Université Paris 13, année universitaire 2018 – 19
Licence de mathématiques $2^{\text{ème}}$ année
Probabilités

Feuille d'exercices de Probabilités n°2 : Variables aléatoires discrètes

Lois, moments

Exercice 1 On lance deux dés équilibrés à 6 faces. Donner la loi de la somme des deux résultats obtenus.

Exercice 2

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour tous réels $x, y \geq 0$, on pose
$$F(x,y) := \sum_{k=0}^{[n/2]} \binom{n}{2k} x^{2k}(1-y)^{n-2k} \quad \text{et} \quad G(x,y) := \sum_{k=0}^{[(n-1)/2]} \binom{n}{2k+1} x^{2k+1}(1-y)^{n-2k-1}$$
(où $[r]$ désigne la partie entière du réel r). Calculer $F(x,y)+G(x,y)$ et $F(x,y)-G(x,y)$ et en déduire une expression simplifiée de $F(x,y)$.
2. Soit X une variable aléatoire de loi binomiale $\mathrm{Bin}(n,p)$. Calculer la probabilité de l'événement "X est paire".

Exercice 3 On lance deux dés équilibrés à 6 faces. On note X le plus grand des résultats obtenus, et Y le plus petit.

1. Déterminer les lois de X et Y.
2. Calculer $\mathbb{E}[X]$ et $\mathbb{E}[Y]$.
3. Calculer $\mathrm{Var}(X)$ et $\mathrm{Var}(Y)$.

Exercice 4 Un questionnaire comporte 10 questions auxquelles on peut répondre par "Vrai" ou "Faux". Un étudiant répond au hasard à chacune des 10 questions (à chaque question il répond "Vrai" avec probabilité 1/2 et "Faux" avec probabilité 1/2, de façon indépendante). On note X le nombre total de réponses correctes du candidat.

1. Quelle est la loi de X ?
2. Calculer les probabilités des événements suivants :

   A="l'étudiant répond correctement à toutes les questions"

B="l'étudiant répond correctement à exactement une question"

C="l'étudiant répond correctement à au moins une question".

3. Chaque réponse correcte vaut 1 point et chaque mauvaise réponse $-1/2$ point. On note Y la note obtenue à cet exercice par l'étudiant. Exprimer Y en fonction de X et en déduire l'espérance et la variance de Y.

Exercice 5 (Absence de mémoire)

1. Soit $G(p)$ une v.a. de loi géométrique de paramètre $p \in]0,1[$. Calculer
$$\mathbb{P}(G(p) > n), \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$
2. En déduire que
$$\mathbb{P}(G(p) > k+n \mid G(p) > n) = \mathbb{P}(G(p) > k), \quad \forall k, n \in \mathbb{N}.$$
Interpréter ce résultat.
3. Réciproquement, montrer que si X est une v.a. à valeurs dans $\mathbb{N}$ telle que $\mathbb{P}(X > n) > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et
$$\mathbb{P}(X > k+n \mid X > n) = \mathbb{P}(X > k), \quad \forall k, n \in \mathbb{N}$$
alors X suit une loi géométrique de paramètre $p \in]0,1[$. Pour cela vous pourrez commencer par considérer la fonction $H(n) = \mathbb{P}(X > n)$ et établir une relation entre $H(n+k), H(n)$ et $H(k)$.

Exercice 6 Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$.

1. On suppose que l'espérance de X est finie. Montrer que
$$\mathbb{P}(X > 0) \leq \mathbb{E}[X].$$
Donner un contre-exemple lorsque X n'est pas à valeurs entières.
2. On suppose que X a un moment d'ordre 2. Montrer que
$$\mathbb{P}(X \geq 2) \leq \frac{1}{2}\mathbb{E}[X(X-1)].$$

Exercice 7 On joue à pile ou face avec une pièce non équilibrée. A chaque lancer la probabilité d'obtenir "pile" est 2/3, et "face" 1/3. Les lancers sont supposés indépendants. On note X la variable aléatoire réelle égale au nombre de lancers nécessaires pour l'obtention, pour la première fois, de deux piles consécutifs.
Soit n un entier naturel non nul. On note p_n la probabilité de l'événement $\{X = n\}$.

1. Expliciter les événements $\{X = 2\}, \{X = 3\}, \{X = 4\}, \{X = 5\}$. Déterminer la valeur de p_1, p_2, p_3, p_4 et p_5.
2. A l'aide de la formule des probabilités totales, en distinguant deux cas selon le résultat du premier lancer, montrer que
$$\forall n \geq 3, p_n = \frac{2}{9}p_{n-2} + \frac{1}{3}p_{n-1}.$$
3. En déduire l'expression de p_n en fonction de n pour $n \geq 1$.
4. Calculer $\mathbb{E}[X]$.

Exercice 8 Soit a un nombre réel et X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$ telle que : pour tout $k \in \mathbb{N}$,
$$\mathbb{P}(X = k) = \frac{a}{2^k k!}.$$

1. Déterminer a. Quel est le nom de cette variable aléatoire ?
2. Quel est la valeur de X la plus probable ?
3. La variable aléatoire X admet-elle une espérance ? Si oui, la calculer. (On demande de refaire les raisonnements et calculs vus en cours.)
4. La variable aléatoire X admet-elle une variance ? Si oui, la calculer. (On demande de refaire les raisonnements et calculs vus en cours.)

Exercice 9 Soit $\lambda > 0$.

1. Exprimer $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^{2k}}{(2k)!}$ en fonction de e^{λ}. De même pour $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^{2k+1}}{(2k+1)!}$.
2. Soit X une variable de loi de Poisson de paramètre λ. On construit à partir de X une autre variable aléatoire Y en posant :
   - $Y = 0$ si X prend une valeur nulle ou impaire
   - $Y = X/2$ si X prend une valeur paire.

   Déterminer la loi de Y.

Exercice 10 Le nombre de connexions au site internet de Paris 13 durant une période T (en heures) suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda(T)$. On sait que $\lambda(1) = 12,2$.

1. Calculer la probabilité qu'il n'y ait aucune connexion en une heure.
2. Calculer la probabilité qu'il y ait au moins deux connexions en une heure.
3. On note X_1 le nombre de connexions un jour donné entre 14h et 15h et X_2 le nombre de connexions le même jour entre 15h et 16h.
   (a) Calculer $\mathbb{E}[X_1 + X_2]$.
   (b) En déduire $\lambda(2)$.

(c) Les événements $\{X_1 = 0\}$ et $\{X_2 = 0\}$ sont-ils indépendants ?

Exercice 11 Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}^*$.

1) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,
$$\sum_{k=1}^{n} k\mathbb{P}(X = k) = \left(\sum_{i=0}^{n-1} \mathbb{P}(X > k)\right) - n\mathbb{P}(X > n).$$

2) On suppose que $\lim_{n\to\infty} n\mathbb{P}(X > n) = 0$ et que $\sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}(X > k) < +\infty$. Montrer que X admet une espérance et que
$$\mathbb{E}[X] = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}(X > k).$$

3) Réciproquement, on suppose que X admet une espérance. Montrer que
$$\lim_{n\to\infty} n\mathbb{P}(X > n) = 0$$
et en déduire
$$\mathbb{E}[X] = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}(X > k).$$

Vecteurs aléatoires

Exercice 12 Soient X et Y deux variables aléatoires. Rappeler les conditions d'existence du coefficient de corrélation linéaire $\rho(X, Y)$. On pose $U = aX + b$ et $V = cY + d$, où a, b, c, d sont des réels. Calculer $\rho(U, V)$ en fonction de $\rho(X, Y)$.

Exercice 13 n personnes se répartissent au hasard dans les 3 hôtels d'un village, chaque hôtel disposant d'au moins n places. On désigne par X (respectivement Y, Z) le nombre de personnes allant dans l'hôtel A (respectivement B et C).

1. Quelle est la loi de X ? Celle de Y ? Celle de Z ?
2. Exprimer $X + Y$ en fonction de n et Z. En déduire $\mathrm{Var}(X + Y)$.
3. Sans calculer $\mathbb{E}[XY]$, donner la valeur de $\rho(X, Y)$.

Exercice 14 Une urne contient $2n$ boules ($n \geq 2$), dont n sont numérotées de 1 à n, et n ne portent pas de numéro. On tire simultanément n boules dans cette urne. Pour $i = 1, ..., n$ on note X_i la variable qui vaut 1 si la boule i est dans l'échantillon tiré, et 0 sinon.

1. Donner la loi de X_i.
2. Pour $i \neq j$, calculer $\mathbb{P}(X_i = 1, X_j = 1)$. En déduire $\mathrm{Cov}(X_i, X_j)$.
3. Soit S la somme des numéros tirés. Ecrire S en fonction des X_i. En déduire $\mathbb{E}[S]$ et $\mathrm{Var}(S)$.

Exercice 15 On lance une infinité de fois une pièce amenant à chaque lancer "pile" avec la probabilité p $(0 < p < 1)$ et "face" avec la probabilité $q = 1 - p$. On appelle "série" une succession de piles (ou de faces) interrompue par le résultat contraire. La "longueur" de la série est le nombre de piles (ou faces) qui la composent. Par exemple, pour l'événement PPFFFPFFF..., la première série est une série de piles et a pour longueur 2, la deuxième est une série de faces et a pour longueur 3, etc... On note X la v.a. égale à la longueur de la première série si cette longueur est finie, et égale à 0 dans le cas où les lancers successifs donneraient tous "pile" ou tous "face". On définit de même Y, longueur de la deuxième série.

1. Déterminer la loi de X.
2. Déterminer la loi du couple (X, Y). En déduire la loi de Y.

Exercice 16 Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$, dont la loi jointe est définie par :

$$\mathbb{P}(X = i, Y = j) = a^i b^j, \quad a, b > 0.$$

1. Quelles conditions doivent remplir a et b ?
2. Donner les lois marginales de X et Y.
3. Calculer $\mathbb{P}(X = Y)$.
4. X et Y sont-elles indépendantes ?

Exercice 17 Soit (X, Y) un couple discret à valeurs dans $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$, dont la loi jointe est donnée par :

$$\mathbb{P}(X = i, Y = j) = \frac{1}{e} \frac{(i + j)\lambda^{i+j}}{i!j!}, \forall i \in \mathbb{N}, j \in \mathbb{N}.$$

1. Calculer λ.
2. Trouver les lois marginales de X et Y.
3. X et Y sont-elles indépendantes ?
4. Trouver la loi de $X + Y$, puis calculer $\mathbb{E}[2^{X+Y}]$.

Exercice 18 Soit (X, Y) un couple aléatoire à valeurs dans $\{0, 1\} \times \mathbb{N}^*$, dont la loi est définie par :

$$\mathbb{P}(X = 0, Y = k) = \frac{2^k - 1}{4^k}, \quad \mathbb{P}(X = 1, Y = k) = \frac{1}{4^k}, \quad \forall k \in \mathbb{N}^*.$$

1. Déterminer les lois de X et Y, donner leurs espérances et leurs variances.
2. On pose $S = X + Y$ et $T = XY + 1$. Déterminer les lois de S et de T.
3. Trouver la loi du couple (S, T) (distinguer les cas $\mathbb{P}(S = k, T = 1), \mathbb{P}(S = k, T = k)$ pour $k \neq 1$, $\mathbb{P}(S = k, T = j)$ pour $k \neq j \neq 1$).
4. Calculer $\mathbb{P}(S = T)$.

Exercice 19 Soit $p \in]0, 1[$ et $(X_i, i \geq 1)$ une suite de variables aléatoires indépendantes et de même loi donnée par $\mathbb{P}(X_i = 1) = p$ et $\mathbb{P}(X_i = -1) = 1 - p$. On étudie les variables aléatoires S_n définies par

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$$

pour tout $n \geq 1$. On convient de poser $S_0 = 0$. La suite de variables aléatoires $(S_n, n \geq 1)$ est appelée *marche aléatoire*. Les variables aléatoires $X_i, i \geq 1$ sont appelés les *pas* de la marche aléatoire.

1. Quelles sont les valeurs possibles de S_7 ?
2. Soit $i \geq 1$ et $n \geq 1$, déterminer $\mathbb{E}[X_i]$ puis $\mathbb{E}[S_n]$. Quelle est la limite de $\mathbb{E}[S_n]$ lorsque n tend vers l'infini (on distinguera les cas $p < 1/2$, $p > 1/2$ et $p = 1/2$) ?
3. Justifier que $\mathrm{Cov}(X_i, X_j) = 0$ pour tous $i \neq j$. Montrer que la variance de X_i est $4p(1 - p)$. Déterminer la variance de $\mathrm{Var}(S_n)$.
4. Montrer que
$$\mathbb{E}[S_n S_{n+1}] = \mathbb{E}[S_n^2] + \mathbb{E}[S_n]\mathbb{E}[X_{n+1}]$$
et
$$\mathbb{E}[S_n]\mathbb{E}[S_{n+1}] = \mathbb{E}[S_n]^2 + \mathbb{E}[S_n]\mathbb{E}[X_{n+1}].$$
En déduire que $\mathrm{cov}(S_n, S_{n+1}) = \mathrm{Var}(S_n)$. Les variables aléatoires S_n et S_{n+1} sont-elles indépendantes ? (On justifiera soigneusement.)
5. Montrer que
$$\mathrm{Var}\left(\frac{S_n}{n}\right) = \mathbb{E}\left[\left(\frac{S_n}{n} - (2p - 1)\right)^2\right] = \frac{\mathrm{Var}(S_n)}{n^2} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$
6. Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$,
$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{S_n}{n} - (2p - 1)\right| \geq \varepsilon\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Les questions qui suivent sont indépendantes et vont permettre de déterminer la loi de S_{2n}.

7. On pose $Y_i = 1$ si $X_i = 1$ et $Y_i = 0$ si $X_i = -1$. Quelle est la loi de Y_i ? Justifier que $X_i = 2Y_i - 1$ pour tout $i \geq 1$.
8. Soit $n \geq 1$. Quelles sont les valeurs possibles de la variable aléatoire $X_{2n+1} + X_{2n+2}$? Montrer par récurrence que pour tout $n \geq 1$, la variable aléatoire S_{2n} est à valeurs dans $\{2k, k \in \{-n, \ldots, n\}\}$.
9. On note M_n le nombre de *montées* parmi les n pas, c'est-à-dire le nombre de X_i qui prennent la valeur 1. Justifier que $M_n = \sum_{i=1}^n Y_i$. Quelle est la loi de M_n ? (On justifiera soigneusement.)
10. A l'aide de la question 7., montrer que $S_n = 2M_n - n$.
11. On calcule la loi de S_{2n}. Montrer que pour tout $k \in \{-n, \ldots, n\}$

$$\mathbb{P}(S_{2n} = 2k) = \binom{2n}{n+k} p^{n+k}(1-p)^{n-k}.$$

Deux inégalités classiques

Exercice 20 Une variable aléatoire X suit une loi binomiale de paramètres $p \in [0,1], n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$,

$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{X}{n} - p\right| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\varepsilon\sqrt{n}}.$$

Exercice 21 Soit X une variable aléatoire réelle positive telle que $0 < \mathbb{E}[X^2] < \infty$. Montrer que

$$\mathbb{P}(X > 0) \geq \frac{\mathbb{E}[X]^2}{\mathbb{E}[X^2]}.$$

Indication : remarquer que $\mathbb{E}[X] = \mathbb{E}[X\mathbf{1}_{\{X>0\}}]$.

Exercices supplémentaires

Exercice 22 (Loi géométrique - loi binômiale négative). Une urne contient des boules, dont une proportion p $(0 < p < 1)$ de boules blanches, les autres boules étant rouges. On tire les boules une à une avec remise et on note X_n le rang d'apparition de la $n$ième boule blanche.

1. Donner la loi de X_1 et calculer son espérance.

2. a) Déterminer la loi de X_n.

   b) En dérivant $n-1$ fois l'égalité $\sum_{i=0}^{\infty} x^i = 1/(1-x)$ sur $]-1,1[$, vérifier que $\sum_{i=n}^{\infty} \mathbb{P}(X_n = i) = 1$ puis calculer $\mathbb{E}[X_n]$. La loi de X_n est appelée *loi binomiale négative de paramètres n, p.*

3. Pour $n \geq 1$ fixé, on note Y_n le nombre de boules rouges apparues avant la $n$ième boule blanche. Ecrire Y_n en fonction de X_n. En déduire la loi de Y_n, puis son espérance.

Exercice 23 (Loi binomiale - loi hypergéométrique). Dans une urne contenant N boules dont une proportion p de boules vertes $0 < p < 1$), on tire n boules ($n \geq 1$), et on note X le nombre de boules vertes de l'échantillon. Construire l'espace de probabilisé associé à l'expérience et déterminer la loi de X si :

1. Les n boules sont tirées une à une avec remise.
2. Les n boules sont tirées en une seule fois (dans ce cas on dit que X suit une *loi hypergéométrique de paramètres N, n, p*).
3. Les n boules sont tirées une à une sans remise.

Exercice 24 Un puzzle est formé de n morceaux que l'on peut trouver dans des paquets de céréales (les morceaux sont placés de manière uniforme et indépendante, à raison d'un morceau par paquet). Arthur décide d'acheter des paquets jusquà ce qu'il possède toutes les pièces du puzzle. Pour tout $k \geq 2$, on note Y_k le nombre de paquets achetés pour obtenir la $k$ième pièce à partir de l'obtention de la $(k-1)$ième pièce, et X_n le nombre total de paquets achetés.

1. Quelle est la loi de Y_k ? Exprimer X_n en fonction des Y_k. En déduire $\mathbb{E}[X_n]$ sous la forme d'une somme.
2. Montrer que
$$\int_k^{k+1} \frac{\mathrm{d}x}{x} \leq \frac{1}{k} \leq \int_{k-1}^{k} \frac{\mathrm{d}x}{x}, \quad \forall k \geq 2.$$
   En déduire un équivalent de $\mathbb{E}[X_n]$ lorsque $n \to +\infty$.