Université Paris 13, année universitaire 2018 – 19
Licence de mathématiques $2^{\text{ème}}$ année
Probabilités

Feuille d'exercices de Probabilités n°1

Dénombrement

Exercice 1 Montrer que pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$:

1. $$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$$

2. $$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Ces formules sont à savoir par cœur.

Exercice 2

1. Une compagnie d'aviation dessert n villes. Tous les trajets entre les villes sont possibles. Combien de billets différents doit-elle éditer ?
2. Dans une soirée, n personnes se serrent la main. Combien de poignées de main sont échangées ?

Exercice 3 Une course oppose 20 concurrents, dont un s'appelle Émile.

1. Combien y-a-t-il de podiums possibles ?
2. Combien y-a-t-il de podiums possibles où Émile est premier ?
3. Combien y-a-t-il de podiums possibles dont Émile fait partie ?
4. On souhaite récompenser les 3 premiers en leur offrant un prix identique à chacun. Combien y-a-t-il de distributions de récompenses possibles ?

Exercice 4

1. Soit $\Omega = \{1, 2, 3, 4\}$. Décrire toutes les parties de Ω et vérifier que $\mathrm{Card}(\mathcal{P}(\Omega)) = 2^4$.

2. Soit $k \leq n$ deux entiers positifs, avec $n \geq 1$. Rappeler ce que représente le coefficient binomial $\binom{n}{k}$ (ou C_n^k) et rappeler son expression. A l'aide de la formule du binôme de Newton montrer que si $\mathrm{Card}(\Omega) = n$ alors $\mathrm{Card}(\mathcal{P}(\Omega)) = 2^n$.

Exercice 5 (Triangle de Pascal) Montrer que pour tous les entiers $n, p \in \mathbb{N}$, $p \leq n$:

$$\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}, \quad p\binom{n}{p} = n\binom{n-1}{p-1} \quad \text{et} \quad \binom{n}{p} + \binom{n}{p+1} = \binom{n+1}{p+1}$$

(pour la deuxième égalité, on suppose de plus que $p \geq 1$ et pour la troisième que $p \leq n-1$). En déduire la valeur de

$$\sum_{p=0}^{n} p\binom{n}{p}.$$

Espaces probabilisés

Exercice 6 Trois boules sont tirées d'une urne contenant des boules blanches et des boules rouges. Soient les événements :

A : “la première boule est blanche”
B : “la deuxième boule est blanche”
C : “la troisième boule est blanche”

Exprimer les événements suivants en fonction de A, B et C :

D : “toutes les boules sont blanches”
E : “les deux premières boules sont blanches”
F : “au moins une boule est blanche”
G : “seulement la troisième boule est blanche”
H : “exactement une boule est blanche”
I : “au moins deux boules sont blanches”
J : “aucune boule n'est blanche”.

Exercice 7 Soit Ω un ensemble et A, B, C trois parties de Ω. Exprimer chacun des événements suivants à l'aide des opérations d'union, d'intersection ou passage au complémentaire :

“A et B se réalisent, mais pas C” ;
“au moins un des trois événements A , B, C se réalise” ;
“au plus un des trois événements A , B, C se réalise” ;
“aucun des trois événements A , B, C ne se réalise” ;
“les trois événements A , B, C se réalisent”.

Exercice 8 Donner l'ensemble des états possibles Ω pour les expériences aléatoires suivantes. Préciser à chaque fois le cardinal de Ω.

1. Lancer d'une pièce de monnaie.
2. N lancers successifs d'une pièce de monnaie ($N \in \mathbb{N}^*$).
3. Deux lancers successifs d'un dé, et on s'intéresse à la somme des résultats obtenus.
4. Lancer d'un dé une infinité de fois.
5. Promenade d'un ivrogne sur $\mathbb{N}$: il part de 0, et à chaque étape il fait soit un pas en avant, soit un pas en arrière, et ce pendant 5 étapes.

Exercice 9 On suppose que $\mathbb{P}$ et $\mathbb{Q}$ sont deux probabilités sur un ensemble Ω, telles que

$$\mathbb{P}(A) \leq \mathbb{Q}(A), \quad \forall A \in \mathcal{P}(\Omega).$$

Montrer que $\mathbb{P} = \mathbb{Q}$ (égalité de deux fonctions d'ensembles).

Exercice 10 Soit $(\Omega, \mathbb{P})$ un espace probabilisé, et A et B deux événements.

1. Calculer $\mathbb{P}(A^c)$, $\mathbb{P}(A \cap B^c)$, $\mathbb{P}(A \cup B)$, $\mathbb{P}(A \cup B^c)$ en fonction de $\mathbb{P}(A)$, $\mathbb{P}(B)$ et $\mathbb{P}(A \cap B)$.
2. Dans cette question on suppose que $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$, autrement dit que A et B sont indépendants. Montrer qu'alors A et B^c puis A^c et B^c le sont aussi.
3. Soit C un autre événement. Montrer que

$$\mathbb{P}(A \cap B \cap C) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(C) - \mathbb{P}(A \cup B) - \mathbb{P}(B \cup C) - \mathbb{P}(C \cup A) + \mathbb{P}(A \cup B \cup C).$$

Exercice 11 Soit $(\Omega, \mathbb{P})$ un espace probabilisé, et $A_1, \ldots, A_n$ des événements tels que $\mathbb{P}(A_i) = 1$, $\forall i \in \{1, \ldots, n\}$. Calculer $\mathbb{P}(\cap_{i=1}^n A_i)$.

Conditionnement, Indépendance

Exercice 12 La coupe du monde de football de 2022 aura lieu au Qatar. On suppose que la France y participera. Dans une telle compétition, l'équipe de France gagne son premier match avec probabilité 1/4. De plus, si le premier match est gagné, elle gagne le second match avec probabilité 1/2. Par contre, si elle a perdu son premier match, elle gagne le second avec probabilité 1/10. Pour simplifier, on supposera pour chaque rencontre qu'il ne peut pas y avoir de match nul.

1. Quelle est la probabilité pour la France de gagner son second match ?

2. Quelle est la probabilité que la France ait gagné le premier match sachant qu'elle a remporté le second ?
3. Quelle est la probabilité pour la France de gagner les deux matchs ?

Exercice 13 On considère n urnes numérotées de 1 à n. Pour tout k, $1 \leq k \leq n$, l'urne n°k contient k boules blanches et $n-k$ boules noires. On choisit au hasard une urne, puis on tire deux boules de cette urne avec remise.

1. Calculer la probabilité d'obtenir deux boules blanches.
2. Sachant que les deux boules tirées sont blanches, calculer la probabilité que le tirage ait été fait dans l'urne n°k.

Exercice 14 Un couple a 3 enfants, chacun ayant la même probabilité d'être une fille ou un garçon, indépendamment des autres enfants. Considérons les événements

A : "tous les enfants sont du même sexe"

B : "il y a au moins un garçon"

C : "il y a au moins un enfant de chaque sexe".

Les événements A et B sont-ils indépendants ? Et B et C ? Et A et C ?

Exercice 15 On lance deux dés à 6 faces. Vérifier que l'événement "la somme fait 7" est indépendant de l'évément "le deuxième dé égale i", pour tout $i \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Est-ce-que cela marche encore si on remplace 7 par 6 ?

Exercice 16 (Problème des anniversaires) N étudiants nés en 1998 assistent à un même cours de Probabilités. On suppose que leurs dates de naissances sont indépendantes. Modéliser l'expérience aléatoire correspondante et montrer que la probabilité que deux étudiants au moins aient leur anniversaire un même jour est égale à

$$1 - \frac{365!}{(365-N)!365^N} \quad \text{si } N \leq 365.$$

Déterminer numériquement à partir de quelle valeur de N cette probabilité devient supérieure à $1/2$.

Exercice 17 On lance un nombre aléatoire $N \in \mathbb{N}$ de dés équilibrés. On note A_i l'événement $\{N = i\}$ et on suppose que $\mathbb{P}(A_i) = 2^{-i}$, $\forall i \geq 1$. On note S la somme des résultats obtenus.

1. Montrer que $(A_i, i \geq 1)$ forme une partition de Ω (qu'on ne vous demande pas de donner explicitement) et qu'on a bien $\sum_{i \geq 1} \mathbb{P}(A_i) = 1$.

2. Calculer la probabilité que $S = 4$.
3. Calculer la probabilité que $N = 2$ sachant que $S = 4$.
4. Calculer la probabilité que $S = 4$ sachant que N est pair.
5. Calculer la probabilité que $N = 2$ sachant que $S = 4$ et le premier dé donne 1.

Exercice 18 On jette un dé équilibré une infinité de fois. On considère les événements :

A_k : "obtention de la face 6 au $k$ième jet"
B_k : "obtention de la face 6 pour la première fois au $k$ième jet"
C_k : "aucun 6 n'est obtenu au cours des k premiers jets"
C_∞ : "aucun 6 n'est obtenu au cours de l'ensemble des jets"

où $k = 1, 2, 3, \ldots$.

1. Donner un espace probabilisé modélisant cette expérience.
2. A quoi correspond l'événement $\cap_{k\geq 1} A_k$? Quelle est sa probabilité ?
3. Exprimer B_n en fonction des $A_k, k \leq n$.
4. Calculer $\mathbb{P}(B_n)$, puis $\mathbb{P}(\cup_{n\geq 1} B_n)$.
5. Calculer $\mathbb{P}(C_k)$ et en déduire $\mathbb{P}(C_\infty)$. Comparer à la question précédente.

Exercice 19 Soit $a > 1$ un réel. On définit le réel $\zeta(a)$ par

$$\zeta(a) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^a} := \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^a}$$

(on admet que cette limite est finie). On peut alors définir une probabilité $\mathbb{P}_a$ sur $\mathbb{N}^*$ en posant

$$\mathbb{P}_a(\{k\}) := \frac{1}{\zeta(a)k^a}, \quad \forall k \in \mathbb{N}^*.$$

Pour tout entier $m \in \mathbb{N}^*$ on note $m\mathbb{N}^*$ l'ensemble $\{mk, k \in \mathbb{N}^*\}$ de ses multiples non nuls.

1. Calculer $\mathbb{P}_a(2\mathbb{N}^*)$. Généraliser.
2. Donner une condition nécessaire et suffisante sur les entiers n et m pour que les événements $n\mathbb{N}^*$ et $m\mathbb{N}^*$ soient indépendants.

Exercice 20 Soit $(\Omega, \mathbb{P})$ un espace probabilisé.

1. Montrer qu'un événement A est indépendant de lui-même si et seulement si $\mathbb{P}(A) = 0$ ou $\mathbb{P}(A) = 1$.
2. Si $\mathbb{P}(A) = 0$, montrer que A est indépendant de tous les événements B. Ce résultat reste-t-il vrai si on remplace l'hypothèse $\mathbb{P}(A) = 0$ par $\mathbb{P}(A) = 1$?

Problèmes

Exercice 21 Soit $(\Omega, \mathbb{P})$ un espace probabilisé. Soit $A_1, A_2, ..., A_n, ...$ une suite d'événements indépendants.

1. Exprimer en fonction des $p_k = \mathbb{P}(A_k)$ la probabilité q_n qu'aucun des n premiers événements $A_1, A_2, ..., A_n$ ne se réalise.
2. Montrer que $1-x \leq \exp(-x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. En déduire que $q_n \leq \exp\left(-\sum_{k=1}^{n} p_k\right)$.
3. On suppose que la série de terme général p_n diverge. Quelle est alors la limite de q_n lorsque $n \to \infty$? En déduire la valeur de $\mathbb{P}(B)$, où $B = \cap_{k=1}^{\infty} A_k^c$.
4. Un singe tape une infinité de fois au hasard sur un ordinateur comprenant 37 touches, les 26 lettres de l'alphabet, la touche "espace" et les 10 chiffres, 0 à 9. On suppose que les frappes du singe sont indépendantes les unes des autres et qu'à chaque frappe, chaque caractère a une probabilité égale à $1/37$ d'être choisi. On s'intéresse aux apparitions du mot *paris 13* dans le texte obtenu par le singe. Pour cela, on note A_1 l'événement "le premier caractère est un p, le 2ème un a, le 3ème un r, le 4ème un i, le 5ème un s, le 6ème un "espace", le 7ème un 1, le 8ème un 3, et plus généralement, $\forall n \geq 0$,

   A_{n+1} l'événement : "le $(8n+1)$ième caractère est un p, le $(8n+2)$ième un a, le $(8n+3)$ième un r, le $(8n+4)$ième un i, le $(8n+5)$ième un s, le $(8n+6)$ième un "espace", le $(8n+7)$ième un 1, le $(8n+8)$ième un 3".

   Montrer que les A_n sont indépendants. En déduire que l'événement "le mot *paris 13* apparaît dans le texte du singe au moins une fois" est presque sûr. (Plus généralement, on peut montrer qu'il apparaît une infinité de fois presque sûrement.)

Exercice 22 (Ruine du joueur) Un collectionneur de voitures veut gagner de l'argent pour acheter une nouvelle Jaguar à un prix $N \in \mathbb{N}$. Il possède initialement une somme n, $0 \leq n \leq N$, et veut gagner le reste en jouant à un jeu de hasard avec son banquier. Pour cela, il jette de façon répétée une pièce de monnaie (biaisée) : Pile apparaît avec un probabilité p, Face avec probabilité $q = 1-p$. A chaque Pile, il gagne la somme 1, à chaque Face, il perd 1. Le jeu s'arrête lorsque il a en main la somme N ou lorsqu'il est ruiné. On note r_n la probabilité qu'il soit ruiné à la fin du jeu.

1. (a) Calculer r_0 et r_N.

   (b) Pour $1 \leq n \leq N$, montrer que $r_n = pr_{n+1} + qr_{n-1}$.
2. On suppose $p \neq 1/2$.

   (a) Montrer que pour $1 \leq n \leq N$,

$$r_n = \frac{(q/p)^n - (q/p)^N}{1 - (q/p)^N}.$$

(b) On suppose $p < 1/2$. Montrer que $\lim_{N\to\infty} r_n = 1$ (n étant fixé). Interpréter ce résultat.

(c) On suppose $p > 1/2$. Montrer que lorsque $N \to \infty$ (n étant fixé), le jouer ne sera pas forcément ruiné.

3. On suppose que $p = 1/2$. Montrer que pour $1 \leq n \leq N$, $r_n = 1 - n/N$.

Exercice 23 Soit $(\Omega, \mathbb{P})$ un espace probabilisé. On dit qu'un événement B (tel que $\mathbb{P}(B) > 0$) *repousse* un événement A si $\mathbb{P}(A|B) < \mathbb{P}(A)$ tandis que B *attire* A si $\mathbb{P}(A|B) > \mathbb{P}(A)$.

1. Montrer que si B attire A alors A attire B et B^c repousse A.
2. Si A attire B et B attire C, a-t-on nécessairement A attire C ?