

Quelques Aspects Fractals des Fragmentations Aléatoires*

Julien Berestycki [†] Jean Bertoin [‡] Bénédicte Haas [§]
Grégory Miermont [¶]

7 décembre 2010

*Ce travail a été réalisé dans le cadre du projet de l'ANR [SPINADA](#)

[†]Laboratoire de Probabilités et Modèles aléatoires, Université Pierre et Marie Curie, 4, Place Jussieu, F-75252 Paris Cedex 05 France, courriel : julien.berestycki@upmc.fr

[‡]Laboratoire de Probabilités et Modèles aléatoires, Université Pierre et Marie Curie, 4, Place Jussieu, F-75252 Paris Cedex 05 France, courriel : jean.bertoin@upmc.fr

[§]CEREMADE, Université Paris-Dauphine, Place du Maréchal De Lattre De Tassigny, 75775 Paris Cedex 16 France, courriel : haas@ceremade.dauphine.fr

[¶]Laboratoire de Mathématiques, Université Paris-Sud Bâtiment 425, 91405 Orsay Cedex, France, courriel : Gregory.Miermont@math.u-psud.fr

Table des matières

1	Préliminaires sur les processus de fragmentation	4
1.1	Quelques notations et définitions	4
1.2	Mesure de dislocation	6
1.2.1	Chaînes de fragmentation et représentation généalogique	6
1.2.2	Fragmentations avec dislocations immédiates	8
1.3	Le fragment marqué	11
1.3.1	Généalogie du fragment marqué	11
1.3.2	Loi du fragment marqué et premières applications	12
1.3.3	Martingales additives (cas homogène $\alpha = 0$)	16
2	Généalogie et dimension de Hausdorff : cas d'un indice négatif	19
2.1	Extinction	19
2.2	Un espace métrique naturel	21
2.2.1	Marquage d'un élément de ∂T au hasard	22
2.2.2	Propriété de Markov branchante	23
2.3	Dimension de Hausdorff de ∂T	24
2.3.1	Démonstration du théorème 14 : majoration	24
2.3.2	Démonstration du théorème 14 : minoration	27
2.4	Cas d'une fragmentation à dislocations immédiates	30
2.4.1	\mathbb{R} -arbres, arbres continus aléatoires	30
2.4.2	Arbres continus aléatoires et fragmentation	31
2.4.3	Exemples	33
2.5	Régularité de la masse de poussière M_P	34
3	Spectre multifractal des fragmentations homogènes	37
3.1	Fragment typique et plus grand fragment	37
3.2	Spectre multifractal	39
3.3	Preuve du théorème 19 : majoration	42
3.4	Preuve du théorème 19 : minoration	44
3.4.1	Taux de croissance et élagage	45
3.4.2	Preuve de la borne inférieure	46
3.5	Un raffinement	48
3.6	Commentaires	50

Nous nous intéressons à l'évolution d'objets qui se désagrègent de façon aléatoire au cours du temps, et pour lesquels les différents fragments évoluent indépendamment les uns des autres. Nous supposons également une propriété naturelle d'auto-similarité statistique qui confère à ces processus une structure de fractale aléatoire. L'objet de cette partie est d'en décrire certains aspects.

Dans une première section, nous présenterons les fondements de la théorie des fragmentations, et en particulier, nous verrons que la loi de tels processus est caractérisée par un indice d'auto-similarité, une mesure de dislocation et un coefficient d'érosion. L'étude de l'évolution d'un fragment marqué de façon aléatoire est un des aspects essentiels de cette théorie.

Dans la deuxième section, nous introduirons un arbre aléatoire muni d'une distance qui permet de décrire la généalogie du processus. Nous nous intéresserons à la dimension fractale de l'ensemble de ses feuilles, et à la régularité hölderienne du profil des hauteurs.

Enfin, dans une dernière section, nous nous pencherons sur la vitesse à laquelle décroît le fragment contenant un point donné. Nous verrons qu'à des points distincts peuvent correspondre des vitesses différentes. Ceci nous conduira naturellement à étudier le spectre multifractal des vitesses de fragmentation.

1 Préliminaires sur les processus de fragmentation

1.1 Quelques notations et définitions

Un processus de fragmentation décrit l'évolution d'un objet de masse totale égale à 1 qui se désagrège au cours du temps. On s'intéresse uniquement aux masses des fragments, et pas, par exemple, aux formes ou aux positions spatiales. On représentera donc l'état de la fragmentation par une partition de masse, c'est-à-dire une suite décroissante $\mathbf{s} = (s_1, s_2, \dots)$ de réels positifs ou nuls et de somme totale $\sum_{n=1}^{\infty} s_n \leq 1$. Ainsi le n -ème terme s_n correspond à la masse du n -ème plus gros fragment. Notons que l'on n'impose pas l'égalité $\sum_{n=1}^{\infty} s_n = 1$ afin de pouvoir prendre en compte les situations dans lesquelles une partie de l'objet a été réduite en poussière, c'est-à-dire en particules infinitésimales, chacune étant de masse nulle. On notera $s_0 = 1 - \sum_{n=1}^{\infty} s_n$ la masse de poussière d'une partition de masse \mathbf{s} , et on dira que \mathbf{s} est propre si elle n'a pas de poussière, c'est-à-dire si $s_0 = 0$. Enfin, on désignera par

$$\mathcal{P}_m := \left\{ \mathbf{s} = (s_1, s_2, \dots) : s_1 \geq s_2 \geq \dots \geq 0 \text{ et } \sum_{i=1}^{\infty} s_i \leq 1 \right\}$$

l'espace des partitions de masse. On munit \mathcal{P}_m de la distance uniforme

$$d(\mathbf{s}, \mathbf{s}') := \max_{i \in \mathbb{N}} |s_i - s'_i|,$$

qui en fait un espace métrique compact.

Considérons maintenant un processus aléatoire markovien

$$X(t) = (X_1(t), X_2(t), \dots), \quad t \geq 0$$

à valeurs dans l'espace des partitions de masse \mathcal{P}_m . On supposera que le processus $X = (X(t), t \geq 0)$ a des trajectoires continues à droite et pourvues de limite à gauche (en abrégé, càdlàg) ; c'est-à-dire que presque-sûrement, l'application $t \rightarrow X(t)$ de $\mathbb{R}_+ \rightarrow \mathcal{P}_m$ est continue à droite et admet une limite à gauche notée $X(t-)$ en tout temps $t > 0$. Pour tout $0 \leq r \leq 1$, on note \mathbb{P}_r la loi du processus X lorsque l'état initial est donné par $X(0) = (r, 0, \dots)$, c'est-à-dire lorsqu'au temps initial il n'y a qu'un seul fragment de masse r .

Définition 1. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On dit que X est une fragmentation auto-similaire d'indice α si les deux propriétés suivantes sont vérifiées :

(i) Pour tout $r \in [0, 1]$, sous la mesure de probabilités \mathbb{P}_1 , le processus changé d'échelle

$$rX(r^\alpha t), \quad t \geq 0$$

a pour loi \mathbb{P}_r .

(ii) Pour toute partition de masse $\mathbf{s} = (s_1, s_2, \dots)$, considérons une suite de processus indépendants $X^{(1)}, X^{(2)}, \dots$ de lois respectives $\mathbb{P}_{s_1}, \mathbb{P}_{s_2}, \dots$. Notons encore $\tilde{X}(t)$ la partition de masse aléatoire obtenue par le réarrangement décroissant des termes des partitions de masse $X^{(1)}(t), X^{(2)}(t), \dots$. Alors le processus \tilde{X} est une version du processus X issu de la partition de masse \mathbf{s} .

La première partie de la définition 1 énonce une propriété d'auto-similarité qui permet de décrire l'évolution en loi de la fragmentation d'une masse r en fonction de celle d'une masse unité. La seconde est une propriété de type branchement : des fragments distincts évoluent indépendamment les uns des autres. Ces deux conditions nous permettent de nous concentrer pour la suite sur la situation où le processus part de l'état $\mathbf{1} = (1, 0, \dots)$, c'est-à-dire lorsqu'au temps initial on a un unique fragment de masse 1. Désormais, nous travaillerons implicitement sous la loi $\mathbb{P} := \mathbb{P}_1$.

Il est intuitivement évident que l'indice α joue un rôle crucial dans l'évolution d'une fragmentation auto-similaire. En effet, puisque la masse de chaque fragment diminue au cours du temps, les taux de dislocation des fragments croissent (respectivement, décroissent) avec le temps lorsque $\alpha < 0$ (respectivement, lorsque $\alpha > 0$). Pour $\alpha = 0$, les taux de dislocation ne dépendent pas de la masse des fragments ; on dit que la fragmentation est *homogène*.

Il est parfois commode d'utiliser l'intervalle $]0, 1[$ et ses ouverts pour représenter les partitions de masses et les fragmentations. Plus précisément, désignons par \mathcal{O} l'ensemble des ouverts O de $]0, 1[$. On définit la distance entre deux ouverts O et O' comme la distance de Hausdorff entre les fermés $F = [0, 1] \setminus O$ et $F' = [0, 1] \setminus O'$; ainsi \mathcal{O} devient un espace compact. Tout ouvert $O \in \mathcal{O}$ admet une décomposition canonique en intervalles ouverts deux à deux disjoints, et on peut associer à O la partition de masse $|O|^\downarrow$ obtenue comme la suite des longueurs des intervalles qui composent O , ordonnée de façon décroissante. Notons que dans cette situation, la masse totale de la poussière correspond à la mesure de Lebesgue du complémentaire $F = [0, 1] \setminus O$. L'application continue $O \rightarrow |O|^\downarrow$ n'est bien sûr pas injective, car il existe en général de nombreuses manières de représenter une partition de masse par un ouvert (de façon informelle, choisir une telle représentation revient à ordonner de gauche à droite les fragments d'une partition de masse).

On peut toujours représenter une fragmentation auto-similaire X à valeurs dans \mathcal{P}_m comme une fragmentation de l'intervalle $]0, 1[$, c'est-à-dire comme l'image par l'application $O \rightarrow |O|^\downarrow$ d'un processus de Markov $\Theta = (\Theta(t), t \geq 0)$ à valeurs dans l'espace \mathcal{O} des ouverts de $]0, 1[$, qui a des trajectoires càdlàg et vérifie les deux propriétés suivantes.

Notons tout d'abord \mathbf{P}_O la loi du processus Θ issu d'un ouvert arbitraire $O \in \mathcal{O}$. Pour tout intervalle $]a, b[\in \mathcal{O}$, désignons par $g_{]a, b[} :]0, 1[\rightarrow]a, b[$ l'homéomorphisme canonique donné par $g_{]a, b[}(x) = a + (b - a)x$. Alors $\mathbf{P}_{]a, b[}$ coïncide avec la loi sous $\mathbf{P}_{]0, 1[}$ du processus image $(g_{]a, b[}(\Theta(|b - a|^\alpha t)), t \geq 0)$ par l'homéomorphisme canonique $g_{]a, b[}$. Cette condition est le pendant de la propriété d'auto-similarité (i) de la définition 1. Ensuite, pour tout ouvert O dont la représentation canonique en intervalles ouverts deux à deux disjoints est, disons, $O = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} I_n$, considérons des versions indépendantes $\Theta^{(1)} = (\Theta^{(1)}(t), t \geq 0)$, $\Theta^{(2)} = (\Theta^{(2)}(t), t \geq 0)$, ..., de lois respectives \mathbf{P}_{I_1} , \mathbf{P}_{I_2} , ... Observons que par construction, pour tout $t \geq 0$, les ouverts aléatoires $\Theta^{(1)}(t)$, $\Theta^{(2)}(t)$, ... sont deux à deux disjoints, et posons $\tilde{\Theta}(t) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \Theta^{(n)}(t)$. Alors le processus $\tilde{\Theta} = (\tilde{\Theta}(t), t \geq 0)$ a pour loi \mathbf{P}_O ; c'est le pendant de la propriété de branchement (ii) de la définition 1. On remarquera que la famille d'ouverts aléatoires $(\Theta(t), t \geq 0)$ est alors emboîtée, dans le sens où $\Theta(t') \subseteq \Theta(t)$ pour $t \leq t'$.

Nous renvoyons à [6] et [10] pour les détails de la construction d'une telle représentation de X par une fragmentation d'intervalle (qui, bien sûr, n'est pas unique en général).

1.2 Mesure de dislocation

De façon informelle, on caractérise souvent la distribution d'un processus aléatoire en décrivant son évolution sur un intervalle de temps infinitésimal. C'est le cas notamment des diffusions qui sont obtenues comme solution d'une équation différentielle stochastique, et, plus généralement, des processus markoviens dont la distribution est déterminée analytiquement par un générateur infinitésimal. De ce point de vue, l'objet fondamental pour l'étude des fragmentations est la notion de mesure de dislocation, qui, comme son nom l'indique, permet de décrire la loi des dislocations soudaines.

Afin de mieux comprendre comment cette notion intervient, nous allons tout d'abord nous pencher sur le cas plus simple où chaque fragment reste stable pendant un temps non nul. Nous présenterons ensuite de manière succincte le cas des dislocations instantanées.

Commençons par rappeler que, par hypothèse, nous travaillons sous la loi \mathbb{P} pour laquelle $X(0) = \mathbf{1} = (1, 0, \dots)$, c'est-à-dire qu'au temps initial, il y a un seul fragment de masse 1. Introduisons

$$D := \inf\{t \geq 0 : X(t) \neq \mathbf{1}\},$$

le premier temps de dislocation du processus. Une conséquence élémentaire de la propriété de Markov est l'alternative suivante : soit $D = 0$ p.s. (on dit alors que la dislocation est immédiate), soit $D > 0$ p.s.

1.2.1 Chaînes de fragmentation et représentation généalogique

Plaçons nous ici dans cas $D > 0$ p.s., et excluons implicitement la situation triviale où $D = \infty$ p.s. On dira que X est une *chaîne de fragmentation* pour souligner le caractère discret de l'ensemble des temps en lesquels surviennent les dislocations.

La variable aléatoire D suit nécessairement une loi exponentielle, c'est-à-dire qu'il existe un paramètre $a > 0$ tel que $\mathbb{P}(D > t) = e^{-at}$ pour tout $t \geq 0$. On appelle alors *mesure de dislocation* et on note ν la mesure finie sur \mathcal{P}_m définie par

$$\nu(B) = a\mathbb{P}(X(D) \in B),$$

où B désigne un borélien générique de \mathcal{P}_m . La théorie des processus de Markov permet de voir ν comme un taux de saut pour le processus X , dans le sens où

$$\nu(B) = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{1}{t} \mathbb{P}(X(t) \in B)$$

pour tout borélien $B \subseteq \mathcal{P}_m$ qui ne recoupe pas un certain voisinage arbitraire de la partition triviale $\mathbf{1} = (1, 0, \dots)$.

Réciproquement, si on se donne un paramètre $\alpha \in \mathbb{R}$ et une mesure finie ν sur \mathcal{P}_m qui n'a pas d'atome en $\mathbf{1}$, il est facile de construire une chaîne de fragmentation auto-similaire d'indice α admettant ν comme mesure de dislocation. Plus précisément, on définit un système de particules dans $]0, 1]$ où la position de chaque particule représente la masse d'un fragment. Les particules évoluent indépendamment les unes des autres (autrement dit, il n'y a pas d'interaction). Typiquement, une particule située en $x \in]0, 1]$ a une durée de vie de loi exponentielle de paramètre ax^α (c'est-à-dire de moyenne $1/ax^\alpha$), où $a = \nu(\mathcal{P}_m)$ est la masse totale de ν . A sa mort, cette particule donne naissance à un nuage aléatoire de

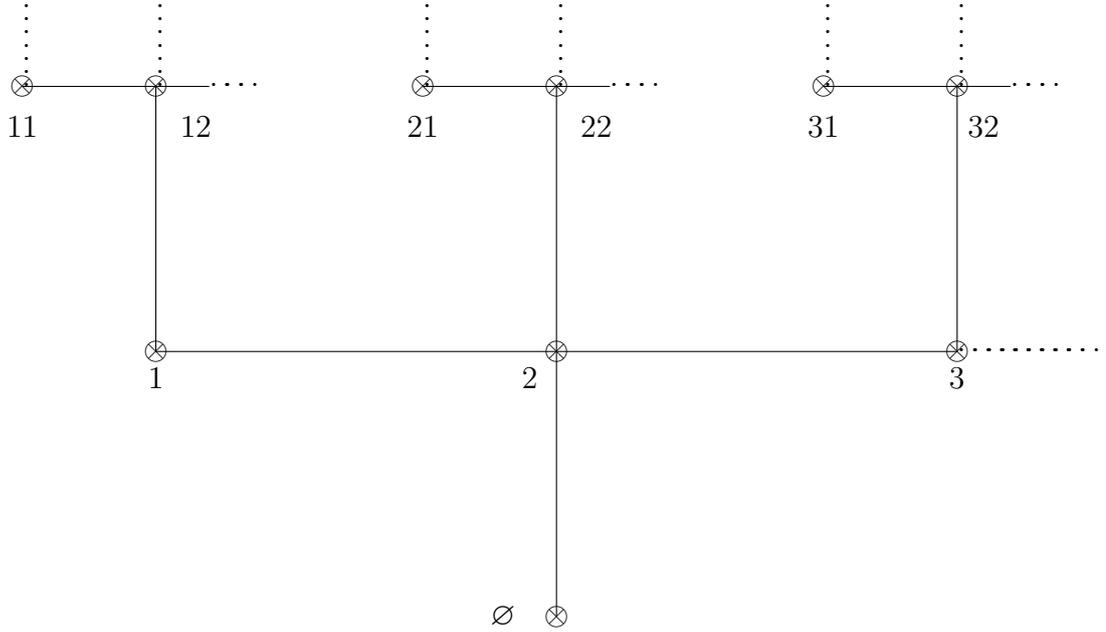


FIGURE 1 – Arbre généalogique \mathcal{U}

particules situées en xs_1, xs_2, \dots , où $\mathbf{s} = (s_1, s_2, \dots)$ est une partition de masse aléatoire de loi $a^{-1}\nu$. A leurs tours, les particules filles suivent la même dynamique que la particule mère, indépendamment les unes des autres, c'est la propriété de branchement. Il est intuitivement évident que la loi de ce système est entièrement caractérisée par l'indice d'auto-similarité α et la mesure ν .

Il est souvent commode de formaliser la construction de ce système de particules sous forme d'un arbre infini muni d'étiquettes aléatoires. Plus précisément, introduisons tout d'abord des notations habituelles dans ce cadre. Considérons l'arbre infini

$$\mathcal{U} := \bigcup_{n=0}^{\infty} \mathbb{N}^n,$$

où $\mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}$ désigne l'ensemble des entiers strictement positifs et $\mathbb{N}^0 = \{\emptyset\}$. Par la suite, on appellera \mathcal{U} l'arbre généalogique, ses éléments des *noeuds* et le noeud distingué \emptyset la *racine*. Pour chaque noeud $u = (u_1, \dots, u_n) \in \mathcal{U}$, on appelle n la *génération* de u et on note $|u| = n$, avec la convention usuelle $|\emptyset| = 0$. Pour $n \geq 1$ et $u = (u_1, \dots, u_n)$, on appelle $u^- := (u_1, \dots, u_{n-1})$ le *parent* de u . De façon similaire, pour chaque $i \in \mathbb{N}$ on note $ui = (u_1, \dots, u_n, i) \in \mathbb{N}^{n+1}$ pour le i -ème enfant u .

Ensuite, on munit chaque noeud d'une étiquette aléatoire afin de coder les particules produites par la chaîne de fragmentation. L'étiquette associée à un noeud u est donnée par le triplet (ξ_u, a_u, ζ_u) où ξ_u désigne la masse, a_u l'instant de naissance et ζ_u la durée de vie

de la particule indexée par u . Plus précisément, la particule initiale correspond à la racine \emptyset de l'arbre \mathcal{U} , et l'étiquette de \emptyset est donc le triplet $(1, 0, \zeta_\emptyset)$ où ζ_\emptyset est la durée de vie de la particule initiale, c'est-à-dire le temps D de la première dislocation. Ainsi ζ_\emptyset suit la loi exponentielle de paramètre $\nu(\mathcal{P}_m)$. Les noeuds de la première génération correspondent aux fragments qui résultent de la première dislocation. En conséquence, l'étiquette (ξ_i, a_i, ζ_i) d'un noeud $i \in \mathbb{N}^1$ à la première génération, est un triplet qui représente la masse ξ_i du i -ème enfant de l'ancêtre, l'instant de naissance $a_i = a_\emptyset + \zeta_\emptyset$ de cet enfant (qui coïncide avec la mort de l'ancêtre), et sa durée de vie ζ_i . On itère pour les générations suivantes.

La proposition ci-dessous formalise une description récursive des étiquettes qui est intuitivement évidente.

Proposition 2. *Il existe deux familles indépendantes de variables i.i.d. indexées par les noeuds de l'arbre généalogique,*

$$\left((\tilde{\xi}_{ui})_{i \in \mathbb{N}}, u \in \mathcal{U} \right) \text{ et } \left((\mathbf{e}_{ui})_{i \in \mathbb{N}}, u \in \mathcal{U} \right),$$

où chaque $(\tilde{\xi}_{ui})_{i \in \mathbb{N}}$ est distribué suivant la loi $\nu(\cdot)/\nu(\mathcal{P}_m)$, et chaque $(\mathbf{e}_{ui})_{i \in \mathbb{N}}$ est une suite de variables exponentielles i.i.d. de paramètre $\nu(\mathcal{P}_m)$, et telles que les propriétés suivantes sont réalisées :

Conditionnellement aux étiquettes $((\xi_v, a_v, \zeta_v), |v| \leq n)$ des n premières générations, les étiquettes à la génération $n + 1$ sont données par

$$\xi_{ui} = \tilde{\xi}_{ui} \xi_u, \quad a_{ui} = a_u + \zeta_u, \quad \zeta_{ui} = \xi_{ui}^{-\alpha} \mathbf{e}_{ui}$$

où $u = (u_1, \dots, u_n)$ et $ui = (u_1, \dots, u_n, i)$ désigne le i -ème enfant de u .

La proposition 2 implique que les masses $(\xi_u, u \in \mathcal{U})$ associées aux noeuds définissent une *cascade multiplicative*; voir Mandelbrot [41], Kahane et Peyrière [36], Mauldin et Williams [42], Liu [40], ... Cette cascade multiplicative ne permet pas à elle seule de reconstruire la chaîne de fragmentation; on a besoin de connaître également les instants de naissance et de mort des particules. Plus précisément, l'état de la chaîne de fragmentation en un temps t est alors obtenu simplement comme la suite ordonnée de façon décroissante des positions des particules en vie au temps t , éventuellement complétée par une suite infinie de termes nuls si le nombre de particules en vie au temps t est fini. Autrement dit, pour tout $t \geq 0$ et toute fonction mesurable $f : [0, 1] \rightarrow [0, \infty[$ avec $f(0) = 0$, on a l'identité

$$\sum_{i=1}^{\infty} f(X_i(t)) = \sum_{u \in \mathcal{U}} \mathbf{1}_{\{a_u \leq t < a_u + \zeta_u\}} f(\xi_u).$$

1.2.2 Fragmentations avec dislocations immédiates

Nous nous penchons maintenant sur le cas où le premier temps de dislocation D est nul presque-sûrement, c'est-à-dire où la masse se désagrège immédiatement. Cette situation apparaît très naturellement, notamment dans l'étude de certains arbres aléatoires continus, voir [1, 21, 34, 43, 44]. Elle est sensiblement plus délicate à analyser que la précédente. Nous nous contenterons ici de présenter les résultats essentiels à la compréhension de ce papier et renvoyons à [7] et au chapitre 3 de [12] pour une approche rigoureuse.

Le résultat de base sur les fragmentations auto-similaires est que la loi d'un tel processus est entièrement déterminée par un triplet (α, c, ν) , où $\alpha \in \mathbb{R}$ est l'indice d'auto-similarité, $c \geq 0$ est un coefficient dit d'érosion, et ν une mesure sur \mathcal{P}_m n'ayant pas d'atome en $\mathbf{1} = (1, 0, \dots)$ et telle que

$$\int_{\mathcal{P}_m} (1 - s_1) \nu(ds) < \infty, \quad (1.1)$$

qu'on appelle la mesure de dislocation. On notera que la condition (1.1) permet à ν d'être infinie; toutefois, on a $\nu(B) < \infty$ pour tout borélien B de \mathcal{P}_m dont l'adhérence ne contient pas la partition triviale $\mathbf{1}$.

Pour expliquer la dynamique d'une fragmentation avec une mesure de dislocation infinie, considérons d'abord le cas homogène où l'indice d'auto-similarité est $\alpha = 0$; supposons de plus que le coefficient d'érosion est nul, autrement dit le processus a pour caractéristique $(0, 0, \nu)$. On peut construire un tel processus de fragmentation de la façon suivante. On considère d'abord la famille $((\Delta(i), k(i), t(i)))_{i \in \mathbb{N}}$ des atomes d'une mesure de Poisson sur $\mathcal{P}_m \times \mathbb{N} \times [0, \infty)$ d'intensité $\mu := \nu(ds) \otimes \# \otimes dt$, où $\#$ désigne la mesure de comptage sur \mathbb{N} . Autrement dit, pour tout borélien $A \subseteq \mathcal{P}_m \times \mathbb{N} \times [0, \infty)$, le nombre d'atomes $(\Delta(i), k(i), t(i))$ dans A suit une loi de Poisson de paramètre $\mu(A)$, et à des boréliens disjoints correspondent des variables de Poisson indépendantes. La troisième coordonnée $t(i)$ d'un atome $(\Delta(i), k(i), t(i))$ est un instant en lequel le $k(i)$ -ème fragment se disloque. Plus précisément, notons $X(t(i)-) = (x_1, x_2, \dots)$ l'état du processus immédiatement avant $t(i)$. Au temps $t(i)$, le $k(i)$ -ème fragment $x_{k(i)}$ se brise selon la partition de masse $\Delta(i)$, c'est-à-dire que l'état $X(t(i))$ de la fragmentation après cette dislocation est donné par le réarrangement décroissant des termes des suites $(x_j)_{j \neq k(i)}$ et $(x_{k(i)} \Delta_\ell(i))_{\ell \in \mathbb{N}}$. Par exemple, si

$$X(t_i-) = \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{12}, 0, \dots \right), \quad \Delta(i) = \left(\frac{3}{4}, \frac{1}{4}, 0, \dots \right) \text{ et } k(i) = 2,$$

on obtient

$$X(t_i) = \left(\frac{2}{3}, \frac{3}{16}, \frac{1}{12}, \frac{1}{16}, 0, \dots \right).$$

On remarquera que quand $\nu(\mathcal{P}_m) < \infty$, cette construction revient simplement à réaliser une version du système de particules décrit dans la section précédente (voir en particulier la proposition 2).

Remarque. Cette construction poissonnienne des fragmentations homogènes (sans érosion) est à rapprocher de celle des subordinateurs, c'est-à-dire des processus à accroissements indépendants et stationnaires à valeurs dans $[0, \infty[$. Voir la section 1.3.2 ci-dessous et, par exemple [9], pour une présentation complète. En effet, en supposant pour simplifier que le coefficient de dérive est nul (le coefficient d'érosion d'une fragmentation joue un rôle voisin de celui de la dérive pour un subordinateur), un subordinateur est un processus croissant qui ne croît que par sauts $(t(i), \delta(i))_{i \in I}$, où la première coordonnée décrit l'instant en lequel le saut a lieu et la seconde sa taille. La famille des sauts $(t(i), \delta(i))_{i \in I}$ est alors donnée par les atomes d'une mesure de Poisson sur $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$ d'intensité $dt \otimes \Pi(dx)$ où Π est une mesure sur $]0, \infty[$ telle que $\int (1 \wedge x) \Pi(dx) < \infty$. Cette dernière condition permet au subordinateur d'avoir des temps de saut partout denses (de façon informelle, il peut y avoir une infinité de petits sauts) tout en garantissant que l'accumulation de tels sauts ne fasse pas exploser

le processus. Dans le cadre des fragmentations, la partition triviale $\mathbf{1}$ joue le rôle d'élément neutre, et une partition de masse proche de $\mathbf{1}$ doit être vue comme « petite », dans le sens où elle est formée par un gros fragment de masse proche de 1, et une suite de petits fragments. La condition (1.1) permet d'avoir des temps de dislocations formant un ensemble dense, et garantit que l'accumulation de petites dislocations ne réduit pas instantanément la masse initiale en poussière.

L'érosion est un phénomène déterministe élémentaire, et le coefficient d'érosion $c \geq 0$ décrit simplement le taux avec lequel chaque fragment fond. Plus précisément, si $X = (X(t), t \geq 0)$ est une fragmentation homogène de caractéristique $(0, 0, \nu)$, alors le processus

$$e^{-ct}X(t) = (e^{-ct}X_1(t), e^{-ct}X_2(t), \dots), \quad t \geq 0,$$

est une fragmentation de caractéristique $(0, c, \nu)$.

Les processus de fragmentation homogènes sont plus simples à décrire que les processus de fragmentation auto-similaires, car le taux de dislocation d'un fragment ne dépend pas de sa masse. Passons maintenant au cas général avec un coefficient d'auto-similarité $\alpha \in \mathbb{R}$. On peut construire une fragmentation $X^{(\alpha)}$ de caractéristiques (α, c, ν) à partir d'une fragmentation homogène $X^{(0)}$ de caractéristiques $(0, c, \nu)$, en adaptant une technique de changement de temps due à Lamperti [38] pour l'étude des processus de Markov auto-similaires à valeurs dans \mathbb{R}_+ . Dans cette direction, il est commode de partir d'une représentation de $X^{(0)}$ sous forme d'une fragmentation de l'intervalle unité $]0, 1[$. Plus précisément, notons $\Theta^{(0)} = (\Theta^{(0)}(t), t \geq 0)$ une telle fragmentation d'intervalle, de sorte que pour tout $t \geq 0$, $X^{(0)}(t)$ est la suite ordonnée des longueurs des intervalles qui composent l'ouvert aléatoire $\Theta^{(0)}(t)$. Pour chaque $y \in]0, 1[$, notons $I_y(t)$ la composante connexe de $\Theta^{(0)}(t)$ qui contient y ($I_y(t) = \emptyset$ si $y \notin \Theta^{(0)}(t)$). Introduisons ensuite le changement de temps

$$T_y^{(\alpha)}(t) := \inf \left\{ u \geq 0 : \int_0^u |I_y(v)|^{-\alpha} dv > t \right\},$$

(avec la convention usuelle $\inf \emptyset = \infty$). Comme la famille des ouverts aléatoires $(\Theta^{(0)}(t), t \geq 0)$ est emboîtée, pour tous $y, z \in]0, 1[$, les intervalles $I_y(T_y^{(\alpha)}(t))$ et $I_z(T_z^{(\alpha)}(t))$ sont nécessairement égaux ou disjoints. La collection $(I_y(T_y^{(\alpha)}(t)), y \in]0, 1[)$ peut donc être vue comme la famille des intervalles qui composent un ouvert noté $\Theta^{(\alpha)}(t)$. On peut alors vérifier que le processus $\Theta^{(\alpha)} = (\Theta^{(\alpha)}(t), t \geq 0)$ est une fragmentation auto-similaire d'intervalle, et le processus $X^{(\alpha)}(t) = |\Theta^{(\alpha)}(t)|^\dagger$, $t \geq 0$, qui décrit la suite ordonnée des longueurs des intervalles composant $\Theta^{(\alpha)}(t)$, est une fragmentation auto-similaire de caractéristique (α, c, ν) .

Dans la suite de ce travail, nous nous concentrerons pour simplifier sur le cas où la mesure de dislocation est *conservatrice*, dans le sens où, lorsqu'un fragment se disloque, la masse totale des fragments qui résultent de la dislocation est la même que celle du fragment initial (autrement dit, les dislocations ne produisent pas instantanément de la poussière). Nous supposerons également que le coefficient d'érosion c est nul. Formellement, cela signifie qu'on travaillera sous l'hypothèse

$$c = 0 \quad \text{et} \quad \sum_{i=1}^{\infty} s_i = 1 \quad \nu(ds)\text{-p.p.} \quad (1.2)$$

1.3 Le fragment marqué

Une difficulté évidente pour l'étude des fragmentations est que l'espace des états a une dimension infinie. Nous introduisons maintenant un outil fondamental qui permet de contourner partiellement cette difficulté en nous ramenant à des processus réels. L'idée est classique pour l'étude de systèmes de particules : il s'agit de marquer une particule (c'est-à-dire un fragment) au hasard et de suivre son évolution. En physique statistique, la particule marquée est choisie en général de façon uniforme parmi les particules présentes. Dans le cadre des fragmentations, il est plus naturel de conserver la relation avec la masse de l'objet qui se désagrège, et donc de choisir le fragment marqué au hasard avec un biais induit par la masse.

Pour cela, il est à nouveau commode d'utiliser une représentation de la fragmentation X sous la forme d'une fragmentation Θ de l'intervalle $]0, 1[$. Plus précisément, donnons nous une variable aléatoire U de loi uniforme sur $]0, 1[$, indépendante du processus Θ , et rappelons que $I_U(t)$ désigne la composante connexe de $\Theta(t)$ qui contient U ($I_U(t) = \emptyset$ si $U \notin \Theta(t)$). On peut imaginer qu'on a marqué un point U dans l'objet initial, et on suit à chaque instant le fragment contenant ce point marqué. On note alors

$$\chi(t) := |I_U(t)|$$

la longueur de cet intervalle, et on appelle

$$\chi = (\chi(t), t \geq 0)$$

le processus du *fragment marqué*.

Nous allons maintenant voir que la distribution du fragment marqué peut être déterminée explicitement en fonction de la caractéristique de la fragmentation. Pour cela, nous examinerons d'abord le cas des chaînes de fragmentation, puis étendrons l'étude aux fragmentations ayant des dislocations immédiates après avoir rappelé quelques notions de base sur les subordinateurs.

1.3.1 Généalogie du fragment marqué

Dans toute cette section, nous supposons que la mesure de dislocation ν est finie, c'est-à-dire, de façon équivalente, que le premier temps de dislocation D est strictement positif p.s. Rappelons que nous travaillons également sous l'hypothèse (1.2).

Appelons feuille de l'arbre généalogique \mathcal{U} toute suite infinie $u = (i_1, i_2, \dots)$ d'entiers strictement positifs. Pour tout n , la suite restreinte aux n premiers termes $u_n := (i_1, \dots, i_n)$ est le noeud à la n -ème génération de la branche qui relie la racine à la feuille u .

Le marquage d'un fragment permet de distinguer une feuille (aléatoire) u^* de l'arbre généalogique, qu'il est naturel d'appeler feuille marquée. Nous nous intéressons à l'évolution de l'étiquette $(\xi_{u^*(n)}, a_{u^*(n)}, \zeta_{u^*(n)})$ attachée à chaque noeud $u^*(n)$ associé à la feuille marquée u^* .

Le premier temps de dislocation D correspond au premier temps de saut du fragment marqué; il suit une loi exponentielle de paramètre $\nu(\mathcal{P}_m)$. L'ouvert aléatoire $\Theta(D)$ est indépendant de D , et comme U est uniformément distribué sur $]0, 1[$ et indépendant de $\Theta(D)$, on obtient aisément que la longueur de la composante connexe $I_U(D)$ de $\Theta(D)$ qui

contient U est un échantillon biaisé par la taille de la suite $X(D) = |\Theta(D)|^\downarrow$. On a donc

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\xi_{u^*(1)} \in dx) &= \mathbb{P}(|I_U(D)| \in dx) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} x \mathbb{P}(X_n(D) \in dx) \\ &= \frac{x}{\nu(\mathcal{P}_m)} \sum_{n=1}^{\infty} \nu(\mathbf{s} \in \mathcal{P}_m : s_n \in dx), \quad x \in]0, 1[. \end{aligned}$$

Par ailleurs, travaillons maintenant conditionnellement à $\Theta(D)$ et notons $\Theta(D) = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} I_k$ sa décomposition canonique en intervalles ouverts deux-à-deux disjoints. Comme U est uniformément distribué sur $]0, 1[$ et indépendant de $\Theta(D)$, on déduit que pour tout $k \in \mathbb{N}$, conditionnellement à $U \in I_k$, la variable U est encore uniformément distribuée dans I_k . Cette observation permet l'itération du raisonnement précédent. Notons pour tout entier $n \geq 1$ par D_n^* le n -ème temps de dislocation du fragment marqué; en particulier $D_1^* = D$. On peut alors exprimer le fragment marqué à la n -ème génération comme

$$\xi_{u^*(n)} = |I_U(D_n^*)| = \exp\left(-\sum_{i=1}^n \eta_i\right), \quad t \geq 0,$$

où η_1, \dots est une suite de variables i.i.d. de même loi que $-\ln |I_U(D)|$. On obtient donc la caractérisation suivant de la loi du fragment marqué.

Proposition 3. *Supposons que la mesure de dislocation ν est finie et que (1.2) est satisfait. Soit $S_n = \eta_1 + \dots + \eta_n$, une marche aléatoire issue de $S_0 = 0$ et dont la loi du pas générique η est donnée par*

$$\mathbb{P}(\eta \in dx) = \frac{e^{-x}}{\nu(\mathcal{P}_m)} \sum_{j=1}^{\infty} \nu(-\ln s_j \in dx), \quad x \in]0, \infty[. \quad (1.3)$$

Considérons une suite i.i.d. $(\mathbf{e}_i, i \in \mathbb{Z}_+)$ de variables exponentielles de paramètre $\nu(\mathcal{P}_m)$, qui est indépendante de la marche aléatoire S_n . La suite des étiquettes $(\xi_{u^*(n)}, a_{u^*(n)}, \zeta_{u^*(n)})_{n \in \mathbb{Z}_+}$ de la feuille marquée a alors la même loi que

$$\left(\exp(-S_n), \sum_{i=0}^{n-1} \exp(\alpha S_i) \mathbf{e}_i, \exp(\alpha S_n) \mathbf{e}_n \right)_{n \in \mathbb{Z}_+},$$

où, par convention, la somme qui définit la seconde coordonnée est nulle pour $n = 0$.

1.3.2 Loi du fragment marqué et premières applications

Nous venons de voir que dans le cas où la mesure de dislocation est finie, le fragment marqué peut être représenté en termes d'une marche aléatoire à valeurs dans \mathbb{R}_+ et d'une suite indépendante de variables i.i.d. de lois exponentielles. Dans le cas où la mesure de dislocation est infinie, on ne peut plus s'appuyer sur la structure discrète de l'arbre généalogique. Néanmoins, on peut encore caractériser la loi du fragment marqué, cette fois en termes de

l'analogie en temps continu d'un marche aléatoire sur \mathbb{R}_+ , c'est-à-dire d'un subordonateur. Commençons par rappeler quelques résultats de base sur cette notion.

On appelle *subordonateur* un processus $\sigma = (\sigma(t), t \geq 0)$ à valeurs dans \mathbb{R}_+ , issu de $\sigma(0) = 0$, qui a des trajectoires càdlàg et des accroissements indépendants et stationnaires. Autrement dit, pour toute suite croissante de temps $0 \leq t_1 \leq t_2 \leq \dots \leq t_n$, les accroissements $\sigma(t_1), \sigma(t_2) - \sigma(t_1), \dots, \sigma(t_n) - \sigma(t_{n-1})$ sont des variables indépendantes, et $\sigma(t_2) - \sigma(t_1)$ suit la même loi que $\sigma(t_2 - t_1)$.

On peut décomposer canoniquement tout processus croissant en la somme d'un processus continu et d'un processus de sauts. Pour les subordonateurs, cette décomposition est due à Lévy et Itô; elle prend la forme simple

$$\sigma(t) = dt + \sum_{0 < s \leq t} \Delta\sigma(s),$$

où $\Delta\sigma(s) = \sigma(s) - \sigma(s-)$ désigne le saut à l'instant s et $d \geq 0$ est une constante qu'on appelle le *coefficient de dérive* de σ . Le processus des sauts $\Delta\sigma$ est poissonnien; plus précisément la mesure aléatoire sur $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$

$$\sum_{t > 0, \Delta\sigma(t) > 0} \delta_{(t, \Delta\sigma(t))}$$

est une mesure de Poisson d'intensité $dt \otimes \Pi(dx)$, où Π est une mesure sur $]0, \infty[$ qui vérifie

$$\int_{]0, \infty[} (1 \wedge x) \Pi(dx) < \infty$$

et qu'on appelle la *mesure de Lévy* de σ .

Le coefficient de dérive et la mesure de Lévy caractérisent la loi du subordonateur. En particulier, les transformées de Laplace unidimensionnelles s'expriment sous la forme

$$\mathbb{E}(\exp(-q\sigma(t))) = \exp(-t\Phi(q)), \quad t, q \geq 0$$

où $\Phi : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ s'appelle l'exposant de Laplace (ou parfois aussi le cumulants, ou encore la fonction de Bernstein) et est donné par la *formule de Lévy-Khintchine*

$$\Phi(q) = dq + \int_{]0, \infty[} (1 - e^{-qx}) \Pi(dx).$$

Un exemple élémentaire et néanmoins important de subordonateur est celui des processus de Poisson composés. Typiquement, considérons une marche aléatoire croissante $S_n = \eta_1 + \dots + \eta_n$ où les variables η_i sont i.i.d. à valeurs dans $]0, \infty[$. Notons π la loi du pas η_1 . Introduisons un processus de Poisson $N = (N(t), t \geq 0)$ de paramètre $c > 0$, qu'on suppose indépendant de la marche S_n . Il est alors facile de vérifier que le processus composé $\sigma(t) := S_{N(t)}$ est un subordonateur. Son coefficient de dérive d est nul, sa mesure de Lévy $\Pi = c\pi$, et son exposant de Laplace $\Phi(q) = c\mathbb{E}(1 - e^{-q\eta_1})$.

Revenons maintenant aux fragmentations, et introduisons une transformation de type Laplace pour la mesure de dislocation :

$$\kappa(q) := \int_{\mathcal{P}_m} \left(1 - \sum_{n=1}^{\infty} s_n^q \right) \nu(ds), \quad q > 0. \quad (1.4)$$

La fonction $\kappa :]0, \infty[\rightarrow]-\infty, \infty[$ est croissante, concave, s'annule en $q = 1$ puisque nous avons supposé que ν est conservatrice. On vérifie aisément que la fonction translatée

$$\Phi(q) := \kappa(q + 1)$$

est l'exposant de Laplace d'un subordonateur sans dérive, plus précisément on a la formule de Lévy-Khintchine

$$\Phi(q) = \int_{]0, \infty[} (1 - e^{-qx}) \Pi(dx), \quad q \geq 0,$$

où

$$\Pi(dx) = e^{-x} \sum_{j=1}^{\infty} \nu(-\ln s_j \in dx), \quad x \in]0, \infty[. \quad (1.5)$$

Nous sommes maintenant en mesure de préciser la loi du fragment marqué $\chi = (\chi(t), t \geq 0)$.

Théorème 4. *Soit X une fragmentation auto-similaire dont la caractéristique $(\alpha, \mathbf{c}, \nu)$ vérifie (1.2). Soit $\sigma = (\sigma(t), t \geq 0)$ un subordonateur d'exposant de Laplace $\Phi(q) := \kappa(q + 1)$.*

(i) *Dans le cas homogène où l'indice d'auto-similarité est nul, $\alpha = 0$, le processus $(\exp(-\sigma(t)), t \geq 0)$ a la même loi que le fragment marqué $\chi = (\chi(t), t \geq 0)$.*

(ii) *Dans le cas $\alpha \neq 0$, introduisons le changement de temps*

$$\tau(t) = \inf \left\{ u : \int_0^u \exp(\alpha\sigma(r)) dr > t \right\}, \quad t \geq 0,$$

et posons $\varrho(t) = \exp(-\sigma(\tau(t)))$, avec la convention $\varrho(t) = 0$ quand $\tau(t) = \infty$. Alors les processus $(\varrho(t), t \geq 0)$ et $(\chi(t), t \geq 0)$ ont la même loi.

Démonstration. (i) Lorsque la mesure de dislocation ν est finie, la proposition 3 montre que le fragment marqué peut être représenté sous la forme

$$\chi(t) = \exp(-S_{N(t)}),$$

où $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une marche aléatoire dont la loi du pas est donnée par (1.3) et $N = (N(t), t \geq 0)$ un processus de Poisson indépendant de paramètre $\nu(\mathcal{P}_m)$. Le processus de Poisson composé $\sigma(t) := S_{N(t)}$ est alors bien un subordonateur dont la mesure de Lévy Π est décrite par (1.5). Nous renvoyons à la section 3.3.2 de [12] pour le cas où la mesure de dislocation est infinie.

(ii) découle immédiatement de (i) et de la construction par changement de temps d'une fragmentation auto-similaire de caractéristique $(\alpha, 0, \nu)$ à partir d'une fragmentation homogène de caractéristique $(0, 0, \nu)$. \square

Observons que lorsque l'indice d'auto-similarité α est strictement négatif, le changement de temps τ qui intervient dans le théorème 4 explose. Plus précisément on a

$$\tau(t) < \infty \Leftrightarrow t < I(\alpha),$$

où $I(\alpha)$ désigne la fonctionnelle exponentielle

$$I(\alpha) := \int_0^{\infty} \exp(\alpha\sigma(t)) dt.$$

La loi de cette variable aléatoire a été caractérisée de la façon suivante par Carmona *et al.* [19].

Lemme 5. Soit σ un subordonateur d'exposant de Laplace Φ et $\alpha < 0$.

(i) La fonctionnelle exponentielle $I(\alpha)$ admet alors des moments entiers de tous ordres qui sont donnés par

$$\mathbb{E}((I(\alpha))^k) = \frac{k!}{\Phi(-\alpha) \cdots \Phi(-k\alpha)}, \quad \text{pour } k = 1, 2, \dots \quad (1.6)$$

De plus, (1.6) détermine la loi de $I(\alpha)$.

(ii) Supposons que la mesure de Lévy Π de σ vérifie $\int(e^x - 1)\Pi(dx) < \infty$. Alors $\mathbb{E}(I^{-a}(\alpha)) < \infty$ pour tout $a < 1 + 1/|\alpha|$.

Démonstration. (i) Comme le processus $-\alpha\sigma$ est un subordonateur d'exposant de Laplace $\Phi(-\alpha\cdot)$, on supposera sans perdre de généralité que $\alpha = -1$, et on notera $I_t = \int_0^t \exp(-\sigma(s))ds$. Posons ensuite pour simplifier

$$J_t = I_\infty - I_t = \int_t^\infty \exp(-\sigma(s))ds$$

pour tout $t \geq 0$. D'une part, pour tout réel $r > 0$, on a l'identité

$$J_0^r - J_t^r = r \int_0^t \exp(-\sigma(s))J_s^{r-1}ds. \quad (1.7)$$

D'autre part, on peut exprimer J_s sous la forme $J_s = \exp(-\sigma(s))I'_\infty$, où

$$I'_\infty = \int_0^\infty \exp(-\sigma'(u))du \quad \text{et} \quad \sigma'(u) = \sigma(s+u) - \sigma(s). \quad (1.8)$$

Il découle alors de l'indépendance et de la stationnarité des accroissements de σ que I'_∞ suit la même loi que I_∞ et est indépendant de $\sigma(s)$. En reportant ceci dans (1.7) puis en prenant l'espérance, on obtient par la définition de l'exposant de Laplace Φ que

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(I_\infty^r (1 - \exp(-t\Phi(r)))) &= r \int_0^t \exp(-s\Phi(r))\mathbb{E}(I_\infty^{r-1}) ds \\ &= \frac{r}{\Phi(r)} (1 - e^{-t\Phi(r)}) \mathbb{E}(I_\infty^{r-1}). \end{aligned}$$

On a donc l'identité

$$\mathbb{E}(I_\infty^r) = \frac{r}{\Phi(r)} \mathbb{E}(I_\infty^{r-1}),$$

et comme $\mathbb{E}(I_\infty^0) = 1$, on déduit la formule (1.6) par récurrence.

Enfin, la finitude de $\mathbb{E}(\exp(aI_\infty))$ pour tout $a < \Phi(-\alpha)$ en découle immédiatement, et garantit que la loi de I_∞ est déterminée par ses moments entiers.

(ii) L'hypothèse $\int(e^x - 1)\Pi(dx) < \infty$ et la formule de Lévy-Khintchine permettent de prolonger analytiquement l'exposant de Laplace $\Phi(q)$ pour tout $q > -1$. Les calculs effectués dans la partie (i) entraînent alors facilement la seconde assertion. \square

Nous allons maintenant conclure cette section en déduisant quelques applications du théorème 4. Commençons par remarquer que, par construction, pour chaque temps $t \geq 0$,

la loi conditionnelle de $\chi(t)$ sachant la partition de masse $X(t) = |\Theta(t)|^\downarrow$ est simplement donnée par

$$\mathbb{P}(\chi(t) = s_k \mid X(t) = (s_1, s_2, \dots)) = s_k, \quad k \geq 1,$$

et

$$\mathbb{P}(\chi(t) = 0 \mid X(t) = (s_1, s_2, \dots)) = s_0 = 1 - \sum_{n=1}^{\infty} s_n.$$

Autrement dit, $\chi(t)$ est un échantillon de la suite $X(t)$ tiré avec un biais induit par la masse. On a en particulier l'identité

$$\mathbb{E}(\chi(t)^p, \chi(t) > 0) = \mathbb{E} \left(\sum_{n=1}^{\infty} X_n^{p+1}(t) \right), \quad p > -1,$$

et on déduit immédiatement du théorème 4 le résultat suivant.

Corollaire 6. *Soit X une fragmentation auto-similaire de caractéristique $(\alpha, 0, \nu)$, où la mesure de dislocation ν vérifie (1.2).*

(i) *Pour $\alpha \geq 0$, la fragmentation est conservatrice, c'est-à-dire*

$$\mathbb{P} \left(\sum_{n=1}^{\infty} X_n(t) = 1 \right) = 1 \quad \text{pour tout } t \geq 0.$$

(ii) *Pour $\alpha < 0$, on a l'identité*

$$\mathbb{E} \left(\sum_{n=1}^{\infty} X_n(t) \right) = \mathbb{P} \left(\int_0^{\infty} \exp(\alpha \sigma(s)) ds > t \right), \quad \forall t \geq 0.$$

(iii) *Pour $\alpha = 0$, on a l'identité*

$$\mathbb{P} \left(\sum_{n=1}^{\infty} X_n^p(t) \right) = e^{-t\kappa(p)} \quad \text{pour tous } t, p > 0.$$

1.3.3 Martingales additives (cas homogène $\alpha = 0$)

Dans cette section, nous nous intéresserons à une famille de martingales remarquables liées aux fragmentations homogènes. On supposera donc $\alpha = 0$ et on travaillera toujours sous la condition (1.2). On introduit deux paramètres critiques qui joueront un rôle clé par la suite. D'abord, on note

$$\underline{p} := \inf\{p > 0 : \kappa(p) > -\infty\}.$$

Ensuite, il est facile de vérifier que la fonction $p \rightarrow \kappa(p)/p$ atteint son maximum en un unique point noté $\bar{p} > 1$, qui est déterminé comme étant l'unique solution de l'équation

$$\bar{p}\kappa'(\bar{p}) = \kappa(\bar{p}).$$

Plus précisément, la fonction $p \rightarrow \kappa(p)/p$ croît sur $[\underline{p}, \bar{p}[$ et décroît sur $]\bar{p}, \infty[$, et sa valeur maximale est donnée par $\kappa'(\bar{p}) = \kappa(\bar{p})/\bar{p}$.

Les propriétés d'auto-similarité et de branchement et le corollaire 6(iii) entraînent que pour tout $p > \underline{p}$, le processus

$$M(p, t) := \exp(t\kappa(p)) \sum_{i=1}^{\infty} X_i^p(t), \quad t \geq 0$$

est une martingale positive. On appelle $M(p, t)$ une *martingale additive*; cette notion apparaît très naturellement dans le cadre des marches aléatoires avec branchement (voir en particulier les travaux de Biggins [14] et Uchiyama [47]). Les propriétés bien connues des martingales impliquent que $M(p, t)$ converge p.s. quand $t \rightarrow \infty$, et savoir alors sous quelles conditions cette limite est strictement positive p.s. est important pour les applications à l'étude du comportement asymptotique des fragmentations homogènes.

Nous énonçons maintenant le principal résultat dans cette direction, et renvoyons à [11] (voir aussi [13]) pour les détails de la preuve.

Théorème 7. *Soit X une fragmentation homogène de caractéristique $(0, 0, \nu)$, dont la mesure de dislocation vérifie (1.2). Alors pour tout $p \in]\underline{p}, \bar{p}[$, la martingale $M(p, \cdot)$ est bornée dans $L^1(\mathbb{P})$ et sa valeur terminale est strictement positive p.s. Par ailleurs $\lim_{t \rightarrow \infty} M(p, t) = 0$ p.s. si $p \geq \bar{p}$.*

Nous présentons ensuite une application des théorèmes 4 et 7 à la vitesse de décroissance des masses pour une fragmentation homogène. Biggins [15] avait obtenu un résultat analogue pour les marches aléatoires avec branchement.

Corollaire 8. *Sous les mêmes hypothèses que pour le théorème 7, on a p.s.*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln \chi(t) = -\kappa'(1) \in [-\infty, 0[,$$

et

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln X_1(t) = -\kappa'(\bar{p}) = -\frac{\kappa(\bar{p})}{\bar{p}}.$$

Rappelons que la fonction κ est concave et que $\bar{p} > 1$. Donc $\kappa'(1) > \kappa'(\bar{p})$, ce qui signifie que le fragment marqué $\chi(t)$ décroît avec un taux exponentiel plus important que le plus gros fragment $X_1(t)$.

Démonstration. La première assertion découle immédiatement du théorème 4 et de la loi forte des grands nombres appliquée au subordonateur $\sigma = -\ln \chi$, puisque $\mathbb{E}(\sigma(1)) = \Phi'(0) = \kappa'(1)$.

Passons à la seconde assertion. Pour tout $p > \underline{p}$, on a

$$\exp(t\kappa(p)) X_1^p(t) \leq \exp(t\kappa(p)) \sum_{i=1}^{\infty} X_i^p(t)$$

et le terme de droite reste borné quand t tend vers l'infini. En conséquence

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln X_1(t) \leq -\frac{\kappa(p)}{p},$$

et on obtient en optimisant sur p

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln X_1(t) \leq -\frac{\kappa(\bar{p})}{\bar{p}}.$$

D'autre part, pour tout $p \in]\underline{p}, \bar{p}[$ et $\varepsilon > 0$ suffisamment petit, on a la minoration

$$\exp(t\kappa(p)) \sum_{i=1}^{\infty} X_i^p(t) \leq X_1^\varepsilon(t) \exp(t\kappa(p)) \sum_{i=1}^{\infty} X_i^{p-\varepsilon}(t).$$

Nous savons que les deux limites

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \exp(t\kappa(p)) \sum_{i=1}^{\infty} X_i^p(t) \quad \text{et} \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \exp(t\kappa(p-\varepsilon)) \sum_{i=1}^{\infty} X_i^{p-\varepsilon}(t)$$

sont finies et strictement positives p.s., et on déduit que

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln X_1(t) \geq -\frac{\kappa(p) - \kappa(p-\varepsilon)}{\varepsilon}.$$

Prenons alors la limite du terme de droite d'abord quand $\varepsilon \rightarrow 0+$ puis quand p tend vers \bar{p} . Nous pouvons alors conclure que

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln X_1(t) \geq -\kappa'(\bar{p}).$$

Nous savons que cette dernière quantité coïncide avec $-\kappa(\bar{p})/\bar{p}$, ce qui établit la seconde limite de l'énoncé. \square

2 Généalogie et dimension de Hausdorff : cas d'un indice négatif

Nous considérons dans cette partie un processus de fragmentation $(X(t), t \geq 0)$ auto-similaire d'indice α , où α est un nombre strictement négatif. Nous supposons comme toujours que (1.2) est vérifiée, c'est-à-dire qu'il n'y a pas d'érosion, et que la mesure de dislocation ν est conservatrice. Pour plus de facilité, et hormis dans la section 2.4, nous supposons en plus que ν est **finie**. Nous rappelons qu'il est alors possible de représenter le processus X de façon à mettre en évidence sa généalogie, par une suite d'étiquettes $((\xi_u, a_u, \zeta_u), u \in \mathcal{U})$, où ξ_u est la masse du fragment indicé par u , a_u est l'instant de naissance de ce fragment, et ζ_u sa durée de vie. Nous noterons $b_u = a_u + \zeta_u$ son instant de mort.

Nous allons voir que dans cette situation, il existe une structure naturelle d'espace métrique sur l'arbre généalogique de la fragmentation. L'ensemble des « feuilles », c'est-à-dire les éléments que l'on ajoute à l'arbre par complétion de cet espace, possède alors une structure fractale non-triviale, et nous nous proposons dans cette partie d'en calculer la dimension de Hausdorff. En section 2.4, nous verrons qu'il est également possible de coder la généalogie d'une fragmentation à dislocations immédiates par des espaces métriques appelés *arbres continus aléatoires*. Bien que ces objets soient plus élaborés que ceux que nous utiliserons dans les sections 2.1–2.3, la nature des méthodes utilisées pour calculer la dimension de Hausdorff des feuilles est la même.

2.1 Extinction

Nous nous concentrons donc dans un premier temps, jusqu'à la section 2.3 comprise, sur le cas d'une fragmentation de mesure de dislocation **finie**. Comme l'indice α est strictement négatif, un fragment se disloque d'autant plus facilement que sa masse est petite. On observe en fait un phénomène d'emballlement du processus de fragmentation, que l'on peut formaliser ainsi, suivant [11, proposition 2].

Proposition 9. *Presque-sûrement, pour tout $t \geq 0$ assez grand, on a $X(t) = (0, 0, \dots)$.*

Démonstration. Rappelons (proposition 2) que l'on peut supposer que $((\xi_u, a_u, \zeta_u), u \in \mathcal{U})$ est construit à l'aide d'une famille i.i.d. $(\mathbf{e}_u, (\tilde{\xi}_{ui}, i \geq 1), u \in \mathcal{U})$ où \mathbf{e}_u est exponentielle de paramètre $\nu(\mathcal{P}_m)$ et $(\tilde{\xi}_{ui}, i \geq 1)$ a pour loi $\nu/\nu(\mathcal{P}_m)$, \mathbf{e}_u et $(\tilde{\xi}_{ui}, i \geq 1)$ étant indépendants. Notons que nous avons pris un choix d'indexation légèrement différent pour la famille $(\mathbf{e}_u, u \in \mathcal{U})$ par rapport à la proposition 2. On pose alors $(\xi_\emptyset, a_\emptyset) = (1, 0)$, puis, par récurrence sur la longueur (ou génération) $|u|$ du mot u , c'est-à-dire son nombre de lettres,

$$\zeta_u = \xi_u^{-\alpha} \mathbf{e}_u, \quad \xi_{ui} = \tilde{\xi}_{ui} \xi_u, \quad a_{ui} = a_u + \zeta_u (= b_u) \quad i \geq 1. \quad (2.1)$$

Ceci fournit un couplage des différentes chaînes de fragmentations auto-similaires de même mesure de dislocation, mais d'indices α distincts : on suppose donc qu'à partir des mêmes données $(\mathbf{e}_u, (\tilde{\xi}_{ui}, i \geq 1)), u \in \mathcal{U}$, on a construit les étiquettes $(\xi_u, a_u^0, \mathbf{e}_u), (\xi_u, a_u, \zeta_u), u \in \mathcal{U}$, correspondant respectivement à une chaîne de fragmentation homogène, notée $(X^0(t), t \geq 0)$, une chaîne de fragmentation auto-similaire d'indice α .

On sait alors, par le corollaire 8, qu'il existe $v > 0$ déterministe et $C > 0$ aléatoire tels que

$$X_1^0(t) = \max_{u \in \mathcal{U}} \xi_u \mathbb{1}_{\{a_u^0 \leq t < a_u^0 + \mathbf{e}_u\}} \leq C e^{-vt}, \quad t \geq 0.$$

Si $u = (u_1, u_2, \dots)$ est une suite d'entiers finie ou infinie, et si n est inférieur à sa longueur, nous notons $u(n) = (u_1, \dots, u_n)$, avec la convention $u(0) = \emptyset$, et

$$\xi_u^0(t) = \sum_{n \geq 0} \xi_{u(n)} \mathbb{1}_{\{a_{u(n)}^0 \leq t < a_{u(n)}^0 + \mathbf{e}_{u(n)}\}}. \quad (2.2)$$

On a alors $\xi_u^0(t) \leq X_1^0(t) \leq C e^{-vt}$ pour $t \geq 0$, et par conséquent, $\int_0^\infty \xi_u^0(t)^{-\alpha} dt \leq C/(v|\alpha|) < \infty$ p.s. Or, cette intégrale vaut précisément $\sum_{n=0}^\infty \xi_{u(n)}^{-\alpha} \mathbf{e}_{u(n)} = \sum_n \zeta_{u(n)}$. On en conclut que les $a_u, u \in \mathcal{U}$, sont bornés uniformément pour $u \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$. D'où le résultat. \square

Il existe une structure naturelle d'espace métrique (aléatoire) sur l'ensemble \mathcal{U} , qui s'interprète en disant que la distance entre un nœud de \mathcal{U} et un de ses enfants est égal au temps de vie de cet enfant. Nous la détaillons dans la section suivante. Suivant [34], nous allons voir que la propriété d'extinction presque-sûre induit des propriétés fractales intéressantes sur la complétion de cet espace. Auparavant, nous citons un raffinement du résultat précédent qui sera utile par la suite. Nous notons

$$\zeta = \sup_{u \in \mathcal{U}} b_u, \quad (2.3)$$

l'instant d'extinction de la fragmentation, qui est fini p.s.

Lemme 10. *Le temps d'extinction ζ admet des moments de tous ordres.*

Démonstration. Nous supposons que $\nu(\mathcal{P}_m) = 1$ pour plus de facilité, le cas général s'en déduisant aisément. On fixe $a > 0$, et on considère la probabilité qu'il existe $k \geq 1$ et un $u \in T, |u| = k$, tels que $\zeta_u > ak^{-2}$. Étant donné que, sachant $(\xi_u, u \in \mathcal{U})$, les variables ζ_u sont exponentielles de paramètres ξ_u^α , on obtient par conditionnement que la probabilité de cet événement est majorée, pour tout $p > 0$, par

$$\sum_{k \geq 1} \sum_{|u|=k} \mathbb{E}[\exp(-ak^{-2}\xi_u^\alpha)] \leq c_p a^{-p} \sum_{k \geq 1} k^{2p} \mathbb{E} \left[\sum_{|u|=k} \xi_u^{-\alpha p} \right],$$

où $c_p > 0$ est une constante. Par ailleurs, avec les notations de la section 1.3, la dernière espérance considérée n'est autre que $\mathbb{E} \left[\xi_{u^*(k)}^{-\alpha p} \right]$, où l'on rappelle que $u^* \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ est une feuille marquée au hasard. Le processus $(-\log \xi_{u^*(k)}, k \geq 0)$ est alors la marche aléatoire $(S_k, k \geq 0)$ décrite dans la section 1.3.1. On en déduit facilement, à l'aide de l'expression (1.3) de la loi du pas typique η_1 de cette marche, que l'espérance considérée vaut $\gamma(p)^k$, où

$$\gamma(p) = \int_{\mathcal{P}_m} \sum_{i \geq 1} s_i^{-\alpha p} \nu(ds).$$

Comme $s_1 < 1$ presque-partout sous ν , on voit par convergence dominée que $\gamma(p) < 1$ pour p suffisamment grand. Pour un tel p , on en déduit que

$$\sum_{k \geq 1} k^{2p} \mathbb{E} \left[\sum_{|u|=k} \xi_u^{-\alpha p} \right] < \infty.$$

Ainsi, nous avons montré que la probabilité que $\zeta - \zeta_\emptyset > a \sum_{k \geq 1} k^{-2}$ est majorée par $c'_p a^{-p}$ pour un $0 < c'_p < \infty$, pour tout p assez grand. Donc $\zeta - \zeta_\emptyset$ a des moments de tous ordres, et il en est de même pour ζ puisque ζ_\emptyset est une variable aléatoire exponentielle. \square

Remarque. On peut en fait montrer que ζ admet des moments exponentiels, voir Haas [32, proposition 14].

2.2 Un espace métrique naturel

Si $u, v \in \mathcal{U}$, nous notons $u \wedge v$ le plus grand préfixe commun entre u et v , ce qui s'interprète comme le plus récent ancêtre commun à u et v . Nous notons $T := \{u \in \mathcal{U} : \xi_u > 0\} \subseteq \mathcal{U}$, et nous définissons sur $T \times T$ la fonction

$$d(u, v) := b_u + b_v - 2b_{u \wedge v}.$$

Soit également $(u_1, u_2, \dots) \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ une suite infinie d'entiers, telle que $u(n) = (u_1, \dots, u_n) \in T$ pour tout $n \geq 0$. On note ∂T l'ensemble des telles suites, que nous appelons *feuilles*, gardant en mémoire le fait que T a une structure arborescente. Par la proposition 9, la suite $(b_{u(n)}, n \geq 0)$ admet une borne supérieure, naturellement notée b_u . Soit $\bar{\mathcal{U}} = \mathcal{U} \cup \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$. Si $u, v \in \bar{\mathcal{U}}$, on note à nouveau $u \wedge v$ le plus grand préfixe commun à u et v . On étend alors la définition de $d(u, v)$ de façon évidente à $\bar{T} := T \cup \partial T$.

Proposition 11. *La fonction d est (pour chaque ω) une distance sur \bar{T} , qui fait de ce dernier un espace polonais (séparable et complet).*

Remarque. Si nous avons défini d de la même façon sur tout $\bar{\mathcal{U}}$, nous aurions seulement obtenu une semi-métrique (des points distincts peuvent être à distance nulle).

Démonstration. Les seules propriétés des distances qui ne sont pas triviales à vérifier sont l'inégalité triangulaire, et le fait que $d(u, v) = 0$ implique $u = v$. Pour l'inégalité triangulaire, on a

$$\begin{aligned} d(u, w) &= b_u + b_w - 2b_{u \wedge w} \\ &= d(u, v) + d(v, w) - 2(b_v + b_{u \wedge w} - b_{u \wedge v} - b_{v \wedge w}), \end{aligned}$$

et on constate que l'un des deux mots $u \wedge v$ ou $v \wedge w$ est égal à $u \wedge w$. La quantité $b_v + b_{u \wedge w} - b_{u \wedge v} - b_{v \wedge w}$ vaut donc $b_v - b_{u \wedge v}$ ou $b_v - b_{v \wedge w}$ selon les cas, et est toujours positive ou nulle.

Ensuite, si $d(u, v) = 0$, alors $b_u = b_v = b_{u \wedge v}$. Comme $\zeta_u > 0$ pour tout $u \in T$, cela implique $u = u \wedge v = v$.

Pour montrer la complétude, soit $(u^{(n)}, n \geq 0)$ une suite de Cauchy dans \bar{T} . Comme

$$|b_{u^{(n)}} - b_{u^{(m)}}| \leq d(u^{(n)}, u^{(m)}),$$

la suite $(b_{u^{(n)}}, n \geq 0)$ est elle-même de Cauchy, et converge donc vers une limite b_∞ . Si $\varepsilon > 0$ est donné, il existe N tel que $d(u^{(n)}, u^{(m)}) < \varepsilon$ pour $n, m \geq N$, et on note alors v^ε l'ancêtre (préfixe, pas nécessairement strict) de $u^{(m)}$ de longueur minimale pour lequel $d(v^\varepsilon, u^{(m)}) < \varepsilon$. Notons que v^ε ne dépend pas du choix de $m \geq N$, car si $n, m \geq N$, l'ancêtre commun $u^{(n)} \wedge u^{(m)}$ est lui-même à distance $\leq d(u^{(n)}, u^{(m)}) < \varepsilon$ de $u^{(n)}$ et $u^{(m)}$, et donc v^ε en est un ancêtre, par définition.

Avec $\varepsilon = 2^{-k}$, on construit de la sorte une suite $(v^k, k \geq 1)$ d'éléments de T . Notons que v^k est un ancêtre de v^{k+1} pour tout k , puisque les deux sont des ancêtres d'un même $u^{(n)}$ pour n assez grand, et v^{k+1} est par définition de longueur supérieure à v^k . On note v^∞ l'unique élément de \bar{T} dont v^k est un préfixe pour tout k . Il est alors évident que v^∞ est la limite de v^k pour la distance d , et comme $d(u^{(n_k)}, v^k) \leq 2^{-k}$ pour un n_k assez grand, v^∞ est limite d'une sous-suite de $u^{(n)}$, donc de $u^{(n)}$ puisque cette dernière est de Cauchy. De ce fait, on obtient que le complété de T pour la distance d est un sous-ensemble de \bar{T} . Réciproquement, il est trivial de voir que tout $u \in \partial T$ est limite de son préfixe $u(n)$ de longueur n .

De ce fait, T est dense dans (\bar{T}, d) , et ce dernier est donc séparable. \square

Notons qu'il est immédiat par construction et par la proposition 9, que l'espace (\bar{T}, d) est borné presque-sûrement ; on montre en fait dans [34] qu'il s'agit d'un espace compact.

Par ailleurs, il existe une interprétation naturelle de l'ensemble des feuilles ∂T en termes d'une représentation du processus de fragmentation X à l'aide d'une fragmentation homogène d'intervalles $(\Theta^{(0)}(t), t \geq 0)$ ainsi qu'il est décrit en fin de section 1.2.2. Le processus $(\Theta^{(0)}(t), t \geq 0)$ étant décroissant (au sens de l'inclusion), on définit $\Theta^{(0)}(\infty)$ comme limite de $\Theta^{(0)}(t)$ lorsque $t \rightarrow \infty$. Il est aisé de voir que le borélien $\Theta^{(0)}(\infty)$ est totalement disconnecté, de mesure de Lebesgue 1. Il est en bijection avec ∂T , puisqu'un élément de ∂T correspond à une suite strictement décroissante de composantes connexes de $\Theta^{(0)}(t_n)$ pour des instants t_n tendant vers $+\infty$.

2.2.1 Marquage d'un élément de ∂T au hasard

L'espace \bar{T} présente certaines similarités avec un espace métrique aléatoire introduit par Evans [27] et associé au processus de coalescence de Kingman. Non sans rappeler [27], on peut construire une mesure naturelle μ sur \bar{T} (en fait, sur ∂T) de la façon suivante.

Proposition 12. *Conditionnellement à $((\xi_u, a_u, \zeta_u), u \in \mathcal{U})$, il existe une unique mesure μ sur \bar{T} munie de sa tribu borélienne, attribuant la mesure ξ_u à chaque ensemble*

$$\bar{T}_u := \{v \in \bar{T} : u \text{ est un préfixe de } v\} \quad u \in T.$$

De plus, μ est portée par ∂T .

Démonstration. La mesure μ peut être vue comme la loi d'un élément de ∂T marqué d'une façon aléatoire, ainsi qu'on l'a vu en section 1.3. Avec l'interprétation de ∂T en tant qu'ensemble limite d'une fragmentation homogène d'intervalles $\Theta^{(0)}$, comme à la fin de la section précédente, la mesure μ n'est autre que l'image de la mesure de Lebesgue sur $]0, 1[$ par la bijection qui à un élément de $\Theta^{(0)}(\infty)$ associe la feuille correspondante. Nous donnons néanmoins une seconde construction, qui sera utile par la suite.

Soit $(V_u, u \in \mathcal{U})$ une famille i.i.d. de variables aléatoires uniformes sur $[0, 1[$, indépendantes des étiquettes (ξ_u, a_u, ζ_u) , par rapport auxquelles on conditionne. On construit par récurrence un élément $U(n) \in T$ de longueur n , en posant $U(0) = \emptyset$, et, ayant construit $U(n)$,

$$U(n+1) = U(n)i \iff \sum_{1 \leq j < i} \tilde{\xi}_{U(n)j} \leq V_{U(n)} < \sum_{1 \leq j \leq i} \tilde{\xi}_{U(n)j} \quad (2.4)$$

où l'on rappelle que $\tilde{\xi}_{ui} = \xi_{ui}/\xi_u$. On définit U comme l'unique élément de ∂T dont le préfixe de longueur n est $U(n)$, pour tout n , et on note μ sa loi. Il est alors aisé de montrer que $\mu(\bar{T}_u) = P(U(|u|) = u) = \xi_u$ pour tout $u \in \mathcal{U}$, par récurrence sur la génération $|u|$.

L'unicité découle du fait que $\{\bar{T}_u, u \in T\}$ est un π -système (i.e. stable par intersection finie) qui engendre la tribu borélienne de \bar{T} , ce que nous laissons en exercice. \square

Grâce au lien entre la mesure μ et le fragment marqué, on obtient que sous la mesure $\mathbb{P}^*(d\omega, du) = \mathbb{P}(d\omega) \times \mu_\omega(du)$ sur $\Omega \times \partial T$, où μ_ω est la mesure associée comme dans la proposition 12 pour la réalisation de $((\xi_u(\omega), a_u(\omega), \zeta_u(\omega)), u \in \mathcal{U})$, la suite $(\xi_{u(n)}, n \geq 0)$ a même loi que la suite $(\xi_{b_n^*}, n \geq 0)$ apparaissant dans la proposition 3. En particulier, la suite $(-\log \xi_{u(n)}, n \geq 0)$ est une marche aléatoire dont la loi du pas générique est donnée par (1.3), dont la transformée de Laplace est

$$\mathbb{E}^*[\xi_{u(1)}^p] = \int_{\mathcal{P}_m} \sum_{i \geq 1} s_i^{p+1} \frac{\nu(ds)}{\nu(\mathcal{P}_m)} \quad p \geq 0. \quad (2.5)$$

2.2.2 Propriété de Markov branchante

Dans la section suivante, nous aurons besoin d'une propriété de type « Markov forte branchante » pour le champ de variables aléatoires $((\mathbf{e}_u, (\tilde{\xi}_{ui}, i \geq 1)), u \in \mathcal{U})$, où $\mathbf{e}_u = \xi_u^\alpha \zeta_u$, $\tilde{\xi}_{ui} = \xi_{ui}/\xi_u$. Cette propriété, due à Jagers [35] (voir aussi Chauvin [20]), permet de voir T comme un fractal aléatoire. Elle dit intuitivement que si l'on sélectionne des individus aléatoires $u^{(1)}, u^{(2)}, \dots \in T$ dont aucun n'est préfixe d'un autre, et si cette famille a une propriété d'« option » similaire aux temps d'arrêt de Doob, alors les familles décalées $((\mathbf{e}_{u^{(j)v}}, (\tilde{\xi}_{u^{(j)v}i}, i \geq 1), v \in \mathcal{U}), j \geq 1)$ sont indépendantes et de même loi que la famille initiale¹. Nous la reformulons dans un cadre légèrement différent, mais équivalent à [35], en incorporant deux nouvelles variables indépendantes qui vont permettre de marquer des fragments.

On se donne une famille de variables $(\mathbf{Y}_u = (\mathbf{e}_u, (\tilde{\xi}_{ui}, i \geq 1), V_u^{(1)}, V_u^{(2)}), u \in \mathcal{U})$, dont tous les termes sont indépendants entre eux, les deux premiers termes de \mathbf{Y}_u étant distribués respectivement selon une loi exponentielle de paramètre $\nu(\mathcal{P}_m)$ et selon la loi $\nu(ds)/\nu(\mathcal{P}_m)$, et les deux derniers termes sont uniformes sur $[0, 1]$. Pour chaque $u \in \mathcal{U}$, nous notons \mathcal{F}_u la tribu engendrée par $\{\mathbf{Y}_{u(k)}, 0 \leq k < |u|\}$. Ainsi, pour chaque $u \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, on définit une filtration par $\mathcal{F}_n^u = \mathcal{F}_{u(n)}, n \geq 0$. Soit $\tau = (\tau_u, u \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}})$ une famille de variables aléatoires à valeurs dans l'union disjointe $\mathbb{N} \sqcup \{\infty\}$. On suppose que

1. τ_u est un $(\mathcal{F}_n^u, n \geq 0)$ -temps d'arrêt pour tout $u \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$.
2. pour tout $u, v \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, si $u(\tau_u)$ est un préfixe de v alors $\tau_v = \tau_u$ (autrement dit, aucun des éléments de $\{u(\tau_u) : u \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}\}$ n'est préfixe d'un autre).

On dit que τ est une *ligne d'arrêt*, et on note

$$\mathcal{F}_\tau = \bigvee_{u \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}} \mathcal{F}_{\tau_u}^u,$$

pour la tribu des événements arrivant (strictement) « en dessous » de τ . En pratique, les étiquettes \mathbf{Y}_u pour $u \notin \partial T$ ne nous intéresseront pas, et nous aurons toujours $\tau_u = \infty$ pour de tels u .

1. En première lecture, on pourra en rester à cette description intuitive et ignorer le paragraphe suivant

Proposition 13 (Theorem 4.14 de [35]). *Soit τ une ligne d'arrêt. Alors les familles*

$$\{(\mathbf{Y}_{u(\tau_u)v}, v \in \mathcal{U}) : u \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}\}$$

sont indépendantes², indépendantes de \mathcal{F}_τ , et de même loi que $(\mathbf{Y}_v, v \in \mathcal{U})$ sachant l'événement $\{\tau_u < \infty\}$.

La figure 2 illustre schématiquement ce résultat.

2.3 Dimension de Hausdorff de ∂T

Théorème 14. *Supposons que $\int_{\mathcal{P}_m} s_1^{-1} \nu(ds) < \infty$. Alors, avec probabilité 1,*

$$\dim_{\mathcal{H}}(\partial T) = |\alpha|^{-1}.$$

Notons que l'hypothèse sur la mesure de dislocation ν est peu restrictive. Elle est par exemple toujours vérifiée lorsque les dislocations sont au plus N -aires, c'est-à-dire lorsque $\nu(s_{N+1} > 0) = 0$, ou plus généralement lorsque l'espérance du nombre de fragments produits lors d'une dislocation est finie, i.e.

$$\int_{\mathcal{P}_m} \text{Card}(i : s_i > 0) \nu(ds) < \infty, \quad (2.6)$$

puisqu'alors $s_1^{-1} \leq \text{Card}(i : s_i > 0)$.

Sous l'hypothèse du théorème 14, nous obtenons aussi la dimension de Hausdorff de l'arbre \bar{T} , puisque celle-ci se déduit directement de celle de ∂T : l'ensemble T étant dénombrable, il a une dimension de Hausdorff égale à 0, et par conséquent, avec probabilité 1,

$$\dim_{\mathcal{H}}(\bar{T}) = \dim_{\mathcal{H}}(\partial T) = |\alpha|^{-1}.$$

La suite de cette section est consacrée à la démonstration du théorème 14. La majoration de la dimension de Hausdorff est obtenue en choisissant une « bonne » famille de recouvrements de ∂T . La minoration se montre à l'aide du lemme de Frostman.

2.3.1 Démonstration du théorème 14 : majoration

Pour tout $\varepsilon > 0$, nous allons construire une suite de points $u^{i,\varepsilon} \in T$, $i \geq 1$, et une suite de réels $r^{i,\varepsilon} > 0$, $i \geq 1$, telles que l'ensemble des boules de centre $u^{i,\varepsilon}$ et de rayon $r^{i,\varepsilon}$, $i \geq 1$, recouvre l'ensemble des feuilles ∂T et, presque sûrement,

- (i) $\liminf_{\varepsilon \downarrow 0} \sum_{i \geq 1} (r^{i,\varepsilon})^{-1/\alpha} < \infty$
- (ii) $\sup_{i \geq 1} r^{i,\varepsilon} \rightarrow 0$ quand $\varepsilon \downarrow 0$.

Ceci suffira pour conclure que $\dim_{\mathcal{H}}(\partial T) \leq -1/\alpha$ p.s.

Les $u^{i,\varepsilon}$ se construisent de la manière suivante. A toute feuille $u \in \partial T$ on associe τ_u^ε le plus petit entier n tel que $\xi_{u(n)} \leq \varepsilon$. La famille $\tau^\varepsilon := (\tau_u^\varepsilon, u \in \partial T)$ est alors une *ligne d'arrêt*, au

2. Par convention, la famille $(\mathbf{Y}_{u(\tau_u)v}, v \in \mathcal{U})$ est vide si $\tau_u = \infty$.

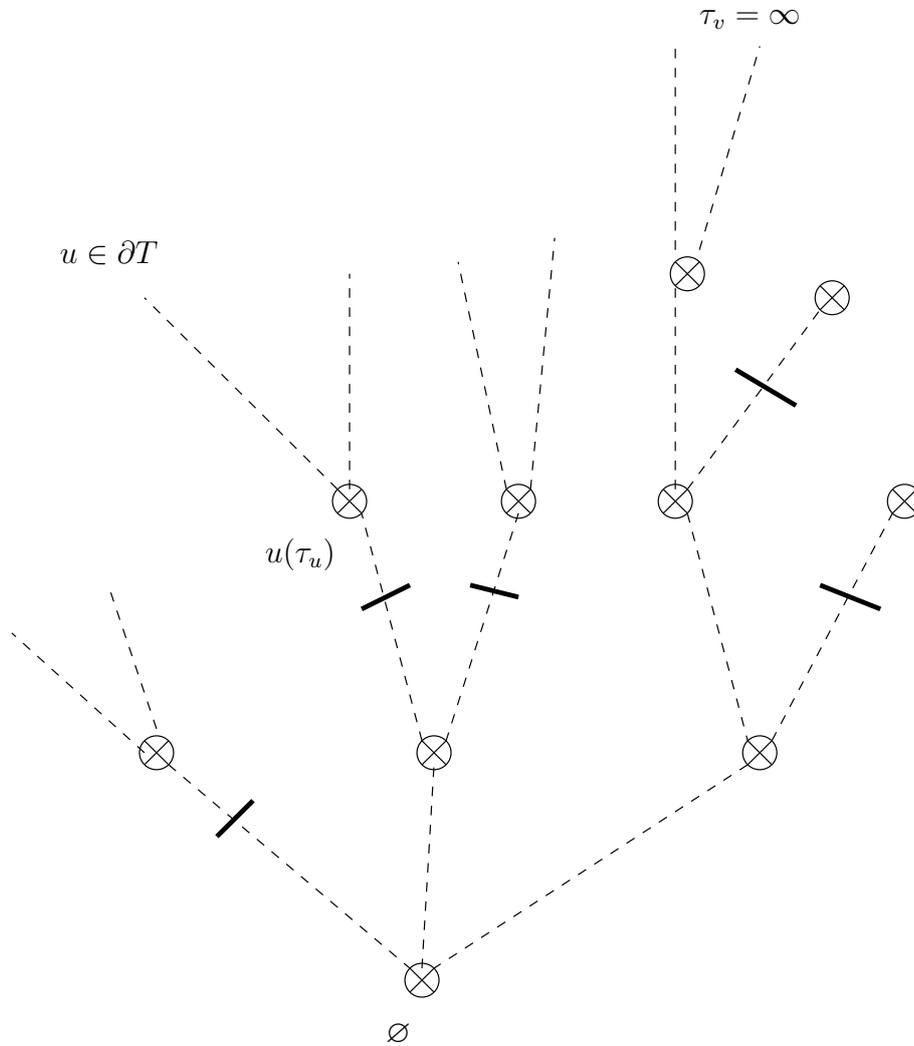


FIGURE 2 – Illustration de la proposition 13. L'ensemble $\{u(\tau_u) : u \in \partial T, \tau_u < \infty\}$ est représenté par des « coupures » sur l'arbre T . Deux arbres marqués au-dessus d'une coupure (lignes épaisses) sont indépendants, et indépendants des événements ne faisant intervenir que des étiquettes en-dessous des coupures.

sens défini dans la section 2.2.2. On en déduit une partition $(A^{i,\varepsilon}, i \in I)$ de ∂T en considérant que deux feuilles u, v appartiennent à un même élément de la partition si et seulement si $u(\tau_u^\varepsilon) = v(\tau_v^\varepsilon)$. On note $(u^{i,\varepsilon}, i \in I)$ l'ensemble des représentants distincts des $u(\tau_u^\varepsilon)$, $u \in \partial T$, et $(\xi_{u^{i,\varepsilon}}, i \geq 1)$ les masses correspondantes. L'ensemble $A^{i,\varepsilon}$ correspond alors à l'ensemble des feuilles descendant de $u^{i,\varepsilon}$ et $\xi_{u^{i,\varepsilon}} = \mu(A^{i,\varepsilon})$. Notons que ces masses sont toutes inférieures à ε et strictement positives.

Notons également que

$$\sum_{i \in I} \xi_{u^{i,\varepsilon}} = 1,$$

puisque $(A^{i,\varepsilon}, i \in I)$ est une partition de ∂T et μ une probabilité sur cet ensemble. Il en résulte que I est nécessairement dénombrable, et dans la suite on considèrera que $I = \mathbb{N}$. On introduit alors, pour tout $i \in \mathbb{N}$,

$$r^{i,\varepsilon} := \sup_{u \in A^{i,\varepsilon}} (d(u, u^{i,\varepsilon})),$$

la hauteur du sous-arbre issu de $u^{i,\varepsilon}$. La propriété de Markov branchante (proposition 13) appliquée à la ligne d'arrêt τ^ε implique que

$$(r^{i,\varepsilon}, i \geq 1) \stackrel{\text{loi}}{=} ((\xi_{u^{i,\varepsilon}})^{-\alpha} \zeta^{i,\varepsilon}, i \geq 1) \quad (2.7)$$

où les $\zeta^{i,\varepsilon}$, $i \geq 1$, sont i.i.d., de même loi que la hauteur totale ζ de l'arbre définie par l'équation (2.3), et indépendantes des $(\xi_{u^{i,\varepsilon}}, i \geq 1)$.

Il reste à vérifier que la famille $((u^{i,\varepsilon}, r^{i,\varepsilon}), i \in \mathbb{N}, \varepsilon > 0)$ satisfait les propriétés (i) et (ii). Vue l'égalité (2.7), $\forall \gamma \geq -1/\alpha$,

$$\mathbb{E} \left[\sum_{i \geq 1} (r^{i,\varepsilon})^\gamma \right] = \sum_{i \geq 1} \mathbb{E}[\xi_{u^{i,\varepsilon}}^{-\alpha \gamma}] \mathbb{E}[\zeta^\gamma] \leq \varepsilon^{-\alpha \gamma - 1} \mathbb{E}[\zeta^\gamma], \quad (2.8)$$

puisque les $\xi_{u^{i,\varepsilon}}$ sont tous inférieurs à ε et que leur somme vaut 1 p.s. Or on sait, d'après le lemme 10, que la hauteur ζ a des moments positifs de tous ordres. Donc, l'inégalité précédente appliquée à $\gamma = -1/\alpha$ implique que

$$\sup_{\varepsilon > 0} \mathbb{E} \left[\sum_{i \geq 1} (r^{i,\varepsilon})^{-1/\alpha} \right] < \infty$$

et on en déduit, grâce au lemme de Fatou, que

$$\liminf_{\varepsilon \downarrow 0} \sum_{i \geq 1} (r^{i,\varepsilon})^{-1/\alpha} < \infty \text{ p.s.}$$

Pour la propriété (ii), il suffit d'utiliser l'inégalité (2.8) avec n'importe quel $\gamma > -1/\alpha$, ce qui nous donne

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[\left(\sup_{i \geq 1} (r^{i,\varepsilon}) \right)^\gamma \right] &\leq \mathbb{E} \left[\sum_{i \geq 1} (r^{i,\varepsilon})^\gamma \right] \\ &\leq \varepsilon^{-\alpha \gamma - 1} \mathbb{E}[\zeta^\gamma] \rightarrow 0 \text{ quand } \varepsilon \downarrow 0. \end{aligned}$$

On conclut à nouveau grâce au lemme de Fatou, en remarquant que $\sup_{i \geq 1} r^{i,\varepsilon}$ décroît quand $\varepsilon \downarrow 0$ et donc que sa limite inférieure est en fait une limite.

2.3.2 Démonstration du théorème 14 : minoration

D'après le lemme de Frostman (voir par exemple [30, Th. 4.13]), nous savons que la dimension de Hausdorff $\dim_{\mathcal{H}}(\partial T)$ est supérieure à γ dès que

$$\int_{\partial T} \int_{\partial T} d(x, y)^{-\gamma} \mu(dx) \mu(dy) < \infty,$$

ceci quelque soit le réel $\gamma \geq 0$ considéré. Remarquons que cette intégrale double se réécrit de la façon suivante : soient, conditionnellement à (\bar{T}, μ) , L_1, L_2 deux variables aléatoires indépendantes distribuées suivant μ ; alors

$$\int_{\partial T} \int_{\partial T} d(x, y)^{-\gamma} \mu(dx) \mu(dy) \stackrel{\text{p.s.}}{=} \mathbb{E} [d(L_1, L_2)^{-\gamma} \mid \bar{T}, \mu]$$

et par conséquent

$$\mathbb{E} \left[\int_{\partial T} \int_{\partial T} d(x, y)^{-\gamma} \mu(dx) \mu(dy) \right] = \mathbb{E} [d(L_1, L_2)^{-\gamma}].$$

On en déduit que $\dim_{\mathcal{H}}(\partial T) \geq \gamma$ presque sûrement dès que l'espérance $\mathbb{E} [d(L_1, L_2)^{-\gamma}]$ est finie, et la minoration cherchée sera donc obtenue si

$$\mathbb{E} [d(L_1, L_2)^{-\gamma}] < \infty, \forall \gamma < -1/\alpha.$$

Le problème est que ce dernier résultat n'est pas vrai en général. Cela dit, il est vérifié sous l'hypothèse supplémentaire (2.6) et c'est ce que nous allons montrer dans les lignes qui suivent. Nous expliquerons ensuite comment adapter cette démonstration lorsque l'hypothèse (2.6) n'est pas vérifiée.

Cas où l'hypothèse (2.6) est vérifiée. Commençons par remarquer que la loi $\mu \otimes \mu$ du couple (L_1, L_2) sachant \bar{T}, μ se construit comme la loi d'un couple d'éléments de ∂T marqués de façon aléatoire, dans la même veine que la construction de μ comme loi d'un fragment marqué vue section 2.2.1. Plus précisément, soient $V^{(1)}$ et $V^{(2)}$ deux suites indépendantes $V^{(i)} := (V_u^{(i)}, u \in \mathcal{U})$, $i = 1, 2$, de v.a. i.i.d. uniformes sur $[0, 1]$ indépendantes des étiquettes $((\xi_u, a_u, \zeta_u), u \in \mathcal{U})$. A partir de la suite $V^{(1)}$ (resp. $V^{(2)}$), on construit une feuille U_1 (resp. U_2) $\in \partial T$ en suivant la récurrence (2.4). Par définition de la mesure μ et l'indépendance des suites $V^{(1)}$ et $V^{(2)}$, la loi conditionnelle du couple (U_1, U_2) sachant \bar{T}, μ , est alors $\mu \otimes \mu$. Dans la suite, avec un léger abus de notation, on peut donc assimiler L_1 à U_1 et L_2 à U_2 , autrement dit, on considère que L_1 et L_2 sont directement construites à partir des suites $V^{(1)}$ et $V^{(2)}$. Remarquons, pour fixer les idées, que du point de vue de la fragmentation d'intervalle Θ correspondante, cette opération revient à marquer deux points uniformément et indépendamment au hasard dans $]0, 1[$, indépendamment de Θ , puis à suivre l'évolution des fragments contenant les deux points marqués.

Par définition,

$$d(L_1, L_2) = b_{L_1} + b_{L_2} - 2b_{L_1 \wedge L_2}.$$

L'objectif des quelques lignes qui suivent est de réécrire cette distance sous une forme plus facilement utilisable pour évaluer la finitude de l'espérance $\mathbb{E}[d(L_1, L_2)^{-\gamma}]$. Considérons pour cela la ligne d'arrêt définie par

$$\tau_u := \begin{cases} |L_1 \wedge L_2| + 1 & \text{si } \max(|u \wedge L_1|, |u \wedge L_2|) \geq |L_1 \wedge L_2| + 1 \\ \infty & \text{sinon.} \end{cases}$$

Reprenant la terminologie de la figure 2, l'ensemble $\{u(\tau_u), u \in \partial T, \tau_u < \infty\}$ correspond à deux coupures sur l'arbre T , toutes deux situées à la génération $|L_1 \wedge L_2| + 1$, la première entre le point de branchement $L_1 \wedge L_2$ et la feuille L_1 , la deuxième entre le même point de branchement $L_1 \wedge L_2$ et la feuille L_2 . La propriété de Markov branchante (proposition 13, section 2.2.2) appliquée à cette ligne d'arrêt implique alors que les temps de mort b_{L_1}, b_{L_2} de L_1, L_2 se réécrivent

$$b_{L_1} = b_{L_1 \wedge L_2} + (\lambda_1)^{-\alpha} B_1, \quad b_{L_2} = b_{L_1 \wedge L_2} + (\lambda_2)^{-\alpha} B_2,$$

où B_1, B_2 sont deux variables aléatoires, indépendantes, de même loi que b_{L_1} , et indépendantes du couple de masses $(\lambda_1, \lambda_2) := (\xi_{L_1(|L_1 \wedge L_2|+1)}, \xi_{L_2(|L_1 \wedge L_2|+1)})$. Par conséquent,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[d(L_1, L_2)^{-\gamma}] &= \mathbb{E}\left[\left((\lambda_1)^{-\alpha} B_1 + (\lambda_2)^{-\alpha} B_2\right)^{-\gamma}\right] \\ &\leq 2\mathbb{E}\left[(\lambda_1)^{\alpha\gamma} ; \lambda_1 \geq \lambda_2\right] \mathbb{E}[B_1^{-\gamma}]. \end{aligned} \quad (2.9)$$

Il reste donc à voir pour quelles valeurs de γ les espérances $\mathbb{E}\left[(\lambda_1)^{\alpha\gamma} ; \lambda_1 \geq \lambda_2\right]$ et $\mathbb{E}[B_1^{-\gamma}]$ sont finies.

(i) Commençons par $\mathbb{E}\left[(\lambda_1)^{\alpha\gamma} ; \lambda_1 \geq \lambda_2\right]$. On a,

$$(\lambda_1, \lambda_2) = (\xi_{L_1(n_{1,2})} \tilde{\lambda}_1, \xi_{L_1(n_{1,2})} \tilde{\lambda}_2)$$

où $n_{1,2} := |L_1 \wedge L_2|$ est la dernière génération commune aux feuilles L_1 et L_2 (en particulier, donc, $L_1(n_{1,2}) = L_2(n_{1,2})$), et $\tilde{\lambda}_1, \tilde{\lambda}_2$ sont les masses relatives $\lambda_1/\xi_{L_1(n_{1,2})}, \lambda_2/\xi_{L_1(n_{1,2})}$ à la génération $n_{1,2} + 1$. A nouveau grâce à la construction de (L_1, L_2) à partir des suites $V^{(1)}$ et $V^{(2)}$, on voit que le couple $(\tilde{\lambda}_1, \tilde{\lambda}_2)$ est indépendant de $\xi_{L_1(n_{1,2})}$ et que sa loi est caractérisée, pour toute fonction test f , par

$$\mathbb{E}\left[f(\tilde{\lambda}_1, \tilde{\lambda}_2)\right] = \int_{\mathcal{P}_m} \sum_{i \neq j} f(s_i, s_j) s_i s_j \mathbf{1}_{\{s_i s_j > 0\}} \frac{\nu(ds)}{\nu(\mathcal{P}_m)}.$$

Il en résulte que

$$\mathbb{E}\left[(\lambda_1)^{-a} ; \lambda_1 \geq \lambda_2\right] = \mathbb{E}\left[\xi_{L_1(n_{1,2})}^{-a}\right] \int_{\mathcal{P}_m} \sum_{1 \leq i < j} s_i^{1-a} s_j \mathbf{1}_{\{s_i s_j > 0\}} \frac{\nu(ds)}{\nu(\mathcal{P}_m)}.$$

Or, l'espérance $\mathbb{E}\left[\xi_{L_1(n_{1,2})}^{-a}\right]$ est finie pour tout $a < 1$. En effet, sachant les étiquettes $((\xi_u, a_u, \zeta_u), u \in \mathcal{U})$ et la suite L_1 , la probabilité que $n_{1,2} = n$ est égale à $\xi_{L_1(n)} - \xi_{L_1(n+1)}$.

Par conséquent,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E} \left[\xi_{L_1(n_{1,2})}^{-a} \right] &= \sum_{n \geq 0} \mathbb{E} \left[\xi_{L_1(n)}^{-a} \mathbf{1}_{\{n_{1,2}=n\}} \right] \\
&= \sum_{n \geq 0} \mathbb{E} \left[\xi_{L_1(n)}^{-a} (\xi_{L_1(n)} - \xi_{L_1(n+1)}) \right] \\
&\leq \sum_{n \geq 0} \mathbb{E} \left[\xi_{L_1(n)}^{1-a} \right] \\
&= \sum_{n \geq 0} \left(\int_{\mathcal{P}_m} \sum_{i \geq 1} s_i^{2-a} \frac{\nu(ds)}{\nu(\mathcal{P}_m)} \right)^n
\end{aligned}$$

la dernière égalité venant de la formule (2.5). Mais pour $a < 1$, on a $\sum_{i \geq 1} s_i^{2-a} < 1$ ν -p.s., puisque ν ne charge pas la suite $(1, 0, \dots)$. Par conséquent la somme ci-dessus converge et l'espérance $\mathbb{E} \left[\xi_{L_1(n_{1,2})}^{-a} \right]$ est finie. On en déduit que pour $a < 1$,

$$\mathbb{E} [(\lambda_1)^{-a} ; \lambda_1 \geq \lambda_2] < \infty \text{ ssi } \int_{\mathcal{P}_m} \sum_{1 \leq i < j} s_i^{1-a} s_j \nu(ds) < \infty. \quad (2.10)$$

Ensuite, il est immédiat, puisque que les s_i sont tous inférieurs à 1 et $\sum_{j \geq 1} s_j = 1$, que

$$\sum_{1 \leq i < j} s_i^{1-a} s_j \leq \text{Card}(i \geq 1 : s_i > 0) \text{ si } a < 1$$

et par conséquent que l'espérance $\mathbb{E} [(\lambda_1)^{-a} ; \lambda_1 \geq \lambda_2]$ est finie pour tout $a < 1$ lorsque l'hypothèse (2.6) est vérifiée.

(ii) Pour évaluer la finitude de $\mathbb{E} [B_1^{-\gamma}]$, rappelons que la distribution de la variable aléatoire B_1 , qui correspond à la hauteur d'une feuille typique, est la même que celle de la fonctionnelle exponentielle $I(\alpha)$ introduite en section 1.3.2. Par conséquent, d'après le lemme 5 (ii), l'espérance $\mathbb{E} [B_1^{-\gamma}]$ est finie pour tout $\gamma < 1 + |\alpha|^{-1}$ dès que la mesure de Lévy Π associée à la loi du fragment marqué intègre la fonction $x \mapsto e^x - 1$. Cette dernière condition, en termes de la mesure ν , est exactement l'hypothèse (2.6).

(iii) On en déduit que sous l'hypothèse (2.6), $\mathbb{E} [d(L_1, L_2)^{-\gamma}]$ est finie dès que $-\alpha\gamma < 1$.

Cas général. Lorsque l'hypothèse (2.6) n'est pas vérifiée, les espérances dans la partie majorante de l'inégalité (2.9) peuvent être infinies pour certains $\gamma < -1/\alpha$ et l'argument précédent n'est plus suffisant pour conclure. L'idée est alors d'adapter cet argument, en ne considérant plus la mesure μ sur ∂T pour appliquer le lemme de Frostman, mais une mesure $\mu_{N,\varepsilon}$ dépendant de deux paramètres, un entier N et un réel $\varepsilon > 0$. La construction de cette mesure est complexe et nous renvoyons à la section 3.3 de [34] pour les détails. Disons simplement ici que sa principale caractéristique est de ne charger qu'un sous-ensemble de feuilles (en général strict) de ∂T . Ce sous-ensemble se construit en ne gardant que les $u \in \partial T$ tels que, pour tout entier n ,

$$- \text{ soit } \xi_{u(n+1)} \geq (1 - \varepsilon)\xi_{u(n)}$$

- soit $\sup_{i \geq 1} \xi_{u(n)i} < (1 - \varepsilon)\xi_{u(n)}$ et $\xi_{u(n+1)}$ fait partie des N plus grandes valeurs de $\{\xi_{u(n)i}, i \geq 1\}$.

Autrement dit, on ne garde que les feuilles de \bar{T} qui sont les feuilles d'un sous-arbre $\bar{T}_{N,\varepsilon}$ de \bar{T} obtenu en ne gardant, à chaque point de branchement, que les N « plus gros » sous-arbres enracinés en ce point de branchement (« plus gros » se référant à la mesure μ), sauf lorsque le plus gros de ces sous-arbres a une masse relative supérieure à $1 - \varepsilon$, auquel cas on ne garde que lui. En appliquant alors le raisonnement ci-dessus au couple $(\bar{T}, \mu_{N,\varepsilon})$ au lieu de (\bar{T}, μ) , on obtient un minorant $m_{N,\varepsilon}$ pour la dimension de Hausdorff de ∂T . Sous l'hypothèse du théorème 14, ce minorant va converger presque sûrement vers $-1/\alpha$ quand $N \rightarrow \infty$ et $\varepsilon \rightarrow 0$. Le calcul de $m_{N,\varepsilon}$ est détaillé dans la section 3.4 de l'article [34].

2.4 Cas d'une fragmentation à dislocations immédiates

Dans le cas où la mesure de dislocation ν est infinie, les propriétés d'extinction presque-sûre des fragmentations auto-similaires que nous avons exposées plus haut (proposition 9 et lemme 10) restent vérifiées. En revanche, il n'y a pas de premier instant de dislocation, et l'on ne peut plus représenter le processus $(X(t), t \geq 0)$ à l'aide de l'arbre \mathcal{U} . Pour décrire la généalogie du processus $(X(t), t \geq 0)$, qui est mise en évidence par une représentation de ce processus à l'aide de partitions d'intervalles de $]0, 1[$ comme décrit à la section 1.2.2, on a alors recours à une classe d'espaces métriques mesurés appelés arbres continus aléatoires, qui furent introduits par Aldous [2, 3, 4]. Ces arbres continus sont intimement liés à une classe d'espaces métriques appelés \mathbb{R} -arbres. On pourra consulter [23] pour un article de revue sur les \mathbb{R} -arbres.

2.4.1 \mathbb{R} -arbres, arbres continus aléatoires

Un espace métrique complet (\mathcal{T}, d) est un \mathbb{R} -arbre s'il vérifie les deux conditions suivantes pour tout $x, y \in \mathcal{T}$.

1. Il existe une application $\varphi_{x,y} : [0, d(x, y)] \rightarrow \mathcal{T}$ qui est une isométrie (le segment $[0, d(x, y)]$ étant muni de la métrique usuelle), telle que $\varphi_{x,y}(0) = x, \varphi_{x,y}(d(x, y)) = y$.
2. Si $q : [0, 1] \rightarrow \mathcal{T}$ est une application continue injective (chemin) avec $q(0) = x, q(1) = y$, alors $q([0, 1]) = \varphi_{x,y}([0, d(x, y)])$.

Notons que la propriété 2, couplée avec le fait que $\varphi_{x,y}$ est une isométrie, montre que cette dernière est unique. On interprète $\varphi_{x,y}([0, d(x, y)]) =: [[x, y]]$ comme l'unique chemin liant x à y dans \mathcal{T} , et qui en plus est un chemin géodésique comme en atteste sa paramétrisation par $[0, d(x, y)]$ via $\varphi_{x,y}$. Les sommets (éléments) d'un \mathbb{R} -arbre peuvent être de différentes natures. On dit que x est une *feuille* si $\mathcal{T} \setminus \{x\}$ est connexe, et on note $\mathcal{L}(\mathcal{T})$ l'ensemble des feuilles de \mathcal{T} . L'ensemble $\mathcal{S}(\mathcal{T}) = \mathcal{T} \setminus \mathcal{L}(\mathcal{T})$ est appelé *squelette* de \mathcal{T} . On dit que x est un *point de branchement* si $\mathcal{T} \setminus \{x\}$ a au moins trois composantes connexes distinctes. Notons que les \mathbb{R} -arbres peuvent avoir des propriétés peu intuitives : par exemple, les points de branchement, ou les feuilles, peuvent former un ensemble dense dans l'arbre, ce qui correspond respectivement à un arbre très « ramifié », ou très « touffu » (il est facile de voir qu'à part le cas trivial où \mathcal{T} est réduit à un point, si $\mathcal{L}(\mathcal{T})$ est dense dans \mathcal{T} , alors il en est de même de l'ensemble des points de branchement, la réciproque étant fautive).

On dit qu'un \mathbb{R} -arbre (\mathcal{T}, d) est *enraciné* si l'on distingue un de ses éléments, appelé racine. On le note en général ρ . Une racine étant fixée, l'arbre (\mathcal{T}, d, ρ) hérite alors d'une structure généalogique naturelle : un élément x est un ancêtre de y , ce que l'on note $x \vdash y$, si et seulement si $x \in [[\rho, y]]$. On note alors \mathcal{T}_x l'ensemble des descendants de x dans \mathcal{T} c'est-à-dire l'ensemble des sommets dont x est un ancêtre. On note que (\mathcal{T}_x, d) est lui-même un \mathbb{R} -arbre, qu'il est naturel d'enraciner en x . Par ailleurs, on appelle $d(\rho, x)$ la *hauteur* de x . Si $x, y \in \mathcal{T}$, il est facile de voir qu'il existe un unique $x \wedge y \in \mathcal{T}$ tel que $[[\rho, x]] \cap [[\rho, y]] = [[\rho, x \wedge y]]$. Cet élément est le *plus récent ancêtre commun* de x et y . Enfin, si x_1, \dots, x_n sont n points de \mathcal{T} , on appelle *arbre réduit de \mathcal{T} engendré par x_1, \dots, x_n* le \mathbb{R} -arbre

$$\bigcup_{i=1}^n [[\rho, x_i]],$$

enraciné en ρ .

Pour introduire la notion d'arbre continu aléatoire, on a besoin d'une structure supplémentaire sur un \mathbb{R} -arbre enraciné, donnée par une mesure de probabilité borélienne sur \mathcal{T} , et qui vérifie les propriétés supplémentaires suivantes

1. μ n'a pas d'atomes
2. $\mu(\mathcal{S}(\mathcal{T})) = 0$
3. $\mu(\mathcal{T}_x) > 0$ pour tout $x \in \mathcal{S}(\mathcal{T})$.

Ces propriétés impliquent des propriétés topologiques sur \mathcal{T} , en particulier, \mathcal{T} doit être séparable par la propriété 3, et par les propriétés 2 et 3, le support topologique de μ contient $\mathcal{L}(\mathcal{T})$. Par les propriétés 1 et 3, l'ensemble $\mathcal{L}(\mathcal{T})$ n'est pas dénombrable, et sans point isolé.

Un arbre continu aléatoire (CRT, pour « Continuum Random Tree ») est, d'un point de vue heuristique, une variable aléatoire à valeurs dans les arbres continus. Nous ne tenterons pas ici de préciser le cadre rigoureux pour manipuler les CRT, d'autant que plusieurs approches sont possibles. Aldous [4] utilise des représentations particulières des \mathbb{R} -arbres mesurés obtenus comme sous-ensembles fermés de l'espace $\ell_1 = \ell_1(\mathbb{N})$ des suites réelles, muni de la norme habituelle $\|x\|_1 = \sum_{i \geq 1} |x_i|$ et de la distance d associée. Un pan de la recherche récente sur les arbres aléatoires, initié par Evans, est de travailler avec des classes d'équivalences de \mathbb{R} -arbres (localement) compacts, considérés à isométrie près, plutôt que d'en choisir des représentants particuliers dans un espace *ad hoc*. À l'aide de métriques à la « Gromov-Hausdorff » [18, 31], on peut tenter de doter l'espace de ces classes d'équivalences de métriques qui en fassent de « bons » espaces probabilisables, c'est-à-dire des espaces polonais. Voir dans cette veine [28, 29, 26].

2.4.2 Arbres continus aléatoires et fragmentation

Les arbres continus aléatoires ainsi introduits sont une façon naturelle de coder les processus de fragmentation auto-similaires d'indice négatif, et généralisent les espaces métriques (\bar{T}, d) introduits dans la section 2.2.

Informellement, si une fragmentation auto-similaire $(X(t), t \geq 0)$ d'indice négatif à valeurs dans \mathcal{P}_m est donnée, et que l'on a marqué n fragments de façon biaisée par la taille, ces n fragments décrivent un \mathbb{R} -arbre \mathcal{T}_n enraciné et avec n feuilles marquées L_1, \dots, L_n , de sorte que

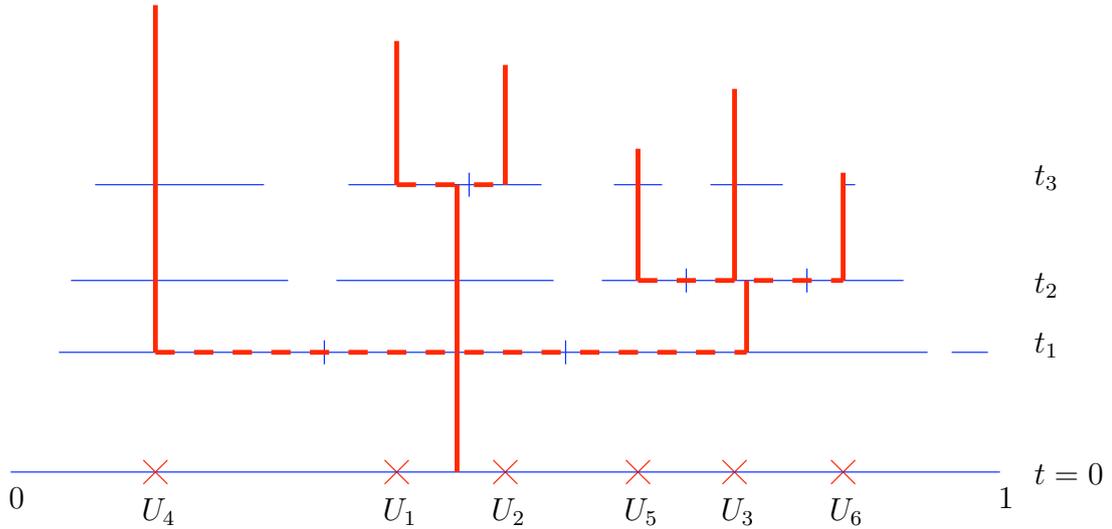


FIGURE 3 – Une fragmentation d'intervalle, avec six points marqués, considérée en trois instants de fragmentation t_1, t_2, t_3 correspondant aux temps de séparation des fragments marqués, et l'arbre à six feuilles associé. Les pointillés relient des points de l'arbre à distance 0.

- le plus récent ancêtre commun entre L_i et L_j est à hauteur $D_{i,j}$, où $D_{i,j}$ est le premier instant où le i -ième fragment marqué s'est séparé du j -ième.
- La feuille L_i est à hauteur D_i , où D_i est le premier instant où le i -ième fragment marqué disparaît (devient de masse nulle).

Ces arbres possèdent la propriété projective suivante : si l'on renumérote au hasard n feuilles de \mathcal{T}_{n+k} et que l'on considère l'arbre réduit engendré par ces n feuilles, alors l'arbre obtenu, à n feuilles marquées, a même loi que \mathcal{T}_n . En utilisant les résultats d'Aldous [4], on peut définir un CRT \mathcal{T} comme limite projective de la famille $(\mathcal{T}_n, n \geq 1)$, la mesure μ sur \mathcal{T} s'obtient alors comme limite de la loi empirique sur les feuilles de \mathcal{T}_n , c'est-à-dire la mesure de probabilité attribuant un même poids à chaque feuille de \mathcal{T}_n . Pour visualiser \mathcal{T} et les arbres \mathcal{T}_n de façon plus directe, on peut utiliser un processus de fragmentation $(\Theta(t), t \geq 0)$ de l'intervalle $]0, 1[$ associé à $(X(t), t \geq 0)$, et obtenu par changement de temps d'un processus homogène $\Theta^{(0)}$ comme dans la section 1.2.2. Si l'on marque n points de $]0, 1[$ par des variables U_1, \dots, U_n uniformes et indépendantes de Θ , on associe le \mathbb{R} -arbre \mathcal{T}_n comme sur la figure 3. De nouveau, il y a une correspondance bijective entre feuilles de l'arbre et éléments de l'intersection d'ouverts denses $\Theta^{(0)}(\infty)$, la mesure μ correspondant à la mesure de Lebesgue sur $]0, 1[$.

La propriété fondamentale de l'arbre $(\mathcal{T}, d, \rho, \mu)$ est que, si $C_t^i, i \geq 1$ sont les composantes connexes de l'ensemble ouvert $\{x \in \mathcal{T} : d(x, \rho) > t\}$, alors le processus à valeurs dans \mathcal{P}_m défini par

$$X'(t) = (\mu(C_t^i), i \geq 1), \quad t \geq 0,$$

est une version càdlàg du processus de fragmentation X dont on était parti, et donc lui est (presque-sûrement) égal partout.

Par des méthodes très similaires à celles exposées dans le cas où ν est une mesure de

dislocation finie (marquage de deux fragments, troncation de l'arbre et lemme de Frostman), on obtient le résultat suivant :

Théorème 15. *Soit (\mathcal{T}, μ) l'arbre de fragmentation associé à une fragmentation auto-similaire d'indice $\alpha < 0$ et de mesure de dislocation ν . On suppose que ν vérifie*

$$\int_{\mathcal{P}_m} \left(\frac{1}{s_1} - 1 \right) \nu(ds) < \infty.$$

Alors, presque-sûrement, la dimension de Hausdorff de $\mathcal{L}(\mathcal{T})$ est $|\alpha|^{-1}$.

Remarque. Pour faire le lien avec les parties précédentes, il va de soi que lorsque ν est une mesure finie, l'arbre continu \mathcal{T} de cette section est intimement relié à l'espace métrique T de la section 2.2. En effet, les ensembles ∂T et $\mathcal{L}(\mathcal{T})$ sont les « mêmes » dans les deux cas, c'est à dire, sont isométriques. La différence essentielle est que l'espace métrique (T, d) n'est pas connexe, en fait, il correspond exactement à l'espace des points de branchement de \mathcal{T} . Pour obtenir un véritable \mathbb{R} -arbre, on ajoute, intuitivement, des segments de \mathbb{R} de longueur ζ_u entre l'élément $u \in T \setminus \{\emptyset\}$ et son père, et un segment de longueur e_\emptyset entre \emptyset et un point supplémentaire $* \notin \overline{U}$. D'un point de vue rigoureux (et hormis l'ajout du segment supplémentaire attaché à \emptyset), cette opération est appelée *tight extension* dans [23], et a un intérêt crucial dans la théorie de reconstruction des arbres phylogénétiques.

Enfin, nous référons à [34] pour des propriétés supplémentaires sur les arbres de fragmentation, en particulier, la possibilité de les coder par des processus aléatoires, dont les trajectoires ont certaines régularités Höldériennes.

2.4.3 Exemples

L'arbre continu brownien L'arbre continu brownien, introduit dans des contextes différents par Aldous [2, 4] et Le Gall [39], est l'exemple le plus important de CRT. Il tient lieu d'arbre continu aléatoire « uniforme », au sens où on peut l'obtenir comme limite d'un arbre (discret) pris uniformément parmi les arbres enracinés à n sommets étiquetés, et muni de la mesure uniforme sur ses sommets, où les arêtes joignant deux sommets voisins auraient une longueur $n^{-1/2}$ (voir les références ci-dessus pour une importante construction de cet arbre à partir d'un processus appelé excursion brownienne standard).

Bertoin [10] a montré, en exploitant la propriété d'invariance par changement d'échelle du mouvement Brownien, et dans un vocabulaire un peu différent, que l'arbre brownien est un arbre de fragmentation avec un indice $-1/2$. La mesure de dislocation de la fragmentation auto-similaire associée est binaire, c'est-à-dire que $\nu(\mathbf{s} \in \mathcal{P}_m : s_1 + s_2 < 1) = 0$, et caractérisée par

$$\nu(s_1 \in dx) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}x^{3/2}(1-x)^{3/2}} dx \mathbb{1}_{\{1/2 \leq x < 1\}}.$$

Arbres stables Les arbres stables, introduits par Duquesne et Le Gall [24, 26], sont une autre classe importante d'arbres continus aléatoires. De façon heuristique, ces arbres s'obtiennent par une renormalisation idoine d'un arbre de Galton-Watson dont la loi de reproduction, est dans le domaine d'attraction d'une loi stable, dont le paramètre β appartient

à $]1, 2]$ ³. Dans le cas où $\beta = 2$, l'arbre stable n'est autre que l'arbre brownien introduit ci-dessus. Dans le cas général, Miermont [43] a montré que l'arbre stable est un arbre de fragmentation d'indice $1/\beta - 1$. La mesure de dislocation peut être calculée explicitement, et fait intervenir des subordinateurs stables, c'est-à-dire des subordinateurs dont l'exposant de Laplace prend la forme $\Phi(q) = Cq^\gamma$ pour un $\gamma \in]0, 1[$ et une constante $C > 0$. Nous ne reproduisons pas la formule ici, mais notons simplement que lorsque $\beta < 2$, contrairement au cas brownien, chaque événement de dislocation casse un fragment en une infinité de fragments plus petit, c'est-à-dire que la mesure de dislocation est portée par le sous-ensemble de \mathcal{P}_m formé des suites dont tous les termes sont non nuls.

À l'aide du théorème 15, on peut montrer [34] que la dimension de Hausdorff de l'arbre stable d'indice β vaut $\beta/(\beta - 1)$. Ce résultat a été obtenu indépendamment dans [26], voir également [25] pour des résultats plus fins sur les propriétés fractales des arbres stables.

2.5 Régularité de la masse de poussière M_P

Nous nous intéressons ici au comportement au cours du temps de la masse de *poussière*

$$M_P(t) := 1 - \sum_{i \geq 1} X_i(t),$$

toujours dans le cas d'une fragmentation d'indice $\alpha < 0$ satisfaisant les hypothèses (1.2). Nous avons vu dans les sections précédentes que la fonction M_P est croissante et atteint 1 en un temps fini presque sûrement. L'objectif de cette section est de présenter des résultats sur sa régularité en fonction du temps, ainsi que sur la structure fractale de son support.

Afin de simplifier certains énoncés, nous supposons que la mesure de dislocation est finie et que la fragmentation est au plus N -aire, c'est-à-dire qu'il existe un entier N tel que

$$\nu(s_{N+1} > 0) = 0.$$

Les résultats de cette section restent cependant vrais sous des hypothèses beaucoup moins restrictives, mais plus lourdes à énoncer. En particulier, il n'est pas nécessaire que la mesure ν soit finie. La proposition 16 (ii) et la majoration du théorème 17 ci-dessous sont d'ailleurs vraies pour toute mesure de dislocation ν . Nous renvoyons à [33] pour plus de détails sur les conditions de validité des résultats de cette section.

En terme d'arbre, la masse de poussière $M_P(t)$ correspond à la μ -mesure de l'ensemble des feuilles mortes avant le temps t , c'est-à-dire que presque sûrement,

$$M_P(t) = \mu(u \in \partial T : b_u \leq t), \forall t \geq 0. \quad (2.11)$$

Cette fonction est habituellement appelée *profil de hauteur cumulatif*. Lorsque la mesure dM_P est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue, sa densité est appelée *profil de hauteur* de l'arbre. On verra dans ce qui suit qu'avec probabilité 1, une condition nécessaire et suffisante pour l'existence d'une telle densité est simplement $\alpha > -1$.

Proposition 16. *Avec probabilité 1,*

3. Pour des définitions sur les arbres de Galton-Watson, on pourra consulter [5]. Pour la définition des lois stables et leurs domaines d'attraction, voir [17].

- (i) M_P est une fonction γ -Höldérienne, $\forall \gamma < |\alpha|^{-1} \wedge 1$,
(ii) soit $\#(t) := \text{Card} \{i : X_i(t) > 0\}$ le nombre de fragments de masse non nulle présents au temps t , alors

$$\int_0^\infty \mathbf{1}_{\{\#(t) < \infty\}} dM_P(t) = 0.$$

Démonstration. (i) La preuve de la régularité Höldérienne est relativement longue et nous n'en donnons ici que l'idée principale. D'après le critère de Kolmogorov, nous savons que si une fonction aléatoire p.s. continue à droite $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ vérifie

$$\mathbb{E}[|F(t) - F(s)|^p] \leq C(t-s)^{1+\varepsilon}, \quad \forall t \geq s \geq 0,$$

pour un triplet de réels strictement positifs p, C, ε , alors, F est p.s. γ -Höldérienne, $\forall \gamma < \varepsilon/p$. Notons que M_P est p.s. continue à droite, vue son expression (2.11) en fonction de la mesure μ . Il suffit donc de vérifier ici que pour tout $\gamma < |\alpha|^{-1} \wedge 1$ et tout entier n , il existe une constante $C_{\gamma,n}$ telle que

$$\mathbb{E}[(M_P(t) - M_P(s))^n] \leq C_{\gamma,n}(t-s)^{n\gamma}, \quad \forall t \geq s \geq 0. \quad (2.12)$$

Ceci peut se montrer en considérant n variables aléatoires L_1, \dots, L_n , qui, conditionnellement à (\bar{T}, μ) , sont indépendantes distribuées suivant μ . On a alors, d'après l'égalité (2.11),

$$(M_P(t) - M_P(s))^n = \mathbb{P}(s < b_{L_i} \leq t, 1 \leq i \leq n \mid \bar{T}, \mu) \text{ p.s.}$$

et par suite,

$$\mathbb{E}[(M_P(t) - M_P(s))^n] = \mathbb{P}(s < b_{L_i} \leq t, 1 \leq i \leq n).$$

Il s'agit ensuite d'utiliser cette expression pour obtenir la majoration (2.12). Le raisonnement utilise le fait que la mesure ν est finie ainsi que l'hypothèse $\nu(s_{N+1} > 0) = 0$, et se fait par récurrence sur n , par des méthodes proches de celles utilisées dans la démonstration de la minoration de la dimension de Hausdorff de ∂T , section 2.3.2, notamment une généralisation de l'équivalence (2.10). Pour plus de détails, voir [33], section 6.2.

(ii) L'idée ici est à nouveau de considérer une feuille L distribuée suivant μ . Avec probabilité 1, la loi de l'instant de mort b_L sachant (\bar{T}, μ) est dM_P et par conséquent

$$\int_0^\infty \mathbf{1}_{\{\#(t) < \infty\}} dM_P(t) = \mathbb{P}(\#(b_L) < \infty \mid \bar{T}, \mu).$$

Il s'agit donc de montrer que $\mathbb{P}(\#(b_L) < \infty) = 0$. Pour cela, on introduit, pour chaque $n \in \mathbb{N}$, l'événement $\Lambda_n \ll$ il y a au moins une feuille descendant de $L(n)$, mais pas de $L(n+1)$, qui meurt strictement après $L \gg$. Par construction, le fragment contenant cette feuille a une masse non nulle au temps b_L . Par construction également, la probabilité $\mathbb{P}(\Lambda_n)$ est indépendante de n . Donc $\inf_n \mathbb{P}(\Lambda_n) > 0$ et d'après la loi du 0-1 de Kolmogorov, l'événement $\limsup \Lambda_n$ a une probabilité égale à 1. On en déduit que presque sûrement, il y a une infinité de fragments de masse non nulle présents au temps b_L . \square

L'assertion (ii) dit donc qu'avec probabilité 1, pour M_P presque tout t , le nombre de fragments de masse strictement positive présents au temps t est infini. D'un autre côté, on

sait que pour tout indice $\alpha \leq -1$, toujours avec probabilité 1, pour presque tout temps t , le nombre de fragments de masse non nulle présent au temps t est fini (voir [11] lorsque $\alpha < -1$ et [33] pour $\alpha = -1$). On en déduit que nécessairement la mesure dM_P est alors presque sûrement singulière par rapport à la mesure de Lebesgue.

Il est naturel dans ce cas de s'intéresser à la dimension de Hausdorff de la mesure dM_P . Nous rappelons que la dimension de Hausdorff d'une mesure η à valeurs dans un espace E est définie par

$$\dim_{\mathcal{H}}(\eta) := \inf_{F \subset E} \{ \dim_{\mathcal{H}}(F) : \eta(F^c) = 0 \},$$

où F^c désigne le complémentaire de F dans E .

Théorème 17. *Lorsque $\alpha \leq -1$, avec probabilité 1,*

$$\dim_{\mathcal{H}}(dM_P) = |\alpha|^{-1}.$$

Remarquons que ce résultat permet d'obtenir une « réciproque » à la proposition 16 (i). En effet, il est bien connu que la dimension de Hausdorff d'une mesure finie η sur \mathbb{R} est reliée à la régularité Höldérienne de sa fonction de répartition $t \mapsto \eta((-\infty, t])$ par

$$t \mapsto \eta((-\infty, t]) \text{ est } \gamma\text{-Hölderienne} \Rightarrow \dim_{\mathcal{H}}(\eta) \geq \gamma. \quad (2.13)$$

Par conséquent, le théorème ci-dessus implique que p.s. M_P n'est pas γ -Höldérienne dès que $\gamma > |\alpha|^{-1}$.

Démonstration. (a) Le fait que la dimension de Hausdorff de dM_P soit inférieure à $|\alpha|^{-1}$ est une simple conséquence du théorème 14. En effet, puisque $M_P(t) = \mu(u \in \partial T : b_u \leq t)$, $dM_P(b_{\partial T}) = 1$ p.s. et par définition de la dimension de Hausdorff d'une mesure, il suffit de montrer que

$$\dim_{\mathcal{H}}(b_{\partial T}) \leq |\alpha|^{-1} \quad \text{p.s.}$$

Mais, clairement, la fonction $b : \partial T \rightarrow \mathbb{R}^+$ est lipschitzienne et par conséquent

$$\dim_{\mathcal{H}}(b_{\partial T}) \leq \dim_{\mathcal{H}}(\partial T) \leq |\alpha|^{-1} \quad \text{p.s.}$$

D'où la majoration.

(b) Pour la minoration, il suffit d'utiliser le résultat (2.13) et la proposition 16 (i). \square

Pour terminer, nous signalons que la mesure dM_P n'est plus singulière lorsque $\alpha > -1$. Plus précisément, Haas [33] établit le résultat suivant.

Proposition 18. *Lorsque $\alpha > -1$, avec probabilité 1, la mesure dM_P a une densité par rapport à la mesure de Lebesgue et cette densité appartient à l'espace $L^2(dt \otimes d\mathbb{P})$.*

3 Spectre multifractal des fragmentations homogènes

Dans la section précédente, nous considérons des fragmentations autosimilaires d'indice négatif. Comme nous l'avons vu, celles-ci ont la propriété remarquable d'atteindre en temps fini l'état $(0, 0, \dots)$ où toute la masse a disparu en raison de « l'emballement » du processus de dislocation sur les petits fragments. On peut coder ces fragmentations par des arbres continus aléatoires -ou \mathbb{R} -arbres- qui sont des espaces métriques mesurés aléatoires dont on a calculé la dimension de Hausdorff. Une propriété importante de ces \mathbb{R} -arbres est que la métrique d définie en 2.2 dont ils sont munis est par nature *généalogique*.

Le cas des fragmentations homogènes est très différent. Il est en effet clair qu'il n'est pas possible d'utiliser la même métrique car les fragmentations homogènes ne s'éteignant jamais, on aurait $d(u, v) = \infty$ quels que soient $u \neq v \in \partial T$. Par ailleurs, le type même d'objets auxquels nous nous intéressons doit changer. Là où l'on calculait la dimension de Hausdorff de l'ensemble de la frontière ∂T , nous allons maintenant considérer des ensembles de points exceptionnels dans cette frontière qui correspondent à des fragments qui décroissent à des vitesses atypiques. À chaque vitesse possible est associé un ensemble distinct de points exceptionnels, et on cherche donc à calculer un spectre multifractal, c'est-à-dire la fonction qui à chaque vitesse associe la dimension de Hausdorff presque sûre de l'ensemble correspondant.

Dans cette section nous allons ainsi étudier les comportements en temps long des fragmentations en nous plaçant dans une métrique différente mais néanmoins tout aussi naturelle que d . Pour cela on va se concentrer sur les fragmentations $(\Theta(t), t \geq 0)$ de l'intervalle $]0, 1[$, homogènes (c'est-à-dire autosimilaires d'indice $\alpha = 0$) sans érosion (i.e. $c = 0$) et telles que leur mesure de dislocation ν est conservatrice (i.e. qui vérifient la propriété (1.2)). La métrique que nous allons utiliser est simplement la distance euclidienne sur $]0, 1[$. Cette distance n'est plus *généalogique*⁴ puisque la distance entre deux points x, y n'est pas directement reliée à $T_{x,y}$, le premier temps pour lequel x et y sont dans deux fragments distincts.

Rappelons que ces processus $\Theta(t)$ sont à valeur dans \mathcal{O} l'ensemble des ouverts O de $]0, 1[$. Pour chaque $t \geq 0$ on écrit $\Theta(t)$ comme une réunion dénombrable d'intervalles ouverts deux-à-deux disjoints $(I_i(t), i = 1, 2, \dots)$. On utilise la notation $(J_i(t), i = 1, 2, \dots)$ lorsque ces intervalles sont numérotés par ordre de taille (i.e. $J_1(t)$ est le plus grand, etc...).

3.1 Fragment typique et plus grand fragment

Si l'on exclut le cas trivial où $\Theta(t) =]0, 1[$ pour tout $t \geq 0$, on peut décrire grossièrement l'évolution en temps long des fragmentations d'intervalle en disant que les fragments qui composent $\Theta(t)$ deviennent sans cesse plus petits avec le temps, et que leur taille tend vers 0 lorsque $t \rightarrow \infty$.

La question de la vitesse de cette convergence est en revanche moins simple. Il a déjà été montré (Corollaire 8) que la taille du fragment marqué, $\chi(t) = |I_U(t)|$, décroît exponentiel-

4. On pourrait cependant définir une métrique *généalogique* d' en posant $d'(x, y) = e^{-T_{x,y}}$ où $T_{x,y}$ est le premier temps pour lequel x et y n'appartiennent pas au même fragment de $\Theta(\cdot)$. L'ouvert $\Theta(\infty) \subset]0, 1[$ muni de cette distance correspond à la frontière de l'arbre \bar{T} (introduit à la section 2.2) munie de la distance $d'(u, v) = e^{-b_{u \wedge v}}$. Ce n'est pas cette direction que nous suivons ici.

lément vite au taux $\kappa'(1)$

$$\frac{-\ln(\chi(t))}{t} \rightarrow \kappa'(1) \text{ p.s.}$$

Rappelons que le fragment marqué est l'intervalle de $\Theta(t)$ qui contient un point U tiré uniformément sur $]0, 1[$ indépendamment de Θ . Cette convergence correspond à la loi des grands nombres pour le subordonateur $(-\ln(\chi(t)), t \geq 0)$ dont l'exposant de Laplace est donné par

$$q \mapsto \kappa(q+1) = \Phi(q) = \int_{\mathcal{P}_m} \left(1 - \sum_{i=1}^{\infty} s_i^{q+1} \right) \nu(ds)$$

Pour tout point $x \in]0, 1[$, rappelons que $|I_x(t)|$ désigne la taille du fragment qui contient x au temps t . On appelle alors la limite (lorsqu'elle existe) $\lim_{t \rightarrow \infty} t^{-1} \ln 1/|I_x(t)|$, la *vitesse de fragmentation* du point x . Le point U étant tiré uniformément, on en déduit que Lebesgue presque tous les points x de $]0, 1[$ admettent $\kappa'(1)$ comme vitesse de fragmentation. Un fragment typique décroît donc exponentiellement vite au taux $v_{\text{typ}} := \kappa'(1)$ que l'on qualifie de *vitesse typique de fragmentation*.

La seconde partie du corollaire 8 suggère cependant que *tous* les fragments ne se comportent pas ainsi puisque la taille du plus grand fragment, $X_1(t)$, ne décroît qu'au taux $\kappa'(\bar{p}) < \kappa'(1)$. Bien sûr cela ne suffit pas à prouver qu'il existe un point x dont la vitesse de fragmentation serait $\kappa'(\bar{p})$ car le plus grand fragment n'est pas nécessairement localisé (i.e. il n'est pas certain qu'il existe un point x qui soit infiniment souvent contenu dans le plus grand fragment). Il est cependant aisé, dans des cas simples, de voir qu'il existe des points avec des vitesses de fragmentation atypiques.

On peut penser à l'exemple élémentaire suivant : chaque fragment vit un temps exponentiel de moyenne 1 au bout duquel il se divise en deux en un point de coupe situé au tiers du fragment avec probabilité $1/2$ et aux deux tiers avec probabilité $1/2$ (si l'on veut diviser l'intervalle $]a, b[$ par exemple, on tire V selon $\mathbb{P}(V = 1/3) = 1/2, \mathbb{P}(V = 2/3) = 1/2$ et l'on divise $]a, b[$ en $]a, a + V(b - a)[$ et $]a + V(b - a), b[$). La mesure de dislocation ν est alors simplement la masse de Dirac en la suite $(2/3, 1/3, 0, \dots)$ et, pour $q > 0$, on a donc ⁵

$$\kappa(q) = 1 - \frac{1 + 2^q}{3^q}.$$

Dans ce cas le processus $\chi(t) = |I_U(t)|$ est particulièrement simple : d'après la proposition 3 le processus $-\ln \chi(t)$ est un processus de Poisson composé dont les sauts arrivent à taux 1 et ont la loi de $-\ln Z$, où la distribution de Z est donnée par $\mathbb{P}(Z = 1/3) = 1/3$ et $\mathbb{P}(Z = 2/3) = 2/3$. La loi forte des grands nombres permet de conclure que presque-sûrement

$$\lim_{t \rightarrow \infty} -\frac{1}{t} \ln \chi(t) = \mathbb{E}(-\ln Z) = \kappa'(1) = \frac{3 \ln 3 - 2 \ln 2}{3}$$

5. Il est en fait ici possible d'étendre κ sur \mathbb{R} tout entier en posant

$$\kappa(q) = \int_{\mathcal{P}_m} \left(1 - \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{1}_{\{x_i > 0\}} x_i^q \right) \nu(dx)$$

et avec la convention $0 \times \infty = 0$.

qui est donc la vitesse typique de cette fragmentation.

On peut également définir récursivement « le plus grand fragment suivi » $G(t)$ de telle sorte que $G(t)$ est toujours le plus grand des deux intervalles créés lors de la dernière dislocation dont il est issu. Il est aisé de voir que presque sûrement $\cap_{t \geq 0} G(t) = \{X\} \neq \emptyset$. Pour ce point aléatoire, $-\ln |I_X(t)|$ est de nouveau un processus de Poisson composé avec des temps d'attentes de moyenne 1, mais dont les sauts sont maintenant tous de taille $-\ln 2/3$. Ce point a donc une vitesse de fragmentation différente puisque $-\ln 2/3 < (3 \ln 3 - 2 \ln 2)/3 = \mathbb{E}(-\ln Z)$. Observons que ce point n'est cependant pas de vitesse minimale puisque nous allons montrer que celle-ci est donnée par $\kappa'(\bar{p})$, le taux de décroissance du plus grand fragment, qui dans notre exemple vaut environ $0.2294 < -\ln 2/3 \simeq 0.4055$.

Cette dernière remarque peut surprendre; elle s'explique de façon informelle ainsi. Les temps écoulés entre les instants de sauts du plus grand fragment suivi forment nécessairement une suite i.i.d. de variables exponentielles de moyenne 1. On peut trouver des points (aléatoires) de vitesse de fragmentation plus petite en suivant plutôt des fragments qui restent stables pendant des laps de temps anormalement longs.

Pour tout intervalle non vide $]a, b[$, il existe un temps $t > 0$ tel que $I_i(t) \subseteq]a, b[$ pour un certain intervalle $I_i(t)$ de $\Theta(t)$. La propriété de Markov forte et d'homogénéité de Θ impliquent que $I_i(t)$ démarre alors une nouvelle fragmentation qui a même loi que le processus initial au facteur d'échelle près. Ainsi, s'il existe presque-sûrement un point de vitesse v dans $]0, 1[$ alors il en existe aussi un dans $]a, b[$ et comme cet intervalle est arbitraire il en existe presque-sûrement un ensemble dense.

On appellera \mathcal{G}_v l'ensemble des points dont la vitesse de fragmentation est v

$$\mathcal{G}_v := \{x \in]0, 1[: \lim_{t \rightarrow \infty} -t^{-1} \ln |I_x(t)| = v\}.$$

On définit également $\bar{\mathcal{G}}_v$ et $\underline{\mathcal{G}}_v$ de la façon suivante :

$$\begin{aligned} \bar{\mathcal{G}}_v &:= \{x \in]0, 1[: \limsup_{t \rightarrow \infty} -t^{-1} \ln |I_x(t)| \leq v\}, \\ \underline{\mathcal{G}}_v &:= \{x \in]0, 1[: \liminf_{t \rightarrow \infty} -t^{-1} \ln |I_x(t)| \geq v\}. \end{aligned}$$

Ainsi un point de $\underline{\mathcal{G}}_v, v > v_{\text{typ}}$ (resp. de $\bar{\mathcal{G}}_v, v < v_{\text{typ}}$) sera, pour t assez grand, dans un fragment anormalement petit (resp. grand) par rapport à $e^{-v_{\text{typ}}t}$.

3.2 Spectre multifractal

Le *spectre multifractal* de la fragmentation est la fonction qui à v associe la dimension de Hausdorff de ces ensembles $\mathcal{G}_v, \bar{\mathcal{G}}_v$ et $\underline{\mathcal{G}}_v$.

Appelons $v_{\min} := \kappa'(\bar{p})$ et $v_{\max} = \kappa'(p+)$. Pour $v \in]v_{\min}, v_{\max}[$ on définit alors

$$C(v) := v\Upsilon_v - \kappa(\Upsilon_v)$$

où $v \mapsto \Upsilon_v$ est l'inverse de $p \mapsto \kappa'(p)$ (c'est-à-dire $\kappa'(\Upsilon_v) = v$).

Nous pouvons à présent donner le résultat principal de cette section :

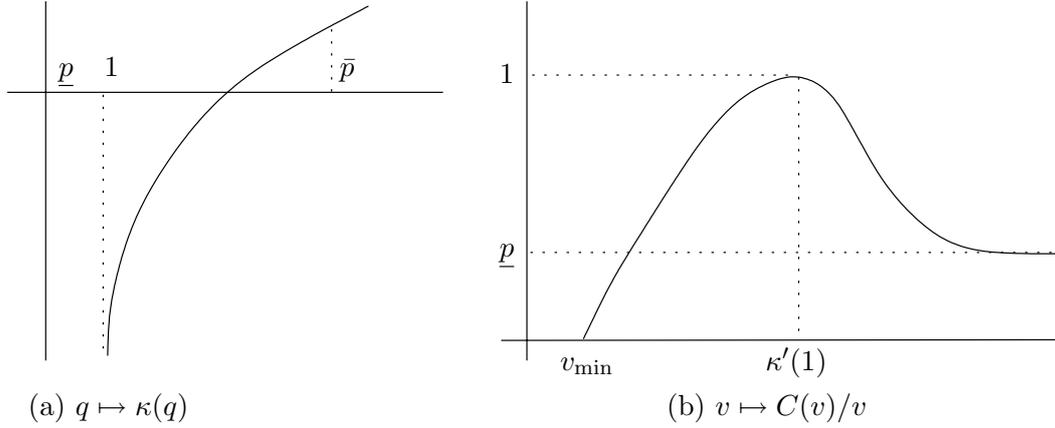


FIGURE 4 – Les fonctions $q \mapsto \kappa(q)$ et $v \mapsto C(v)/v$

Théorème 19. *Pour chaque $v \in]v_{\min}, v_{\max}[$, on a presque-sûrement,*

$$\dim_{\mathcal{H}}(\mathcal{G}_v) = C(v)/v, \quad (3.1)$$

$$\dim_{\mathcal{H}}(\bar{\mathcal{G}}_v) = C(v)/v \text{ si } v \leq v_{\text{typ}} \text{ et } = 1 \text{ si } v \geq v_{\text{typ}}, \quad (3.2)$$

$$\dim_{\mathcal{H}}(\underline{\mathcal{G}}_v) = C(v)/v \text{ si } v \geq v_{\text{typ}} \text{ et } = 1 \text{ si } v \leq v_{\text{typ}}. \quad (3.3)$$

Le spectre multifractal $v \mapsto C(v)/v$ est entièrement déterminé par la fonction $q \mapsto \kappa(q)$, qui est croissante, concave et analytique sur son domaine ouvert de définition. La vitesse minimum, v_{\min} est la dérivée au point \bar{p} et la vitesse maximum, v_{\max} est la dérivée à droite au point \underline{p} . Dans la figure ci-dessus nous avons représenté un exemple pour lequel $\kappa(\underline{p}) \rightarrow -\infty$ quand $\underline{p} \rightarrow \bar{p}$ mais il existe des cas où $\kappa(\underline{p}+) > -\infty$, on alors peut avoir $\kappa'(\underline{p}+) = +\infty$ ou $\kappa'(\underline{p}+) < +\infty$ (dans ce dernier cas $v_{\max} < \infty$ ⁶). La vitesse typique, v_{typ} est la dérivée de κ en 1.

La fonction $v \mapsto C(v)/v$ est le spectre multifractal de fragmentation. Des calculs élémentaires montrent que $C(v_{\text{typ}})/v_{\text{typ}} = 1$, $C(v_{\min})/v_{\min} = 0$, et que la dérivée en v_{\min} est donnée par $\kappa(\bar{p})/v_{\min}^2 > 0$. On peut en outre vérifier que $v \mapsto C(v)/v$ est continue et décroissante au fur et à mesure que v s'éloigne de v_{typ} . Il n'est cependant pas nécessaire que $C(v)/v \rightarrow 0$ quand $v \rightarrow v_{\max}$. Plus précisément

$$\lim_{v \rightarrow v_{\max}} C(v)/v = \lim_{\underline{p} \searrow \bar{p}} \underline{p} - \kappa(\underline{p})/\kappa'(\underline{p}) \geq \underline{p}.$$

6. Le cas $v_{\max} < +\infty$ ne peut se produire que pour des mesures ν finies et qui ne créent à chaque dislocation qu'un nombre fini de fragments.

Avant de justifier rigoureusement le théorème 19, nous donnons à présent une simple explication heuristique de la forme particulière du spectre multifractal.

Idée de la preuve : Ce résultat repose de façon essentielle sur un principe de grandes déviations pour le nombre de fragments de taille anormale. Puisque l'on ne s'intéresse pour l'instant qu'au *nombre* des fragments atypiques, on peut travailler avec une fragmentation de masse $X(t) = (X_1(t), X_2(t), \dots), t \geq 0$, et nous pouvons enregistrer l'état du système à chaque instant t par une mesure ponctuelle Z_t qui est définie par

$$Z_t(dy) = \sum_i \delta_{t^{-1} \ln X_i(t)}(dy).$$

Le résultat de grande déviation que l'on cherche se formule en terme de ce processus à valeur mesure Z_t . On a en effet $Z_t(]a, b]) = \#\{i \in \mathbb{N} : X_i(t) \in [e^{-bt}, e^{-at}]\}$.

Notre but est d'appliquer le théorème de Gärtner-Ellis (voir le paragraphe 2.3 de [22]). La condition fondamentale dont nous avons besoin porte sur le comportement de la transformée de Laplace de Z_t . Or on voit immédiatement que

$$\int_{\mathbb{R}} e^{tpy} Z_t(dy) = \sum_{i=1}^{\infty} X_i(t)^p = e^{-t\kappa(p)} M(p, t).$$

Ainsi le théorème 7 entraîne que pour $p \in]\underline{p}, \bar{p}[$, presque sûrement

$$\Lambda(p) := \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln \int_{\mathbb{R}} e^{tpy} Z_t(dy) = -\kappa(p).$$

Si au contraire $p \geq \bar{p}$, il suffit de remarquer que $\forall p \geq \bar{p}$

$$X_1^p(t) \leq \sum_i X_i(t)^p \leq X_1^{p-\bar{p}}(t) \sum_{i=1}^{\infty} X_i(t)^{\bar{p}} \leq X_1^p(t) + \sum_{i=1}^{\infty} X_i(t)^{\bar{p}}$$

et d'utiliser le Corollaire 8

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln X_1(t) = -\kappa'(\bar{p})$$

pour en déduire de nouveau en utilisant le théorème 7 que pour $p \geq \bar{p}$ presque sûrement

$$\Lambda(p) := \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln \int_{\mathbb{R}} e^{tpy} Z_t(dy) = -p\kappa'(\bar{p}). \quad (3.4)$$

On est donc en mesure d'appliquer le théorème de Gärtner-Ellis dont nous ne donnons pas la conclusion générale mais seulement l'application qui nous sert. La transformée de Fenchel-Legendre Λ^* de la fonction Λ est donnée par $\Lambda^*(a) = \sup_{p \geq \underline{p}} (ap - \Lambda(p))$ et un simple calcul montre que pour $v \geq v_{\min}$

$$\Lambda^*(-v) = \kappa(\Upsilon_v) - v\Upsilon_v = -C(v).$$

On peut ainsi conclure que pour tout $v > 0$

$$C(v) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln \left(\text{Card} \left\{ i \in \mathbb{N}, e^{-(v+\varepsilon)t} \leq X_i(t) \leq e^{-(v-\varepsilon)t} \right\} \right). \quad (3.5)$$

Si l'on admet à présent qu'en prenant t suffisamment grand les intervalles $I_i(t)$ dont la taille est approximativement e^{-vt} forment un « bon » recouvrement de \mathcal{G}_v , le résultat s'explique alors très simplement à l'aide de (3.5) : ce recouvrement consiste en un nombre de l'ordre de $e^{C(v)t}$ boules de diamètre approximatif e^{-vt} . L'exposant critique pour la mesure de Hausdorff est alors clairement $C(v)/v$. \square

La preuve du théorème 19 donnée dans [8] suit le principe esquissé ci-dessus. Cependant, dans un souci de simplification, nous utiliserons ici un résultat de grandes déviations plus précis que (3.5), que nous ne démontrerons pas, et qui repose essentiellement sur l'analogie déjà évoquée entre les processus de fragmentation et les marches aléatoires avec branchement. En effet, dans [14], après avoir donné des résultats de convergence uniforme analogues au théorème 7, Biggins étudie des résultats de type « grandes déviations » que l'on peut également exploiter et adapter dans le contexte des fragmentations.

Plus précisément, il est possible de montrer (nous renvoyons à [13] pour une discussion plus détaillée) que pour tout $v \in]v_{\min}, v_{\max}[$ et a, b arbitraires tels que $0 \leq a < b$ on a

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln \# \{ i : ae^{-tv} \leq X_i(t) \leq be^{-tv} \} = C(v). \quad (3.6)$$

C'est ce résultat que nous utiliserons dans la suite.

3.3 Preuve du théorème 19 : majoration

En remarquant que

$$\mathcal{G}_v = \underline{\mathcal{G}}_v \cap \overline{\mathcal{G}}_v$$

on voit qu'il suffit de prouver les majorations pour les équations (3.2) et (3.3).

Commençons par (3.3). Fixons $v > v_{\text{typ}}$ (on s'intéresse aux fragments qui décroissent anormalement rapidement) et définissons

$$\Gamma_v(t) = \{ i \in \mathbb{N} : X_i(t) \leq e^{-vt} \}$$

l'ensemble des indices des blocs susceptibles de faire partie du recouvrement. On note que $\forall N \in \mathbb{N}, \forall w \in]v_{\text{typ}}, v[$ l'ensemble $\cup_{n \geq N} \cup_{i \in \Gamma_w(n)} J_i(n)$ est un recouvrement de $\underline{\mathcal{G}}_v$ (c'est en fait un recouvrement de l'ensemble $\{x \in]0, 1[: \limsup_{t \rightarrow \infty} -\frac{1}{t} \ln |I_x(t)| > v\}$). Il nous suffit ainsi de prouver que pour $\alpha > C(v)/v$, arbitraire et pour w assez proche de v

$$\sum_n \sum_{i \in \Gamma_w(n)} X_i^\alpha(n) < \infty.$$

Fixons $\varepsilon > 0$ et prenons $\alpha = C(v)/v + \varepsilon$.

On a alors

$$\begin{aligned}
\sum_{i \in \Gamma_w(n)} X_i^\alpha(n) &= \sum_{i \in \Gamma_w(n)} X_i^{\Upsilon_v - \kappa(\Upsilon_v)/v + \varepsilon}(n) \\
&\leq e^{-nw(-\kappa(\Upsilon_v)/v + \varepsilon)} \sum_{i \in \Gamma_w(n)} X_i^{\Upsilon_v}(n) \\
&\leq e^{-nw(-\kappa(\Upsilon_v)/v + \varepsilon)} \sum_{i \in \mathbb{N}} X_i^{\Upsilon_v}(n) \\
&= \exp\{-n[(w-v)(\varepsilon - \kappa(\Upsilon_v)/v) + v\varepsilon]\} \left(e^{n\kappa(\Upsilon_v)} \sum_{i \in \mathbb{N}} X_i^{\Upsilon_v}(n) \right)
\end{aligned}$$

En choisissant w assez proche de v on peut rendre le terme $[(w-v)(\varepsilon - \kappa(\Upsilon_v)/v) + v\varepsilon]$ positif. Le deuxième terme du produit est simplement la martingale du théorème 7, $M(t, \Upsilon_v) = e^{n\kappa(\Upsilon_v)} \sum_{i \in \mathbb{N}} X_i^{\Upsilon_v}(n)$ qui est convergente. On en déduit que pour w assez proche de v on a presque-sûrement

$$\sum_{i \in \Gamma_w(n)} X_i^\alpha(n) = o(e^{-n\varepsilon'})$$

pour un $\varepsilon' > 0$ bien choisi, ce qui démontre la majoration pour (3.3).

La preuve de la majoration pour (3.2) se fait en utilisant le même type d'arguments. On fixe $v < v_{\text{typ}}$. À la différence du cas précédent on a à présent $\kappa(\Upsilon_v) > 0$.

On note $\Gamma_v^c(t) := \mathbb{N} \setminus \Gamma_v(t)$ le complémentaire dans \mathbb{N} de $\Gamma_v(t)$. On remarque que $\forall N \in \mathbb{N}$, pour tout $w \in]v, v_{\text{typ}}[$ l'ensemble $\cup_{n \geq N} \cup_{i \in \Gamma_w^c(n)} J_i(n)$ est un recouvrement de $\overline{\mathcal{G}}_v$.

Rappelons que le fragment marqué χ_t étant un échantillon biaisé par la masse de la suite $(X_1(t), \dots)$ on a

$$\mathbb{E} \left(\sum_{i=1}^{\infty} X_i^\alpha(t) \right) = \mathbb{E} (\chi(t)^{\alpha-1})$$

pour tout $\alpha > 0$. De façon analogue on a l'identité

$$\mathbb{E} \left(\sum_{i \in \Gamma_w^c(t)} X_i^\alpha(t) \right) = \mathbb{E} (\chi(t)^{\alpha-1}, \chi_t > e^{-wt}).$$

Notons $\xi_t = -\ln \chi_t$ pour tout $t \geq 0$. On a alors

$$\begin{aligned}
\mathbb{E} \left[\sum_{i \in \Gamma_w^c(t)} X_i^{C(v)/v + \varepsilon}(t) \right] &= \mathbb{E} \left[\chi_t^{(C(v)/v + \varepsilon - 1)}, \chi_t > e^{-wt} \right] \\
&\leq e^{(\kappa(\Upsilon_v)/v - \varepsilon)wt} \mathbb{E} \left[e^{-(\Upsilon_v - 1)\xi_t} \right] \\
&= e^{(\kappa(\Upsilon_v)/v - \varepsilon)wt} e^{-t\kappa(\Upsilon_v)}
\end{aligned}$$

où la dernière égalité repose simplement sur le fait que ξ_t est un subordonateur dont l'exposant de Laplace est donné par la fonction $\Phi(q) = \kappa(q+1)$. Pour conclure on remarque que

$$(\kappa(\Upsilon_v)/v - \varepsilon)wt - t\kappa(\Upsilon_v) = t((w-v)(\kappa(\Upsilon_v)/v - \varepsilon) - v\varepsilon)$$

est négatif pour w suffisamment proche de v ce qui implique que la série $\sum_{i \in \Gamma_w^c(n)} X_i^\alpha(n)$ est alors convergente. La borne supérieure pour (3.2) est donc prouvée.

3.4 Preuve du théorème 19 : minoration

La preuve de la minoration est, comme souvent, plus délicate. Nous allons construire un sous-ensemble K de \mathcal{G}_v dont la dimension de Hausdorff sera arbitrairement proche de $C(v)/v$. Plus précisément, nous allons minorer $\dim_{\mathcal{H}}(K)$ en utilisant l'indice de continuité de Hölder d'un processus croissant, indexé par $t \in]0, 1[$, qui ne croît que sur les points de K , et qui peut donc s'interpréter comme un « temps local » sur K .

L'idée sur laquelle repose la construction de l'ensemble K est très naturelle et fait appel à un processus de branchement : on se fixe un pas de temps $\delta > 0$ et l'on pose $H_\delta(0) = \{]0, 1[\}$. On construit ensuite $(H_\delta(n), n \in \mathbb{N})$ récursivement : pour chaque n , $H_\delta(n)$ est une collection d'intervalles présents au temps δn , qui sont inclus dans l'un des intervalles de la génération $n - 1$ et qui vérifient certaines conditions de taille relative. On note $G_\delta(n)$ l'union de ces intervalles qui est donc un ouvert de $]0, 1[$. Ainsi $(G_\delta(n))_{n \in \mathbb{N}}$ définit une suite d'ouverts emboîtés. On pose alors $K = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} G_\delta(n)$.

Pour chaque intervalle $]a, b[\subset \mathbb{R}^+$ on définit pour tout $t > 0$

$$N_{]a, b[}(t) = \text{Card}\{i : |J_i(t)| \in]ae^{-vt}, be^{-vt}[, \{0, 1\} \cap \bar{J}_i(t) = \emptyset\}, \quad (3.7)$$

c'est-à-dire le nombre d'intervalles dont la taille est comprise entre ae^{-vt} et be^{-vt} , et dont l'adhérence ne contient ni 0 ni 1. Pour chaque $s > 0$ et $j \in \mathbb{N}$, conditionnellement à $|J_j(s)| > 0$, la propriété d'homogénéité entraîne que $N_{]a, b[}(t)$ a la même loi que

$$\text{Card}\left\{i : J_i(t+s) \subseteq J_j(s), \quad \frac{|J_i(t+s)|}{|J_j(s)|} \in]ae^{-vt}, be^{-vt}[, \quad \partial J_j(s) \cap \bar{J}_i(t+s) = \emptyset\right\}$$

où ∂I désigne la frontière de I .

À présent on fixe $0 < a < b < 1 < c < d$ ainsi que $\delta > 0$. Posons $H_\delta(0) := \{]0, 1[\}$. On procède par récurrence sur n pour construire $H_\delta(n)$. Pour chaque n , $H_\delta(n)$ est la collection des intervalles de $\Theta(n\delta)$ qui remplissent trois conditions. Premièrement, chaque intervalle $I \in H_\delta(n)$ doit être inclus dans un $J \in H_\delta(n-1)$. Deuxièmement, si $I \in H_\delta(n)$ et $J \in H_\delta(n-1)$ sont tels que $I \subset J$ alors

- si $|J| < e^{-v(n-1)\delta}$ alors $|I|/|J| \in]ce^{-v\delta}, de^{-v\delta}[$.
- si $|J| > e^{-v(n-1)\delta}$ alors $|I|/|J| \in]ae^{-v\delta}, be^{-v\delta}[$.

Enfin, on impose dans les deux cas que $\bar{I} \cap \partial J = \emptyset$.

Certains aspects de ce processus H_δ rappellent beaucoup les processus de branchement multi-types. Chaque particule correspond à un intervalle et possède donc une longueur. Une « particule » I de la n -ième génération (c'est-à-dire un intervalle qui fait partie de la collection $H_\delta(n)$) sera dit

- de type 1 si $|I| < e^{-vn\delta}$ et dans ce cas sa descendance aura la même distribution que $N_{]c, d[}$
- de type 2 si $|I| > e^{-vn\delta}$ et dans ce cas sa descendance aura la même distribution que $N_{]a, b[}$

Comme pour les processus de branchement multi-types, la loi du nombre total d'enfants d'une particule I ne dépend que de son type. En revanche la répartition de ces particules filles entre les types 1 et 2 dépend de la taille précise de I .

Il est facile de constater par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, pour chaque $I \in H_\delta(n)$,

$$e^{vn\delta}|I_n| \in]a, d[. \quad (3.8)$$

On en conclut aisément que presque-sûrement, pour toute suite emboîtée d'intervalles $I_n \in H_\delta(n)$ (on conditionne implicitement le processus H à ne pas s'éteindre)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} -\ln |I_n|/n\delta = v.$$

Rappelons que l'on a exigé que si $I \in H_\delta(n)$, $J \in H_\delta(n-1)$ et $I \subset J$ alors $\bar{I} \cap \partial J = \emptyset$. Ceci permet d'affirmer que pour toute suite infinie d'intervalles emboîtés $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que $\forall n, I_n \in H_\delta(n)$, l'intersection $\cap I_n$ est non-vidue. Un simple argument de monotonie permet de conclure que si $\cap I_n = \{x\}$, alors presque-sûrement $-\frac{1}{t} \ln |I_x(t)| \rightarrow v$ et donc $x \in \mathcal{G}_v$.

Pour chaque n on définit

$$G_\delta(n) := \bigcup_{I \in H_\delta(n)} I.$$

On vient ainsi de montrer que $\cap_n G_\delta(n) \subseteq \mathcal{G}_v$.

Nous devons à présent régler deux problèmes. Tout d'abord il faut choisir δ de façon à « attraper » assez de \mathcal{G}_v , et ceci revient simplement à contrôler le taux de croissance du processus de branchement. Puis, afin de pouvoir utiliser des résultats classiques sur les processus de Galton-Watson sur-critiques nous devons nous ramener à ce cas en élaguant notre processus H , et ce sans trop diminuer le taux de croissance.

3.4.1 Taux de croissance et élagage

En utilisant (3.6) il est clair que si l'on se fixe $\varepsilon' > 0$ et $\eta > 0$ on peut trouver t_0 arbitrairement grand tel que

$$\forall t > t_0 : \max\{\mathbb{P}(|t^{-1} \ln(N_{]a,b[}(t)) - C(v)| > \eta), \mathbb{P}(|t^{-1} \ln(N_{]c,d[}(t)) - C(v)| > \eta)\} < \varepsilon'. \quad (3.9)$$

Pour chaque $t > 0$ on peut définir une variable $\tilde{N}(t)$ dont la loi est donnée par

$$\mathbb{P}(\tilde{N}(t) = e^{(C(v)-\eta)t}) = 1 - \varepsilon'$$

et

$$\mathbb{P}(\tilde{N}(t) = 0) = \varepsilon'.$$

Remarquons que

$$|t^{-1} \ln(\mathbb{E}[\tilde{N}(t)]) - C(v)| \leq \eta + t^{-1} |\ln(1 - \varepsilon')|.$$

Fixons à présent $\varepsilon > 0$, on peut alors choisir ε' et η tels que $\eta + |\ln(1 - \varepsilon')| < \varepsilon$. Prenons $\delta > t_0$ où t_0 est choisi comme ci-dessus. Si l'on note $m := \mathbb{E}(\tilde{N}(\delta))$, il est aisé de voir que

$$|\delta^{-1} \ln m - C(v)| < \varepsilon. \quad (3.10)$$

Remarquons ensuite que $\tilde{N}(\delta)$ est dominé stochastiquement tant par $N_{]a,b[}(t)$ que par $N_{]c,d[}(t)$. Il est donc possible, en choisissant $\delta > t_0$ de définir très simplement une procédure d'élagage (à chaque noeud on décide ou non d'éliminer une partie ou la totalité de la descendance) qui transforme le processus de branchement H en un processus de Galton-Watson $\mathbb{H}_{v,\varepsilon}$ dont la loi de reproduction est donnée par $\tilde{N}(\delta)$. Plus précisément, en notant $M = e^{(C(v)-\eta)t}$, pour chaque noeud, si le nombre de descendants est inférieur à M on les élimine tous, et si

ce nombre est supérieur à M on élague les descendants en excès pour n'en laisser que M . Enfin, indépendamment pour chaque noeud de ce dernier type, avec probabilité

$$\mathbb{P}(N_{]a,b[}(\delta) > M) - \mathbb{P}(\tilde{N}(\delta) \geq M)$$

pour les noeuds dont la descendance est donnée par $N_{]a,b[}(\delta)$ et avec probabilité

$$\mathbb{P}(N_{]c,d[}(\delta) > M) - \mathbb{P}(\tilde{N}(\delta) \geq M)$$

pour les noeuds dont la descendance est donnée par $N_{]c,d[}(\delta)$, on élimine complètement la descendance (ceci permet de retrouver la bonne probabilité de ne pas avoir de descendance).

Comme $m = \mathbb{E}(\tilde{N}(\delta)) > 1$, le processus de Galton-Watson $\mathbb{H}_{v,\varepsilon}$ est sur-critique. En outre, pour chaque $n \in \mathbb{N}$ l'adhérence de $\mathbb{G}_{v,\varepsilon}(n) := \cup_{I \in \mathbb{H}_{v,\varepsilon}(n)} I$ est incluse dans $\mathbb{G}_{v,\varepsilon}(n-1)$. Enfin, d'après (3.8) on a

$$\cap_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{G}_{v,\varepsilon}(n) \subseteq \mathcal{G}_v.$$

Ce dernier point n'a de réelle signification que si le processus ne s'éteint pas, aussi dans la suite nous conditionnons à la non-extinction. Il n'y a pas de coût à faire ceci car si le processus $\mathbb{H}_{v,\varepsilon}(\cdot)$ s'éteint, par homogénéité on peut toujours redémarrer un nouveau processus de branchement indépendant sur n'importe quel fragment présent à cet instant. On peut recommencer cette procédure jusqu'à ce que l'on finisse par trouver un processus qui survit. Autrement dit, $\cap_n \mathbb{G}_{\varepsilon,\delta}(n)$ est non-vide avec probabilité positive, mais non presque-sûrement. Il suffit cependant de montrer que la dimension de cet ensemble est la bonne avec probabilité strictement positive car la dimension de \mathcal{G}_v est nécessairement une constante déterministe en raison de l'indépendance de la fragmentation sur des intervalles disjoints.

Nous montrons maintenant que $\dim_{\mathcal{H}}(\mathcal{G}_v) \geq C(v)/v$ pour $v \in]v_{\min}, v_{\max}[$ ce qui entraîne également le résultat pour $\overline{\mathcal{G}}_v$ et $\underline{\mathcal{G}}_v$ par inclusion.

3.4.2 Preuve de la borne inférieure

On se donne $v \in]v_{\min}, v_{\max}[$ et $\varepsilon > 0$. On choisit $\delta > t_0$ comme ci-dessus et on considère le processus de Galton-Watson $\mathbb{G}_{v,\varepsilon}$ (que l'on notera $\mathbb{G}(n)$ dans la suite pour simplifier, de même on abandonne à présent les indices dans $\mathbb{H}_{v,\varepsilon}(n)$ pour noter $\mathbb{H}(n)$). On rappelle que ε contrôle la précision du taux de croissance et que δ est le pas de temps entre chaque génération. On appelle

$$Z(n) = \text{Card}\{\mathbb{H}(n)\}$$

la taille de la génération n .

La loi de reproduction de $\mathbb{G}(n)$ étant bornée (elle est portée par $\{0, e^{(C(v)-\eta)t}\}$), il est bien connu que $m^{-n}Z(n)$ est une martingale qui converge donc p.s. quand $n \rightarrow \infty$ vers une variable notée W , et plus précisément $W > 0$ presque-sûrement quand le processus ne s'éteint pas.

Considérons ς un noeud de cet arbre (ς est donc aussi un intervalle de $]0, 1[$). On note $\|\varsigma\|$ sa hauteur dans l'arbre et l'on appelle $Z^{(\varsigma)}(n)$ le nombre de ses descendants dans l'arbre à la génération $\|\varsigma\| + n$. Enfin on appelle $W(\varsigma)$ le « poids renormalisé » du sous-arbre enraciné en ς , c'est-à-dire

$$W(\varsigma) := \lim_{n \rightarrow \infty} m^{-n} Z^{(\varsigma)}(n) = \lim_{n \rightarrow \infty} m^{-n} \text{Card}\{\varsigma' \in \mathbb{H}(\|\varsigma\| + n), \varsigma' \subset \varsigma\}.$$

Pour chaque $I \subset]0, 1[$ définissons

$$\begin{aligned}\mathbb{H}_I(n) &= \{\varsigma \in \mathbb{H}(n), \varsigma \cap I \neq \emptyset\} \\ Z_I(n) &= \text{Card}(\mathbb{H}_I(n))\end{aligned}$$

afin d'introduire

$$x \rightarrow L_x := \lim_n m^{-n} Z_{]0, x[}(n), \quad x \in]0, 1[.$$

Lemme 20. *Pour chaque $\varepsilon > 0$,*

1. *il existe une version \tilde{L} de L qui est Hölder continue d'ordre α pour tout $\alpha < (C(v) - \varepsilon)/v$*
2. *L ne croît que sur l'ensemble $\cap_n \mathbb{G}_{v, \varepsilon}(n)$.*

Preuve : Le premier point se démontre à l'aide du critère de Kolmogorov (voir [46] Theorem 2.1 p.26).

Pour tous $x < y \in]0, 1[$ on a par définition

$$|L_x - L_y| = \lim_n m^{-n} Z_{]x, y[}(n).$$

Pour tout intervalle ouvert $J \subseteq]0, 1[$, on définit

$$\eta(J) := \sup\{n \in \mathbb{N} : e^{-v\delta n} \geq |J|\} = \lceil -\ln(|J|)/v\delta \rceil.$$

C'est pratiquement le plus grand n tel que J peut être inclus dans l'un des intervalles de la collection $\mathbb{H}(n)$. Ainsi il est aisé de voir qu'au temps $\eta(J)$, le nombre d'intervalles de $\mathbb{H}(\eta(J))$ qui ont une intersection non-vide avec J est borné. Plus précisément, d'après (3.8), pour chaque n la taille des intervalles de $\mathbb{H}(n)$ est minorée par $ae^{-vn\delta}$, ce qui permet d'affirmer que $|J|ae^{-v\delta}$ est une borne inférieure pour la taille des intervalles de $\mathbb{H}(\eta(J))$, et donc que $Z_J(\eta(J)) \leq a^{-1}e^{v\delta}$.

Ainsi, pour tous x, y tels que $x < y$, on a, par définition de L_x et en utilisant (3.10)

$$\begin{aligned}|L_y - L_x| &\leq m^{-\eta(]x, y[)} \sum_{\varsigma \in \mathbb{H}_{]x, y[}(\eta(]x, y[))} \mathbb{W}(\varsigma) \\ &\leq e^{\ln m(\frac{1}{v\delta} \ln(y-x) + 1)} \sum_{\varsigma \in \mathbb{H}_{]x, y[}(\eta(]x, y[))} \mathbb{W}(\varsigma) \\ &\leq m|y-x|^{(C(v)-\varepsilon)/v} \sum_{\varsigma \in \mathbb{H}_{]x, y[}(\eta(]x, y[))} \mathbb{W}(\varsigma)\end{aligned}$$

Les variables $\mathbb{W}(\varsigma)$ dans le dernier terme sont indépendantes et identiquement distribuées et ont des moments de tous ordres (ceci découle par exemple de Biggins et Bingham [16]). On peut donc conclure que, pour chaque $\gamma > 1$, il existe un $k > 0$ tel que

$$\mathbb{E}(|L_y - L_x|^\gamma) \leq k|y-x|^{\gamma(C(v)-\varepsilon)/v}$$

ce qui prouve la première partie du lemme.

La seconde partie est élémentaire. La fonction $x \mapsto L_x$ est croissante et ne peut croître que sur les points de $]0, 1[$ qui correspondent à la frontière de l'arbre, c'est-à-dire sur $\cap_n \mathbb{G}(n)$.

Plus précisément, pour tout intervalle $]x, y[\subset (\cap_n \mathbb{G}(n))^c$ il est évident que $L_x = L_y$ par définition. En constatant que $L_{0+} = 0$ et $L_{1-} = \mathbb{W} > 0$ on voit que l'on peut penser à L_x comme à un temps local sur $\cap_n \mathbb{G}(n)$. \square

Nous concluons maintenant avec la preuve du théorème 19 proprement dite. Pour tout recouvrement de $\cap_n G(n)$ du type $\cup_{i=1}^N]l_i, r_i[$ (où les $]l_i, r_i[$ sont des intervalles ouverts disjoints) on a presque-sûrement

$$\sum_{i=1}^N |\tilde{L}_{r_i} - \tilde{L}_{l_i}| = \mathbb{W}.$$

Ainsi, pour tout recouvrement de ce type tel que $\max_i (r_i - l_i)$ est assez petit on a

$$\mathbb{W} \leq k \sum_{i=1}^N (r_i - l_i)^{(C(v) - \varepsilon)/v}$$

et donc, presque-sûrement,

$$\dim_{\mathcal{H}}(\mathcal{G}_v) \geq \dim_{\mathcal{H}}(\cap_n(G(n))) \geq (C(v) - \varepsilon)/v.$$

Il suffit alors simplement de laisser $\varepsilon \rightarrow 0$ pour conclure.

3.5 Un raffinement

Récemment, Nathalie Krell [37] a obtenu un raffinement intéressant du théorème 19 en considérant non plus l'ensemble \mathcal{G}_v des points dont la vitesse de fragmentation est v , mais plus précisément

$$\mathcal{G}_{v;a,b} = \left\{ x \in]0, 1[: a \leq \liminf_{t \rightarrow \infty} e^{vt} |I_x(t)| \leq \limsup_{t \rightarrow \infty} e^{vt} |I_x(t)| \leq b \right\}$$

pour $v \in]v_{\min}, v_{\max}[$ et $0 < a < b$.

Nous ne ferons ici qu'esquisser l'approche de [37] qui repose à nouveau de façon essentielle sur l'étude fine du fragment marqué $\chi(t)$. La définition de l'ensemble des points $\mathcal{G}_{v;a,b}$ nous conduit en effet à nous intéresser au processus

$$e^{vt} \chi(t) \mathbf{1}_{\{t < T_{[a,b]}\}},$$

où

$$T_{[a,b]} = \inf\{t \geq 0 : e^{vt} \chi(t) \notin [a, b]\}.$$

Il est commode de supposer pour l'instant que $a < 1 < b$ (cette condition pourra être levée par la suite) et de passer au logarithme, c'est-à-dire d'introduire le processus

$$Y_t := \ln(e^{vt} \chi(t)) = vt - \sigma(t), \quad t \geq 0,$$

où σ est un subordonateur d'exposant de Laplace $\Phi(q) = \kappa(q + 1)$, cf. théorème 4. Ainsi Y est un processus de Lévy sans sauts positifs, et $T_{[a,b]}$ correspond au premier temps de sortie de Y hors de l'intervalle $[\ln a, \ln b]$. Le problème de la détermination de la loi du temps et

du lieu de sortie d'un intervalle fini pour de tels processus a été amplement étudié dans la littérature, voir par exemple le survey de Pistorius [45] et les travaux qui y sont cités.

Le processus de Lévy sans sauts positifs Y a pour exposant de Laplace

$$\Psi(q) = \ln \mathbb{E}(e^{qY_1}) = vq - \Phi(q), \quad q \geq 0.$$

La fonction d'échelle de Y est l'unique fonction croissante continue $W : [0, \infty[\rightarrow [0, \infty[$ dont la transformée de Laplace est donnée par

$$\int_0^\infty e^{-\lambda x} W(x) dx = \frac{1}{\Psi(\lambda)}, \quad \text{pour } \lambda > 0 \text{ suffisamment grand.}$$

Elle a été introduite par Takács qui, avec nos notations, a établi que la probabilité que le processus Y sorte pour la première fois de l'intervalle $[\ln a, \ln b]$ par la borne supérieure vaut $W(-\ln a)/W(\ln b/a)$. Pour résoudre des questions plus précises sur le problème de sortie, on est conduit à introduire pour tout $x \geq 0$, la fonction entière en la variable q

$$W^{(q)}(x) = \sum_{k=1}^{\infty} q^{k-1} W^{*k}(x),$$

où pour tout entier $k \geq 1$, on a noté $W^{*k} = W * \dots * W$ la k -ième puissance de convolution de W . Il est facile de vérifier que pour tout $q \in \mathbb{R}$ fixé, la transformée de Laplace de la fonction $W^{(q)}(\cdot)$ vaut

$$\int_0^\infty e^{-\lambda x} W^{(q)}(x) dx = \frac{1}{\Psi(\lambda) + q}, \quad \text{pour } \lambda > 0 \text{ suffisamment grand.}$$

On introduit alors la valeur critique

$$\rho(v; a, b) := \inf\{q > 0 : W^{(-q)}(\ln b/a) = 0\}.$$

Le résultat principal de [37] peut être énoncé de la façon suivante.

Théorème 21. *Si $\rho(v; a, b) < v$, alors*

$$\dim_{\mathcal{H}}(\mathcal{G}_{v;a,b}) = 1 - \rho(v; a, b)/v \quad p.s.$$

Si $\rho(v; a, b) > v$, alors $\mathcal{G}_{v;a,b} = \emptyset$ p.s.

La preuve repose sur le fait que le processus

$$\mathbf{1}_{\{t < T_{[a,b]}\}} e^{t\rho(v;a,b)} W^{(-\rho(v;a,b))}(Y_t), \quad t \geq 0$$

est une martingale dans la filtration naturelle engendrée par le fragment marqué. Lorsqu'on projette cette martingale dans la filtration naturelle du processus de fragmentation, on obtient l'analogie d'une martingale additive, et l'étude de l'uniforme intégrabilité de cette dernière permet d'obtenir des informations précises sur le comportement asymptotique de la fragmentation. Nous renvoyons bien sûr à [37] pour la preuve complète.

3.6 Commentaires

Remarque 1 : Lorsque $\underline{p} > 0$ on a vu que $\forall v \geq v_{\text{typ}}$ on a $C(v)/v > \underline{p}$. La question naturelle qui se pose alors est « existe-t-il des points dont la fragmentation se produit à une vitesse sur-exponentielle ? » et plus précisément peut-on définir un ensemble de tels points dont la dimension de Hausdorff soit non-triviale ?

Considérons l'ensemble

$$\mathcal{H} = \{x \in]0, 1[: \limsup_{t \rightarrow \infty} -\frac{1}{t} \ln |I_x(t)| = +\infty\}.$$

On peut alors montrer, dans le cas où $\kappa'(\underline{p}+) = \infty$ et en utilisant les mêmes techniques que nous avons employées, que

$$\dim_{\mathcal{H}}(\mathcal{H}) = \underline{p}.$$

Remarque 2 : Bien que tel que nous l'avons défini on a $\underline{p} \geq 0$, dans certains cas où la fragmentation est assez lente on peut étendre κ analytiquement au delà de 0 vers la gauche (l'exemple simple que nous avons évoqué est l'un de ces cas). On peut alors montrer que le théorème s'étend au cas de vitesses v plus grandes que $\kappa'(\underline{p}+)$, et plus précisément que le théorème reste vrai pour $v \in]v_{\min}, \kappa'(p^*)[$ où κ est étendue et

$$p^* = \inf\{p : p - \kappa(p)/\kappa'(p) > 0\}.$$

Quand cette valeur est finie, $\kappa'(p^*)$ est la vitesse de fragmentation maximum.

Remarque 3 : Les relations (3.2) et (3.3) dans le théorème 19 sont en fait vraies presque-sûrement simultanément pour tous les v . En effet, si l'on appelle Ω_0 l'ensemble de probabilité 1 sur lequel (3.1), (3.2) et (3.3) sont vrais pour chaque v rationnel et si l'on note

$$A := \{\exists v \in]v_{\min}, v_{\max}[\text{ t.q. (3.2) ou (3.3) est fausse } \},$$

en remarquant que $\forall v \leq w$ on a $\overline{\mathcal{G}}_v \subset \overline{\mathcal{G}}_w$ et $\underline{\mathcal{G}}_w \subset \underline{\mathcal{G}}_v$, il devient évident que $A \subset \Omega_0^c$ le complémentaire de Ω_0 , et donc que $\mathbb{P}(A) = 0$. Les mêmes arguments montrent que presque-sûrement, pour $v \in]v_{\min}, v_{\text{typ}}[$ on a

$$\dim_{\mathcal{H}}(\mathcal{G}_v) \leq C(v)/v,$$

et de même que pour $v \in]v_{\text{typ}}, v_{\max}[$,

$$\dim_{\mathcal{H}}(\mathcal{G}_v) \geq C(v)/v.$$

La question de savoir s'il existe un ensemble de vitesses exceptionnelles de v pour lesquelles (3.1) n'est pas vraie reste ouverte.

Remarque 4 : Définissons

$$\begin{aligned} \overline{\mathcal{H}}_v &:= \{x \in]0, 1[: \liminf_{t \rightarrow \infty} -t^{-1} \ln(|I_x(t)|) \leq v\}, \\ \underline{\mathcal{H}}_v &:= \{x \in]0, 1[: \limsup_{t \rightarrow \infty} -t^{-1} \ln(|I_x(t)|) \geq v\}. \end{aligned}$$

Clairement $\overline{\mathcal{G}}_v \subset \overline{\mathcal{H}}_v$ et $\underline{\mathcal{G}}_v \subset \underline{\mathcal{H}}_v$, et ainsi

$$\dim_{\mathcal{H}}(\overline{\mathcal{H}}_v) \geq \dim_{\mathcal{H}}(\overline{\mathcal{G}}_v)$$

et

$$\dim_{\mathcal{H}}(\underline{\mathcal{H}}_v) \geq \dim_{\mathcal{H}}(\underline{\mathcal{G}}_v).$$

En outre, il est aisé de constater, en examinant les preuves, que les mêmes bornes supérieures sont valables pour $\overline{\mathcal{H}}_v$ (resp. $\underline{\mathcal{H}}_v$) que pour $\overline{\mathcal{G}}_v$ (resp. $\underline{\mathcal{G}}_v$). Ainsi

$$\dim_{\mathcal{H}}(\overline{\mathcal{H}}_v) = \dim_{\mathcal{H}}(\overline{\mathcal{G}}_v)$$

et

$$\dim_{\mathcal{H}}(\underline{\mathcal{H}}_v) = \dim_{\mathcal{H}}(\underline{\mathcal{G}}_v).$$

Remarque 5 : Le théorème 21 présente l'inconvénient de faire intervenir une quantité $\rho(v; a, b)$ qui est difficile à calculer explicitement en pratique. Nous mentionnons toutefois la minoration

$$\rho(v; a, b) \geq 1/W(\ln b/a).$$

Références

- [1] R. ABRAHAM AND J.-F. DELMAS, *Fragmentation associated to Lévy processes using snake*, Probab. Theor. Rel. Fields, 141 (2008), pp. 113–154.
- [2] D. J. ALDOUS, *The continuum random tree. I*, Ann. Probab., 19 (1991), pp. 1–28.
- [3] —, *The continuum random tree. II. An overview*, in Stochastic analysis (Durham, 1990), vol. 167 of London Math. Soc. Lecture Note Ser., Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1991, pp. 23–70.
- [4] —, *The continuum random tree. III*, Ann. Probab., 21 (1993), pp. 248–289.
- [5] K. B. ATHREYA AND P. E. NEY, *Branching processes*, Springer-Verlag, New York, 1972. Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Band 196.
- [6] A.-L. BASDEVANT, *Fragmentation of ordered partitions and intervals*, Electron. J. Probab., 11 (2006), pp. 394–417 (electronic).
- [7] J. BERESTYCKI, *Ranked fragmentations*, ESAIM Probab. Statist., 6 (2002), pp. 157–175 (electronic). Accessible par :
<http://www.edpsciences.org/ps/OnlinePSbis.html>.
- [8] —, *Multifractal spectra of fragmentation processes*, J. Statist. Phys., 113 (2003), pp. 411–430.
- [9] J. BERTOIN, *Subordinators : examples and applications*, in Lectures on probability theory and statistics (Saint-Flour, 1997), vol. 1717 of Lecture Notes in Math., Springer, Berlin, 1999, pp. 1–91.
- [10] —, *Self-similar fragmentations*, Ann. Inst. Henri Poincaré Probab. Stat., 38 (2002), pp. 319–340.
- [11] —, *The asymptotic behavior of fragmentation processes*, J. Eur. Math. Soc. (JEMS), 5 (2003), pp. 395–416.
- [12] —, *Random Fragmentation and Coagulation Processes*, vol. 102 of Cambridge Studies in Advanced Mathematics, Cambridge University Press, 2006.
- [13] J. BERTOIN AND A. ROUAULT, *Discretization methods for homogeneous fragmentations*, J. London Math. Soc. (2), 72 (2005), pp. 91–109.
- [14] J. D. BIGGINS, *Martingale convergence in the branching random walk*, J. Appl. Probability, 14 (1977), pp. 25–37.
- [15] —, *Growth rates in the branching random walk*, Z. Wahrsch. Verw. Gebiete, 48 (1979), pp. 17–34.
- [16] J. D. BIGGINS AND N. H. BINGHAM, *Large deviations in the supercritical branching process*, Adv. in Appl. Probab., 25 (1993), pp. 757–772.
- [17] N. H. BINGHAM, C. M. GOLDIE, AND J. L. TEUGELS, *Regular variation*, vol. 27 of Encyclopedia of Mathematics and its Applications, Cambridge University Press, Cambridge, 1989.
- [18] D. BURAGO, Y. BURAGO, AND S. IVANOV, *A course in metric geometry*, vol. 33 of Graduate Studies in Mathematics, American Mathematical Society, Providence, RI, 2001.

- [19] P. CARMONA, F. PETIT, AND M. YOR, *Sur les fonctionnelles exponentielles de certains processus de Lévy*, Stochastics Stochastics Rep., 47 (1994), pp. 71–101.
- [20] B. CHAUVIN, *Product martingales and stopping lines for branching Brownian motion*, Ann. Probab., 19 (1991), pp. 1195–1205.
- [21] J.-F. DELMAS, *Fragmentation at height associated to Lévy processes*, Stochastic Process. Appl., 117 (2007), pp. 297–311.
- [22] A. DEMBO AND O. ZEITOUNI, *Large deviations and applications*, in Handbook of stochastic analysis and applications, vol. 163 of Statist. Textbooks Monogr., Dekker, New York, 2002, pp. 361–416.
- [23] A. DRESS, V. MOULTON, AND W. TERHALLE, *T-theory : an overview*, European J. Combin., 17 (1996), pp. 161–175.
- [24] T. DUQUESNE AND J.-F. LE GALL, *Random trees, Lévy processes and spatial branching processes*, Astérisque, 281 (2002), pp. vi+147.
- [25] ———, *The Hausdorff measure of stable trees*, Alea (2005). Accessible par : http://alea.impa.br/english/index_v1.htm
- [26] ———, *Probabilistic and fractal aspects of Lévy trees*, Probab. Theory Related Fields, 131 (2005), pp. 553–603.
- [27] S. N. EVANS, *Kingman’s coalescent as a random metric space*, in Stochastic models (Ottawa, ON, 1998), vol. 26 of CMS Conf. Proc., Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2000, pp. 105–114.
- [28] S. N. EVANS, J. PITMAN, AND A. WINTER, *Rayleigh processes, real trees, and root growth with re-grafting*, Probab. Theory Relat. Fields, (2005), pp. 81–126.
- [29] S. N. EVANS AND A. WINTER, *Subtree prune and re-graft : a reversible real tree valued Markov process*, Ann. Probab., 34 (2006), pp. 918–961.
- [30] K. FALCONER, *The Geometry of Fractals Sets*, Cambridge University Press, 1986
- [31] M. GROMOV, *Metric structures for Riemannian and non-Riemannian spaces*, vol. 152 of Progress in Mathematics, Birkhäuser Boston Inc., Boston, MA, 1999.
Based on the 1981 French original [MR0682063 (85e :53051)], With appendices by M. Katz, P. Pansu and S. Semmes, Translated from the French by Sean Michael Bates.
- [32] B. HAAS, *Loss of mass in deterministic and random fragmentations*, Stochastic Process. Appl., 106 (2003), pp. 245–277.
- [33] ———, *Regularity of formation of dust in self-similar fragmentations*, Ann. Inst. H. Poincaré Probab. Statist., 40 (2004), pp. 411–438.
- [34] B. HAAS AND G. MIERMONT, *The genealogy of self-similar fragmentations with negative index as a continuum random tree*, Electron. J. Probab., 9 (2004), pp. 57–97 (electronic).
- [35] P. JAGERS, *General branching processes as Markov fields*, Stochastic Process. Appl., 32 (1989), pp. 183–212.
- [36] J.-P. KAHANE AND J. PEYRIÈRE, *Sur certaines martingales de Benoit Mandelbrot*, Advances in Math., 22 (1976), pp. 131–145.

- [37] N. KRELL, *On the decay of fragments in homogeneous fragmentations*, Stochastic Process. Appl., 118 (2008), pp. 897–916.
- [38] J. LAMPERTI, *Semi-stable Markov processes. I*, Z. Wahrscheinlichkeitstheorie und Verw. Gebiete, 22 (1972), pp. 205–225.
- [39] J.-F. LE GALL, *The uniform random tree in a Brownian excursion*, Probab. Theory Relat. Fields, 96 (1993), pp. 369–383.
- [40] Q. LIU, *On generalized multiplicative cascades*, Stochastic Process. Appl., 86 (2000), pp. 263–286.
- [41] B. MANDELBROT, *Multiplications aléatoires itérées et distributions invariantes par moyenne pondérée aléatoire*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A, 278 (1974), pp. 289–292.
- [42] R. D. MAULDIN AND S. C. WILLIAMS, *Random recursive constructions : asymptotic geometric and topological properties*, Trans. Amer. Math. Soc., 295 (1986), pp. 325–346.
- [43] G. MIERMONT, *Self-similar fragmentations derived from the stable tree. I. Splitting at heights*, Probab. Theory Related Fields, 127 (2003), pp. 423–454.
- [44] —, *Self-similar fragmentations derived from the stable tree. II. Splitting at nodes*, Probab. Theory Related Fields, 131 (2005), pp. 341–375.
- [45] M. R. PISTORIUS, *A potential theoretical review of some exit problems of spectrally negative Lévy processes*, Séminaire de Probabilités XXXVIII (2005), pp. 30–41.
- [46] D. REVUZ AND M. YOR, *Continuous martingales and Brownian motion*, vol. 293 of Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences], Springer-Verlag, Berlin, third ed., 1999.
- [47] K. UCHIYAMA, *Spatial growth of a branching process of particles living in \mathbf{R}^d* , Ann. Probab., 10 (1982), pp. 896–918.