [8] Julien BERESTYCKI : Ranked fragmentations. *ESAIM Probab. Statist.*, 6:157–175, 2002.
- [9] Julien BERESTYCKI : Multifractal spectra of fragmentation processes. *J. Statist. Phys.*, 113(3–4):411–430, 2003.
- [10] Julien BERESTYCKI, Jean BERTOIN, Grégory MIERMONT et Bénédicte HAAS : Quelques aspects fractals des fragmentations aléatoires. À paraître dans un tome de la collection *Panoramas et synthèses*.
- [11] Jean BERTOIN : Homogeneous fragmentation processes. *Probab. Theory Relat. Fields*, 121(3):301–318, 2001.
- [12] Jean BERTOIN : Self-similar fragmentations. *Ann. Inst. H. Poincaré Probab. Statist.*, 38(3):319–340, 2002.
- [13] Jean BERTOIN : The asymptotic behavior of fragmentation processes. *J. Eur. Math. Soc. (JEMS)*, 5(4):395–416, 2003.
- [14] Jean BERTOIN : *Random fragmentation and coagulation processes*, volume 102 de *Cambridge Studies in Advanced Mathematics*. Cambridge University Press, Cambridge, 2006.
- [15] Jean BERTOIN et Maria-Emilia CABALLERO : Entrance from  $0+$  for increasing semi-stable Markov processes. *Bernoulli*, 8(2):195–205, 2002.
- [16] Jean BERTOIN et Marc YOR : Exponential functionals of Lévy processes. *Probab. Surv.*, 2:191–212, 2005.
- [17] Philippe BIANE, Jim PITMAN et Marc YOR : Probability laws related to the Jacobi theta and Riemann zeta functions, and Brownian excursions. *Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.)*, 38(4):435–465, 2001.
- [18] Nicholas BINGHAM, Charles GOLDIE et Jozef TEUGELS : *Regular variation*, volume 27 de *Encyclopedia of Mathematics and its Applications*. Cambridge University Press, Cambridge, 1989.

- [19] Michael BRENNAN et Richard DURRETT : Splitting intervals. *Ann. Probab.*, 14(3):1024–1036, 1986.
- [20] Michael BRENNAN et Richard DURRETT : Splitting intervals. II. Limit laws for lengths. *Probab. Theory Related Fields*, 75(1):109–127, 1987.
- [21] Dmitri BURAGO, Yuri BURAGO et Sergei IVANOV : *A course in metric geometry*, volume 33 de *Graduate Studies in Mathematics*. American Mathematical Society, Providence, RI, 2001.
- [22] Philippe CARMONA, Frédérique PETIT et Marc YOR : On the distribution and asymptotic results for exponential functionals of Lévy processes. In *Exponential functionals and principal values related to Brownian motion*, *Bibl. Rev. Mat. Iberoamericana*, pages 73–130. *Rev. Mat. Iberoamericana*, Madrid, 1997.
- [23] Bo CHEN, Daniel FORD et Matthias WINKEL : A new family of Markov branching trees : the alpha-gamma model. *Electron. J. Probab.*, 14:400–430, 2009.
- [24] Bo CHEN et Matthias WINKEL : Restricted exchangeable partitions and embedding of associated hierarchies in continuum random trees. 2010. ArXiv :0911.5647.
- [25] David CROYDON et Ben HAMBLY : Spectral asymptotics for stable trees. 2010. ArXiv :1006.1570.
- [26] Andreas DRESS et Werner TERHALLE : The real tree. *Adv. Math.*, 120(2):283–301, 1996.
- [27] Michael DRMOTA et Bernhard GITTENBERGER : On the profile of random trees. *Random Structures Algorithms*, 10(4):421–451, 1997.
- [28] Michael DRMOTA et Bernhard GITTENBERGER : The shape of unlabeled rooted random trees. 2010. ArXiv :1003.1322.
- [29] Thomas DUQUESNE : A limit theorem for the contour process of conditioned Galton-Watson trees. *Ann. Probab.*, 31(2):996–1027, 2003.
- [30] Thomas DUQUESNE : Continuum random trees and branching processes with immigration. *Stochastic Process. Appl.*, 119(1):99–129, 2009.
- [31] Thomas DUQUESNE et Jean-François LE GALL : Random trees, Lévy processes and spatial branching processes. *Astérisque*, (281):vi+147, 2002.
- [32] Thomas DUQUESNE et Jean-François LE GALL : Probabilistic and fractal aspects of Lévy trees. *Probab. Theory Related Fields*, 131(4):553–603, 2005.
- [33] Thomas DUQUESNE et Jean-François LE GALL : On the re-rooting invariance property of Lévy trees. *Electron. Commun. Probab.*, 14:317–326, 2009.
- [34] Miguel ESCOBEDO, Stéphane MISCHLER et Mariano RODRIGUEZ RICARD : On self-similarity and stationary problem for fragmentation and coagulation models. *Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire*, 22(1):99–125, 2005.
- [35] Steven EVANS : *Probability and real trees*, volume 1920 de *Lecture Notes in Mathematics*. Springer, Berlin, 2008. Lectures from the 35th Summer School on Probability Theory held in Saint-Flour, July 6–23, 2005.
- [36] Steven EVANS, Jim PITMAN et Anita WINTER : Rayleigh processes, real trees, and root growth with re-grafting. *Probab. Theory Related Fields*, 134(1):81–126, 2006.
- [37] Steven EVANS et Anita WINTER : Subtree prune and regraft : a reversible real tree-valued Markov process. *Ann. Probab.*, 34(3):918–961, 2006.
- [38] A.F. FILIPPOV : On the distribution of the sizes of particles which undergo splitting. *Theory Probab. Appl.*, 6:275–294, 1961.
- [39] Philippe FLAJOLET et Robert SEDGEWICK : *Analytic combinatorics*. Cambridge University Press, Cambridge, 2009.
- [40] Daniel FORD : Probabilities on cladograms : introduction to the alpha model. 2005. ArXiv :math.PR/0511246.



- [41] Nicolas FOURNIER et Jean-Sébastien GIET : On small particles in coagulation-fragmentation equations. *J. Statist. Phys.*, 111(5-6):1299–1329, 2003.
- [42] Alexander GNEDIN, Alex IKSANOV et Martin MÖHLE : On asymptotics of exchangeable coalescents with multiple collisions. *J. Appl. Probab.*, 45(4):1186–1195, 2008.
- [43] Alexander GNEDIN et Jim PITMAN : Regenerative composition structures. *Ann. Probab.*, 33(2):445–479, 2005.
- [44] Alexander GNEDIN, Jim PITMAN et Marc YOR : Asymptotic laws for compositions derived from transformed subordinators. *Ann. Probab.*, 34(2):468–492, 2006.
- [45] Alexander GNEDIN et Yuri YAKUBOVICH : On the number of collisions in  $\Lambda$ -coalescents. *Electron. J. Probab.*, 12:no. 56, 1547–1567, 2007.
- [46] Christina GOLDSCHMIDT et Bénédicte HAAS : Behavior near the extinction time in self-similar fragmentations I : the stable case. *Ann. Inst. H. Poincaré Probab. Statist.*, 46:338–368, 2010.
- [47] Misha GROMOV : *Metric structures for Riemannian and non-Riemannian spaces*. Modern Birkhäuser Classics. Birkhäuser Boston Inc., Boston, MA, 2007.
- [48] Bénédicte HAAS : Loss of mass in deterministic and random fragmentations. *Stochastic Process. Appl.*, 106(2):245–277, 2003.
- [49] Bénédicte HAAS : Appearance of dust in fragmentations. *Commun. Math. Sci.*, 2(suppl. 1):65–73, 2004.
- [50] Bénédicte HAAS : Regularity of formation of dust in self-similar fragmentations. *Ann. Inst. H. Poincaré Probab. Statist.*, 40(4):411–438, 2004.
- [51] Bénédicte HAAS : Equilibrium for fragmentation with immigration. *Ann. Appl. Probab.*, 15(3):1958–1996, 2005.
- [52] Bénédicte HAAS : Fragmentation processes with an initial mass converging to infinity. *J. Theoret. Probab.*, 20:721–758, 2007.
- [53] Bénédicte HAAS : Asymptotic behavior of solutions of the fragmentation equation with shattering : an approach via self-similar markov processes. *Ann. Applied Probab.*, 20:382–429, 2010.
- [54] Bénédicte HAAS et Grégory MIERMONT : The genealogy of self-similar fragmentations with negative index as a continuum random tree. *Electron. J. Probab.*, 9:no. 4, 57–97, 2004.
- [55] Bénédicte HAAS et Grégory MIERMONT : Self-similar scaling limits of non-increasing Markov chains. 2009. ArXiv :0909.3764.
- [56] Bénédicte HAAS et Grégory MIERMONT : Scaling limits of Markov branching trees. 2010. ArXiv :1003.3632.
- [57] Bénédicte HAAS, Grégory MIERMONT, Jim PITMAN et Matthias WINKEL : Continuum tree asymptotics of discrete fragmentations and applications to phylogenetic models. *Ann. Probab.*, 36(5):1790–1837, 2008.
- [58] Bénédicte HAAS, Jim PITMAN et Matthias WINKEL : Spinal partitions and invariance under re-rooting of continuum random trees. *Ann. Probab.*, 37(4):1381–1411, 2009.
- [59] Alex IKSANOV, Alex MARYNYCH et Martin MÖHLE : On the number of collisions in beta(2,b)-coalescents. *Bernoulli*, 15(3):829–845, 2009.
- [60] Alex IKSANOV et Martin MÖHLE : On the number of jumps of random walks with a barrier. *Adv. in Appl. Probab.*, 40(1):206–228, 2008.
- [61] Douglas KENNEDY : The distribution of the maximum Brownian excursion. *J. Appl. Probability*, 13(2):371–376, 1976.
- [62] Götz KERSTING : On the height profile of a conditioned Galton-Watson tree. 1998. Non publié.

- [63] Andreï KOLMOGOROV : Über das logarithmisch normale verteilungsgesetz der dimensionen der teilchen bei zerstückelung. *C.R. Acad. Sci. U.R.S.S.*, 31:99–101, 1941.
- [64] Nathalie KRELL : Multifractal spectra and precise rates of decay in homogeneous fragmentations. *Stochastic Process. Appl.*, 118(6):897–916, 2008.
- [65] Amaury LAMBERT : The genealogy of continuous-state branching processes with immigration. *Probab. Theory Related Fields*, 122(1):42–70, 2002.
- [66] John LAMPERTI : Semi-stable stochastic processes. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 104:62–78, 1962.
- [67] John LAMPERTI : Semi-stable Markov processes. I. *Z. Wahrscheinlichkeitstheorie und Verw. Gebiete*, 22:205–225, 1972.
- [68] Jean-François LE GALL : Random real trees. *Ann. Fac. Sci. Toulouse Math. (6)*, 15(1):35–62, 2006.
- [69] Jean-François LE GALL et Yves LE JAN : Branching processes in Lévy processes : the exploration process. *Ann. Probab.*, 26(1):213–252, 1998.
- [70] Philippe MARCHAL : A note on the fragmentation of a stable tree. *In Fifth Colloquium on Mathematics and Computer Science*, Discrete Math. Theor. Comput. Sci. Proc., AI, pages 489–499. Assoc. Discrete Math. Theor. Comput. Sci., Nancy, 2008.
- [71] Jean-François MARCKERT et Grégory MIERMONT : The CRT is the scaling limit of unordered binary trees. *Random Structures and Algorithms*, 2010. To appear. ArXiv :0902.4570.
- [72] E. D. MCGRADY et Robert ZIFF : “Shattering” transition in fragmentation. *Phys. Rev. Lett.*, 58(9):892–895, 1987.
- [73] Zdzislaw MELZAK : A scalar transport equation. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 85:547–560, 1957.
- [74] Grégory MIERMONT : Self-similar fragmentations derived from the stable tree. I. Splitting at heights. *Probab. Theory Related Fields*, 127(3):423–454, 2003.
- [75] Grégory MIERMONT : Self-similar fragmentations derived from the stable tree. II. Splitting at nodes. *Probab. Theory Related Fields*, 131(3):341–375, 2005.
- [76] Richard OTTER : The number of trees. *Ann. of Math. (2)*, 49:583–599, 1948.
- [77] Jim PITMAN : Coalescents with multiple collisions. *Ann. Probab.*, 27(4):1870–1902, 1999.
- [78] Jim PITMAN : *Combinatorial stochastic processes*, volume 1875 de *Lecture Notes in Mathematics*. Springer-Verlag, Berlin, 2006. Lectures from the 32nd Saint-Flour Summer School on Probability Theory.
- [79] Jim PITMAN et Matthias WINKEL : Regenerative tree growth : binary self-similar continuum random trees and Poisson-Dirichlet compositions. *Ann. Probab.*, 37(5):1999–2041, 2009.
- [80] Víctor RIVERO : A law of iterated logarithm for increasing self-similar Markov processes. *Stoch. Stoch. Rep.*, 75(6):443–472, 2003.
- [81] Chris ROGERS et David WILLIAMS : *Diffusions, Markov processes, and martingales. Vol. 2 Itô calculus*. Cambridge Mathematical Library. Cambridge University Press, Cambridge, 2000.
- [82] Serik SAGITOV : The general coalescent with asynchronous mergers of ancestral lines. *J. Appl. Probab.*, 36(4):1116–1125, 1999.
- [83] Gerónimo URIBE BRAVO : The falling apart of the tagged fragment and the asymptotic disintegration of the Brownian height fragmentation. *Ann. Inst. Henri Poincaré Probab. Stat.*, 45(4):1130–1149, 2009.
- [84] Wolfgang WAGNER : Explosion phenomena in stochastic coagulation-fragmentation models. *Ann. Appl. Probab.*, 15(3):2081–2112, 2005.