Probabilités
L2 de Mathématiques année 2018 – 19
Université Paris 13

Partiel n°1 – Jeudi 8 novembre 2018

Durée : 2h.
Les calculatrices, documents, téléphones portables, etc., sont interdits.

La clarté et la précision des raisonnements et énoncés entreront pour une part importante dans la notation. Les réponses non justifiées ne seront pas prises en compte. Vous pouvez traiter les exercices dans l'ordre que vous souhaitez.

Exercice 1. Questions de cours.

1. Soit Ω un ensemble fini ou dénombrable. Donner la définition d'une probabilité $\mathbb{P}$ sur $\mathcal{P}(\Omega)$.
2. Soit $(\Omega, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et A, B deux événements tels que $A \subset B$. Démontrer que $\mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(B)$.
3. Donner la définition de l'indépendance de trois événements A, B, C.
4. Soit X une variable aléatoire réelle et $p \in [0, 1]$. Dire ce que signifie que X suit une loi de Bernoulli de paramètre p. Montrer, à l'aide d'un exemple, qu'il existe deux v.a. différentes suivant la même loi de Bernoulli de paramètre $1/2$.

Exercice 2. Vous êtes perdu(e) dans le nouveau forum des Halles à Paris. Parmi les autres personnes présentes, il y a $2/3$ de clients et $1/3$ d'employés des Halles. Lorsqu'on lui pose une question, un client répond correctement avec probabilité $3/4$. Lorsqu'on lui pose une question, un employé répond toujours incorrectement. **Les réponses aux questions sont toutes indépendantes, même si la question et la personne sont les mêmes**. On note $(\Omega, \mathbb{P})$ un espace probabilisé modélisant cette expérience. *On ne demande pas de l'expliciter.* On introduit les événements suivants :

C=“la personne interrogée est un(e) client(e)",

E=“la personne interrogée est un(e) employé(e)",

J_i=“les i premières réponses sont correctes", pour $i = 1$ et $i = 2$,

D=“les 2 premières réponses sont identiques".

Pour chacune des questions ci-dessous, vous justifierez soigneusement votre réponse et donnerez les noms des théorèmes utilisés.

1. Vous arrêtez une personne au hasard et lui demandez si la sortie est à l'est ou à l'ouest. Quelle est la probabilité que la réponse soit correcte ?

On distingue à présent deux cas.

2. Cas 1 : vous êtes de nature confiante. Vous vous dirigez donc vers le côté indiqué et réalisez finalement qu'il n'y a pas de sortie. Sachant que la réponse qu'on vous a donnée est incorrecte, quelle est la probabilité que la personne interrogée était un(e) employé(e) des Halles ?
3. Cas 2 : vous êtes de nature méfiante et décidez de reposer la même question à la même personne.
   (a) Quelle est la probabilité que la personne réponde les deux fois la même chose ?
   (b) Sachant qu'elle a répondu les deux fois la même chose, calculer la probabilité que cette réponse est correcte.

Exercice 3.

1. Montrer que $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$ pour tout entier $n \in \mathbb{N}$.
2. Soit désormais $n \geq 3$ et ℓ_n un entier, $1 \leq \ell_n \leq n$. On distribue au hasard, uniformément et indépendamment ℓ_n lettres dans n boîtes. On note p_n la probabilité que chaque boîte contienne au plus une lettre.
   (a) Montrer que
   $$p_n = \frac{A_n^{\ell_n}}{n^{\ell_n}},$$
   où $A_n^{\ell_n} = n!/(n-\ell_n)!$.
   (b) On suppose que $n \to \infty$ et que $\frac{\ell_n}{\sqrt{n}} \underset{n\to\infty}{\to} 1$. On admet que dans ce cas
   $$\frac{\sum_{i=1}^{\ell_n - 1}\left(-\ln(1-\frac{i}{n})\right)}{\sum_{i=1}^{\ell_n - 1}\frac{i}{n}} \underset{n\to\infty}{\to} 1.$$
   Montrer que p_n converge et déterminer sa limite quand $n \to \infty$.