

ETUDE DES ETATS STATIONNAIRES POUR UNE EQUATION DE SCHRÖDINGER NON LINEAIRE COMPORTANT UN TERME NON AUTONOME*

ALAIN BAMBERGER[†] AND LAURENCE HALPERN[†]

Abstract. This paper deals with the steady problem for a nonlinear one-dimensional Schrödinger equation of the following type:

$$i \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + xu - p|u|^2 u = f(x), \quad x \in \mathbb{R},$$

arising in plasma physics.

We prove the existence of many steady states for large values of the nonlinearity parameter p .

Résumé. Nous étudions le problème stationnaire associé à une équation de Schrödinger non linéaire monodimensionnelle du type suivant:

$$i \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + xu - p|u|^2 u = f(x), \quad x \in \mathbb{R},$$

intervenant en physique des plasmas.

Nous montrons l'existence d'un grand nombre d'états stationnaires lorsque le paramètre p de non linéarité est grand.

Key words. nonlinear Schrödinger equation

AMS(MOS) subject classification. Primary 35

Introduction. L'étude de l'absorption d'une onde électromagnétique par un plasma inhomogène conduit, avec nombre d'hypothèses simplificatrices, à une équation de Schrödinger monodimensionnelle non linéaire du type suivant:

$$(1) \quad i \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + xu - p|u|^2 u = f(x); \quad x \in \mathbb{R}$$

où u est une "onde sortante" en $-\infty$, u tend vers 0 en $+\infty$. La fonction f représente l'amplitude de l'onde magnétique incidente. Son support est "petit", concentré autour de 0 (voir J. C. Adam, A. Gourdin-Servenièrre et G. Laval [2], G. J. Morales et Y. C. Lee [8]).

Les auteurs de [2] ont testé numériquement la validité de ce modèle. Ils se sont intéressés aux solutions stationnaires, et ont notamment mis en évidence le fait que celles-ci n'étaient pas stables pour de grandes valeurs du paramètre p de non linéarité.

D'autres équations de Schrödinger non linéaires, du type

$$(2) \quad i \frac{\partial u}{\partial t} + \Delta u + F(u) = 0 \quad \text{dans } \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$$

ont été étudiées par les mathématiciens, en particulier pour une non linéarité de la forme $F(u) = |u|^{k-1}u$.

Ainsi J. Ginibre et G. Velo [6] ont démontré l'existence et l'unicité d'une solution locale pour $1 < k < (n+2)/(n-2)$ ($n \geq 3$). Ils ont montré de plus que, pour $k < 1 + 4/n$,

* Received by the editors September 24, 1984; accepted for publication August 18, 1985.

[†] Ecole Polytechnique, Centre de Mathématiques Appliquées, 91128 Palaiseau Cedex, France.

toute solution locale est globale, et pour $k < 1 + 4/n$, R. T. Glassey [7] a prouvé qu'il existe des solutions qui explosent en un temps fini. D'autre part V. E. Zakharov et A. B. Shabat [9] ont mis en évidence l'existence de solitons en dimension 1.

Une étude globale de l'existence et du nombre de solitons pour l'équation (2) a été menée par H. Berestycki et P. L. Lions [4]. Ils ont établi l'existence d'une infinité de solutions radiales pour le problème

$$(3) \quad -\Delta u = g(u)$$

où g vérifie certaines hypothèses en 0 et $+\infty$.

En particulier en dimension 1, ils ont prouvé l'existence d'une "solution fondamentale" indéfiniment dérivable, paire, positive, décroissante pour $x > 0$, tendant vers zéro à l'infini. Toutes les autres solutions sont obtenues par translation et symétrie par rapport à l'origine. T. Cazenave [5] a étudié la stabilité de ces solitons.

Pour notre part, nous nous intéressons aux solutions stationnaires de l'équation (1). Elle comporte un second membre et un terme "non autonome" xu . Aussi, les études précédentes qui utilisent de façon essentielle l'existence d'une intégrale première, ne semblent pas pouvoir s'appliquer dans cette étude.

Pour connaître l'influence du paramètre p de nonlinéarité sur le nombre de solutions de (1), nous avons introduit un problème simplifié:

Puisque le support de f est petit, nous l'avons concentré autour de 0, et nous avons donc remplacé le second membre par une discontinuité de la partie réelle de la dérivée en 0.

La condition d'onde sortante en $-\infty$ nous a conduits à supposer que le terme non linéaire est petit devant le terme xu pour x négatif. Nous avons donc fait intervenir la non-linéarité uniquement pour $x > 0$. Pour ce problème nous avons montré qu'il y a toujours une solution stationnaire, et que le nombre de solutions stationnaires est croissant en fonction de p .

Il ne nous semble pas que ces simplifications changent fondamentalement les résultats.

Les problèmes envisagés et la démarche suivie. Les simplifications énoncées plus haut nous mènent aux deux problèmes suivants, que nous notons $\mathcal{P}_{\alpha,p}$ et $\mathcal{Q}_{\alpha,p}$:

Problème $\mathcal{P}_{\alpha,p}$: Trouver une fonction u qui est, pour $x < 0$, solution du problème \mathcal{P}_c^- , et, pour $x > 0$, solution du problème \mathcal{P}_c^+ :

$$\mathcal{P}_c^- \begin{cases} (1.1) & u'' + u = 0; x < 0, \\ (1.3) & u' + iu \rightarrow 0; x \rightarrow -\infty, \end{cases} \quad \mathcal{P}_c^+ \begin{cases} (1.2) & u'' - u + p|u|^2 u = 0; x > 0, \\ (1.4) & u \rightarrow 0; x \rightarrow +\infty, \end{cases}$$

et qui vérifie les conditions de transmission à l'origine:

$$(1.5) \quad u(0_+) - u(0_-) = 0,$$

$$(1.6) \quad u'(0_+) - u'(0_-) = \alpha, \quad \alpha > 0.$$

Nous avons indexé par C les problèmes \mathcal{P}_c^- et \mathcal{P}_c^+ pour signifier que nous cherchons des solutions à valeurs dans C .

Problème $\mathcal{Q}_{\alpha,p}$: Trouver une fonction u qui est, pour $x < 0$, solution du problème \mathcal{Q}_c^- , et, pour $x > 0$, solution du problème \mathcal{Q}_c^+ :

$$\mathcal{Q}_c^- \begin{cases} (2.1) & u'' - xu = 0; x < 0, \\ (2.3) & u' + i(-x)^{1/2} u \rightarrow 0; x \rightarrow -\infty, \end{cases} \quad \mathcal{Q}_c^+ \begin{cases} (2.2) & u'' - xu + p|u|^2 u = 0; x > 0, \\ (2.4) & xu \rightarrow 0; x \rightarrow +\infty, \end{cases}$$

et qui vérifie les conditions de transmission à l'origine:

$$(2.5) \quad u(0_+) - u(0_-) = 0,$$

$$(2.6) \quad u'(0_+) - u'(0_-) = \alpha, \quad \alpha > 0.$$

Rappelons que $u(0_+)$ (resp. $u(0_-)$) désigne la limite à droite (resp. à gauche) de u en 0.

Pour ces deux problèmes, nous avons imposé les mêmes conditions en zéro: continuité de la fonction et discontinuité de la partie réelle de sa dérivée. Les conditions (1.3) et (2.3) correspondent à une condition d'onde sortante en $-\infty$, les conditions (1.4) et (2.4) correspondent à une décroissance vers 0 de la fonction lorsque x tend vers $+\infty$.

Le problème $\mathcal{P}_{\alpha,p}$ est plus simple que le problème $\mathcal{Q}_{\alpha,p}$: le terme xu dans $\mathcal{Q}_{\alpha,p}$ a été remplacé par $\text{signe}(x)u$ dans $\mathcal{P}_{\alpha,p}$. Il nous a permis de mettre en évidence l'influence de la nonlinéarité, qui se traduit par l'existence de plusieurs solutions. Les résultats obtenus pour $\mathcal{P}_{\alpha,p}$ nous ont servi de guide pour l'étude de $\mathcal{Q}_{\alpha,p}$.

Nous avons adopté la démarche suivante: nous découplons les problèmes posés sur \mathbb{R}_- et sur \mathbb{R}_+ , et nous déterminons une relation entre $u(0_-)$ et $u'(0_-)$ (resp. $u(0_+)$ et $u'(0_+)$), condition nécessaire et suffisante pour qu'une solution u de l'équation différentielle posée sur \mathbb{R}_- (resp. \mathbb{R}_+) vérifie les conditions à l'infini imposées. La première relation est linéaire: elle est obtenue par la résolution explicite d'une équation différentielle linéaire. La deuxième relation est non linéaire; elle provient d'un calcul explicite pour $\mathcal{P}_{\alpha,p}$, et sera calculée numériquement pour $\mathcal{Q}_{\alpha,p}$.

Ces deux relations, jointes aux conditions de transmission, constituent un système non linéaire complexe de quatre équations à quatre inconnues $u(0_-)$, $u'(0_-)$, $u(0_+)$, $u'(0_+)$. La forme du problème permet de découpler les parties réelles et imaginaires de u pour x positif, et de ramener en fait la discussion sur le nombre de solutions de $\mathcal{P}_{\alpha,p}$ (resp. $\mathcal{Q}_{\alpha,p}$) à la résolution d'un système non linéaire réel de deux équations à deux inconnues: la partie réelle de u et sa dérivée en 0_+ . L'une des deux équations dépend du paramètre $\alpha^2 p$.

Nous représentons dans le plan $(u(0_+), u'(0_+))$ les deux équations, pour chacun des deux problèmes.

Pour le problème $\mathcal{P}_{\alpha,p}$, l'une des équations est représentée par une famille de cercles dont le rayon est croissant en fonction de p . Il apparaît un seuil: si p est inférieur à ce seuil, $\mathcal{P}_{\alpha,p}$ admet deux solutions, et au-delà $\mathcal{P}_{\alpha,p}$ n'a plus de solution. Ce phénomène de seuil est dû à la simplification apportée en remplaçant xu par $\text{signe}(x)u$ dans $\mathcal{P}_{\alpha,p}$.

Pour le problème $\mathcal{Q}_{\alpha,p}$, l'une des relations est obtenue à partir du problème posé sur \mathbb{R}_+ , et est représentée par une ellipse. L'autre relation est obtenue numériquement à partir d'un paramètre x_0 , et est représentée par une spirale.

Lorsque le paramètre $\alpha^2 p$ varie, la première relation entre $u(0_+)$ et $u'(0_+)$ est représentée par une famille d'ellipses, dont les axes croissent en fonction de $\alpha^2 p$: il y a toujours une solution, et plus la non-linéarité est importante, plus $\mathcal{Q}_{\alpha,p}$ admet de solutions.

La première partie de cette étude est consacrée au problème $\mathcal{P}_{\alpha,p}$. Des méthodes d'équations différentielles ordinaires permettent de décrire explicitement les solutions.

Ces méthodes ne sont plus applicables pour le problème $\mathcal{Q}_{\alpha,p}$ et nous serons amenés, dans la deuxième partie, à utiliser à la fois des méthodes mathématiques et des méthodes numériques.

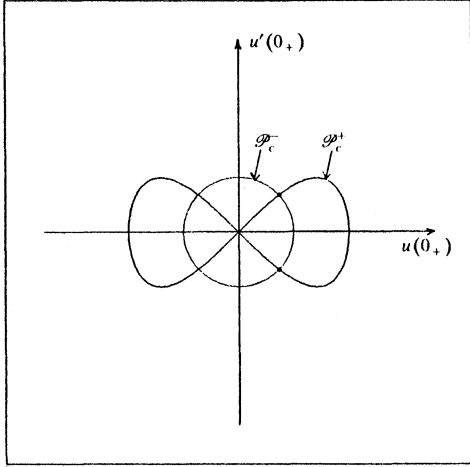


FIG. 1. Nombre de solutions de $\mathcal{P}_{\alpha,p}$, α et p fixés.

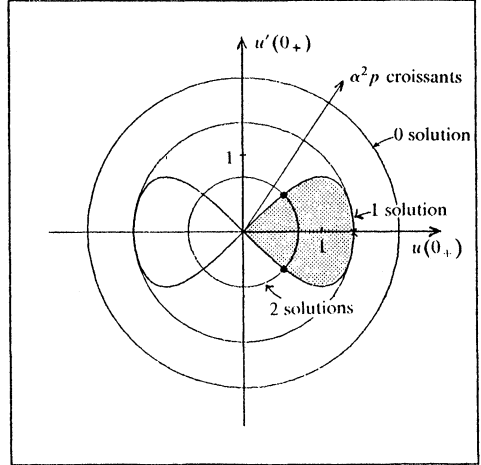


FIG. 2. Nombre de solutions de $\mathcal{P}_{\alpha,p}$ lorsque $\alpha^2 p$ varie.

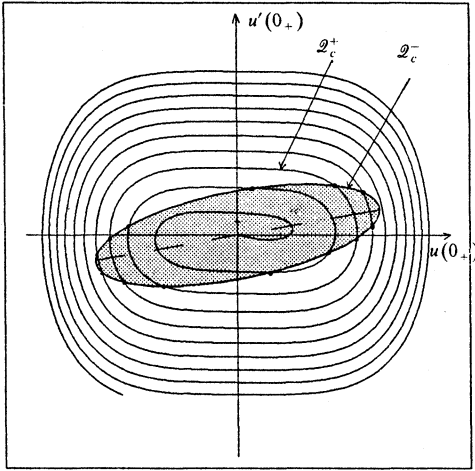


FIG. 3. Nombre de solutions de $\mathcal{Q}_{\alpha,p}$, α et p fixés.

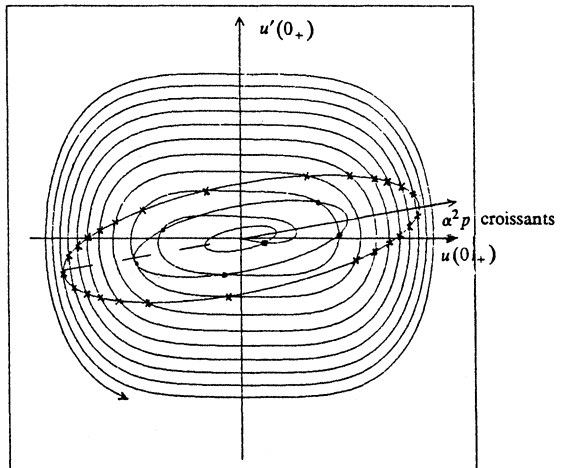


FIG. 4. Nombre de solutions de $\mathcal{Q}_{\alpha,p}$ lorsque $\alpha^2 p$ varie.

1. Etude du problème $\mathcal{P}_{\alpha,p}$. Nous pouvons pour le problème $\mathcal{P}_{\alpha,p}$ décrire complètement et explicitement l'ensemble des solutions:

PROPOSITION 1.1. *Le problème $\mathcal{P}_{\alpha,p}$ admet, suivant les valeurs de p et α , zéro, une ou deux solutions:*

- $p = 0$ *une solution,*
- $0 < p < p^* = 2/\alpha^2$ *deux solutions,*
- $p = p^*$ *une solution,*
- $p > p^*$ *pas de solution.*

De plus, ces solutions sont C^∞ sauf en $x = 0$.

Le cas $p = 0$ correspond à une équation linéaire. Le problème $\mathcal{P}_{\alpha,0}$ admet une seule solution, $u^*(0, x)$, donnée par

$$u^*(0, x) = \begin{cases} -\frac{\alpha}{2}(1+i)e^{-ix}, & x \leq 0, \\ -\frac{\alpha}{2}(1+i)e^{-x}, & x \geq 0. \end{cases}$$

Nous nous intéressons d'abord à \mathcal{P}_c^+ , dont nous exprimerons les solutions à partir de celles d'un problème réel \mathcal{P}_R^+ . Nous étudierons les orbites de l'équation différentielle associée dans le plan des phases. Nous montrerons en particulier qu'il existe une seule orbite non périodique, qui représente l'ensemble des solutions de \mathcal{P}_R^+ , et nous expliciterons ces solutions.

1.1. Le problème \mathcal{P}_c^+ . Introduisons le problème réel

$$(1.7) \quad \mathcal{P}_R^+ \begin{cases} -v'' + v - v^3 = 0, & x \geq 0, \\ v(x) \rightarrow 0, & x \rightarrow +\infty. \end{cases}$$

Pour passer de \mathcal{P}_c^+ à \mathcal{P}_R^+ , nous aurons besoin d'estimations a priori. Pour l'équation (1.2) on obtient de façon classique la conservation du moment et de l'énergie. On a plus précisément ici le

LEMME 1.1. *Estimations a priori. Toute solution u de \mathcal{P}_c^+ appartenant à $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$ possède un moment nul:*

$$(1.8) \quad u'\bar{u} - \bar{u}'u = 0,$$

ainsi qu'une énergie nulle:

$$(1.9) \quad |u'|^2 - |u|^2 + \frac{p}{2}|u|^4 = 0.$$

Elle vérifie de plus

$$(1.10) \quad u'(x) \rightarrow 0; \quad x \rightarrow +\infty.$$

Démonstration. Nous multiplions (1.2) par \bar{u}' et nous prenons la partie réelle

$$(1.11) \quad \frac{d}{dx} \left(|u'|^2 - |u|^2 + \frac{p}{2}|u|^4 \right) = 0, \quad \text{d'où}$$

$$|u'|^2 - |u|^2 + \frac{p}{2}|u|^4 = \text{cte sur } \mathbb{R}_+.$$

Downloaded 01/01/13 to 150.135.135.70. Redistribution subject to SIAM license or copyright; see http://www.siam.org/journals/ojsa.php

D'autre part, nous multiplions (1.2) par \bar{u} et nous prenons la partie imaginaire

$$(1.12) \quad \begin{aligned} \frac{d}{dx}(u'\bar{u} - \bar{u}'u) &= 0, \quad \text{d'où} \\ u'\bar{u} - \bar{u}'u &= \text{cte} \quad \text{sur } \mathbb{R}_+. \end{aligned}$$

Par hypothèse u tend vers 0 à l'infini, et on déduit de (1.11) que u' est bornée. La constante dans (1.12) est donc nulle. Montrons maintenant que u' tend vers 0 à l'infini.

D'après (1.8) la partie réelle et la partie imaginaire de u sont proportionnelles, nous pouvons donc raisonner sur $v = \operatorname{Re} u$.

La fonction réelle v est \mathcal{C}^1 , tend vers 0 à l'infini, et d'après (1.11) v'^2 a une limite à l'infini. La fonction v' a donc une limite l quand x tend vers l'infini. Cette limite doit être nulle.

Nous en déduisons le

LEMME 1.2. Equivalence entre \mathcal{P}_c^+ et \mathcal{P}_R^+ . La fonction u est solution de \mathcal{P}_c^+ si et seulement si il existe un nombre complexe z_0 et une fonction réelle v tels que

$$(1.13) \quad \begin{aligned} u &= \frac{z_0}{\sqrt{p}} v, \quad |z_0| = 1, \\ v &\text{ solution de } \mathcal{P}_R^+. \end{aligned}$$

Démonstration. Soit u une solution de \mathcal{P}_c^+ . D'après la démonstration précédente, la partie imaginaire de u est proportionnelle à sa partie réelle

$$u = (1 + \lambda i) u_1$$

et u_1 est solution de l'équation réelle

$$u_1'' - u_1 + p(1 + \lambda^2) u_1^3 = 0.$$

La fonction u s'écrit donc sous la forme

$$(1.14) \quad u = \frac{1 + \lambda i}{\sqrt{p(1 + \lambda^2)}} v$$

où v est solution de \mathcal{P}_R^+ .

Réciproquement, si v est solution de \mathcal{P}_R^+ , la fonction u définie par (1.14) est solution de \mathcal{P}_c^+ .

Nous définissons sur \mathbb{R} le système différentiel

$$(1.15) \quad -v'' + v - v^3 = 0, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Introduisons la fonction U (assimilable à une énergie potentielle), définie par

$$(1.16) \quad U(v) = -\frac{v^2}{2} + \frac{v^4}{4}$$

ainsi que la fonction E définie sur l'ensemble des fonctions C^1 par

$$(1.17) \quad E(v) = \frac{v'^2}{2} + U(v);$$

E est "l'énergie totale."

Nous avons pour ce système l'équivalent du lemme 1.1, c'est-à-dire que le système (1.15) est *conservatif*:

$$(1.18) \quad \frac{d}{dx}(E(v)) = 0.$$

Pour tracer les orbites du système, c'est-à-dire $\{(v, v'); E(v) = E\}$, il est commode de tracer la courbe représentant les variations du potentiel U (voir figure 5).

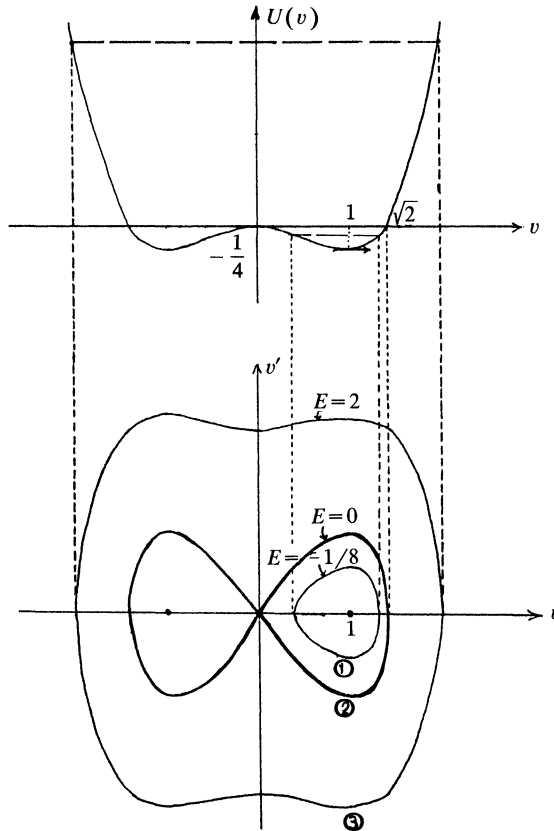


FIG. 5. Orbites du système (1.15).

Il y a deux sortes d'orbites périodiques: de type pour une énergie totale négative et de type pour une énergie totale positive. Il y a une orbite non périodique (à une symétrie par rapport à l'origine près), de type, correspondant à une énergie nulle. Un point représentatif situé sur cette orbite atteindra le point zéro sur une distance infinie. L'analyse de ces orbites est résumée dans le lemme 1.3.

LEMME 1.3. Description des solutions du système différentiel. *Le système (1.15) admet une infinité de solutions d'énergie E donnée. Elles sont toutes égales, à une translation et une symétrie près, à une fonction V^E , paire, telle que*

$$(1.19) \quad \frac{dV^E}{dx}(0) = 0, \quad U(V^E(0)) = E, \quad V^E(0) > 1.$$

Les solutions de (1.15) d'énergie nulle sont celles qui tendent vers 0 en $+\infty$ et $-\infty$.

De plus V^0 est donnée explicitement par

$$(1.20) \quad V^0(x) = \begin{cases} 2\sqrt{2} \frac{e^x}{1+e^{2x}}, & x \geq 0, \\ V^0(-x), & x \leq 0. \end{cases}$$

Remarque. H. Berestycki et P. L. Lions ont montré, dans [3], le même type de résultat pour l'équation

$$-u'' = g(u).$$

Leur approche est différente, mais les hypothèses faites sur g permettent d'utiliser la théorie des systèmes conservatifs, et d'assurer l'existence d'une orbite de type (1).

Démonstration du Lemme 1.3. Il ne nous reste qu'à établir l'expression (1.20):

V^0 est solution sur \mathbb{R}_+ du problème de Cauchy:

$$(1.21) \quad \begin{aligned} -v'' + v - v^3 &= 0, & x \geq 0, \\ v(0) &= \sqrt{2}, \\ v'(0) &= 0. \end{aligned}$$

D'après (1.17) nous avons sur \mathbb{R}_+

$$(1.22) \quad v'^2 - v^2 + \frac{v^4}{2} = 0.$$

Posons

$$(1.23) \quad w = \frac{v'}{v}.$$

La fonction w est solution sur \mathbb{R}_+ du problème de Cauchy:

$$(1.24) \quad \begin{aligned} w' &= w^2 - 1, \\ w(0) &= 0. \end{aligned}$$

Cette équation de Riccati se résout explicitement sous la forme

$$(1.25) \quad w = \frac{1 - e^{2x}}{1 + e^{2x}}.$$

Il suffit maintenant d'intégrer (1.23) pour obtenir l'expression de V^0 sur $[0, +\infty[$. V^0 est obtenue alors par symétrisation sur $]-\infty, 0]$. \square

Nous pouvons maintenant énoncer le théorème d'existence pour \mathcal{P}_R^+ .

THEOREME 1.1. Condition nécessaire et suffisante d'existence pour \mathcal{P}_R^+ . Une fonction v solution de l'équation différentielle (1.15) sur \mathbb{R}_+ est solution du problème \mathcal{P}_R^+ si et seulement si ses valeurs de Cauchy en 0: $v_0 = v(0)$ et $v'_0 = v'(0)$ sont liées par la relation

$$(1.26) \quad v_0'^2 - v_0^2 + \frac{v_0^4}{2} = 0.$$

Elle est alors donnée explicitement par

$$(1.27) \quad V(v_0, v'_0; x) = V^0(x + x_0)$$

où x_0 est donné par

$$(1.28) \quad e^{x_0} = \frac{v_0}{\sqrt{2(1+v'_0/v_0)}}. \quad \square$$

A un couple (v_0, v'_0) de solutions de (1.26) sont associées quatre solutions de \mathcal{P}_R^+ : $V(v_0, v'_0; x)$, $V(v_0, -v'_0; x)$, $-V(v_0, v'_0; x)$, et $-V(v_0, -v'_0; x)$.

Les deux premières sont obtenues à partir de V^0 par translation respectivement de x_0 et $-x_0$. Les deux autres sont ensuite obtenues par symétrie par rapport à l'axe des x . La figure 6 représente les variations de la solution fondamentale V^0 en fonction de x . La figure 7 représente les quatre solutions associées à un couple (v_0, v'_0) de nombres positifs solution de (1.26).

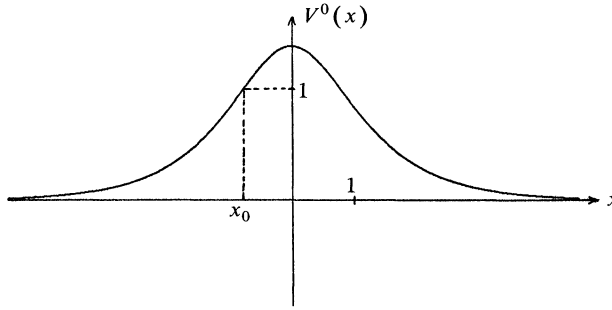


FIG. 6. Représentation de V^0 sur \mathbb{R} .

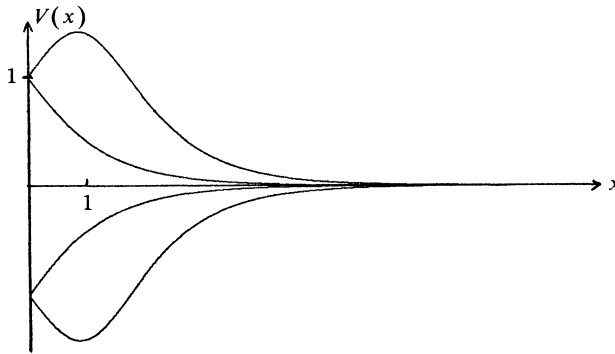


FIG. 7. Solutions de \mathcal{P}_R^+ associées à $(v_0, v'_0) = (1, 1/\sqrt{2})$.

Le théorème 1.1 nous donne une relation entre v_0 et v'_0 , condition nécessaire et suffisante pour que v soit solution de \mathcal{P}_R^+ . Pour compléter notre étude, nous devons revenir au problème complexe $\mathcal{P}_{\alpha, p}$.

1.2. Le problème \mathcal{P}_c^- . L'étude de \mathcal{P}_c^- nous conduira à une relation linéaire entre $u(0_-)$ et $u'(0_-)$. Les conditions de transmission la transformeront en une relation linéaire entre $u(0_+)$ et $u'(0_+)$. Le lemme 1.2 nous permettra d'en déduire une relation entre v_0 et v'_0 , valeurs de Cauchy de la solution de l'équation différentielle réelle

associée à \mathcal{P}_c^+ . Nous aboutirons ainsi à un système de deux équations réelles à deux inconnues v_0 et v'_0 .

1.2.1. Le problème \mathcal{P}_c^- . Il peut être résolu explicitement:

LEMME 1.4. *Toutes les solutions u de \mathcal{P}_c^- vérifient*

$$(1.29) \quad u' + iu = 0 \quad \forall x \leq 0,$$

$$(1.30) \quad u = u_0 \exp -ix \quad \forall x \leq 0.$$

En effet, d'après (1.1), u s'écrit

$$u = A^+ \exp ix + A^- \exp -ix,$$

et la condition d'onde sortante élimine la composante $\exp ix$.

Nous sommes maintenant en mesure d'écrire une caractérisation des solutions de $\mathcal{P}_{\alpha,p}$.

1.2.2. Détermination du système non linéaire reliant v_0 et v'_0 . Notons (S) le système non linéaire liant v_0 et v'_0 :

$$(1.31) \quad (\text{S}) \begin{cases} v_0'^2 + v_0^2 = \alpha^2 p, \\ v_0'^2 - v_0^2 + \frac{v_0^4}{2} = 0, \\ v_0 \geq 0. \end{cases}$$

Nous avons alors le:

THÉORÈME 1.2. Condition nécessaire et suffisante d'existence pour le problème $\mathcal{P}_{\alpha,p}$. *Le problème $\mathcal{P}_{\alpha,p}$ admet une solution u si et seulement si le système (S) admet une solution (v_0, v'_0) . Elle est alors donnée par:*

$$(1.32) \quad u(x) = \begin{cases} \frac{1}{\alpha p} (v'_0 - iv_0) V(v_0, v'_0; x), & x \geq 0, \\ \frac{1}{\alpha p} (v'_0 - iv_0) v_0 \exp -ix; & x \leq 0. \end{cases}$$

Démonstration. Soit u une solution de $\mathcal{P}_{\alpha,p}$. D'après le lemme 1.4, $u'(0_-)$ et $u(0_-)$ sont liés par:

$$u'(0_-) + iu(0_-) = 0.$$

Nous transformons cette relation à l'aide des conditions de transmission:

$$(1.33) \quad u'(0_+) + iu(0_+) = \alpha.$$

D'autre part, d'après le lemme 1.2, u s'écrit pour $x \geq 0$:

$$u = \frac{z_0}{\sqrt{p}} v$$

où v_0 et v'_0 sont liés par

$$v_0'^2 - v_0^2 + \frac{v_0^4}{2} = 0.$$

L'équation (1.33) se traduit alors par une relation entre z_0 , v_0 et v'_0 :

$$\frac{z_0}{\sqrt{p}}(v'_0 + iv_0) = \alpha.$$

Si nous exprimons que z_0 est un nombre complexe de module 1, il vient

(1.34)
$$v'^2_0 + v^2_0 = \alpha^2 p,$$

(1.35)
$$z_0 = \frac{1}{\alpha\sqrt{p}}(v'_0 - iv_0).$$

Pour x positif, u s'écrit alors

$$u(x) = \frac{1}{\alpha p}(v'_0 - iv_0)V(v_0, v'_0; x)$$

où V est la solution du problème réel associé à (v_0, v'_0) , et, pour x négatif

$$u(x) = \frac{1}{\alpha p}(v'_0 - iv_0)v_0 \exp(-ix).$$

Les considérations de parité sur v développées après le théorème 1.1 permettent enfin de supposer que v_0 est positif.

Réciproquement, si (v_0, v'_0) est une solution de (S), la fonction u définie par (1.32) est solution de $\mathcal{P}_{\alpha,p}$.

Pour achever la démonstration de la proposition 1, il nous faut dénombrer les solutions du système (S) de deux équations à deux inconnues. La figure 8 représente les variations des fonctions:

$$Y^2 + X^2 = \alpha^2 p,$$

$$Y^2 - X^2 + \frac{X^4}{2} = 0.$$

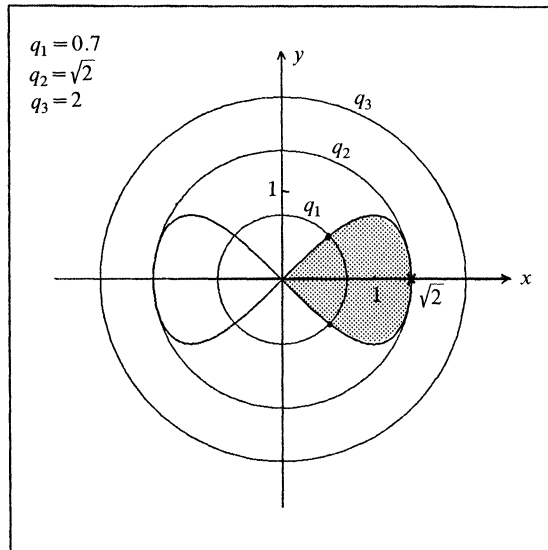


FIG. 8. Solutions du système (S) pour différentes valeurs du paramètre $q = \sqrt{\alpha^2 p}$.

Les points d'intersection des deux courbes représentatives donnent les solutions du système (S).

Nous pouvons calculer explicitement les solutions du système (S) en fonction du paramètre $p\alpha^2$.

Notons

$$(1.36) \quad V_0(p) = \sqrt{2} \left(1 - \left(1 - \frac{p\alpha^2}{2} \right)^{1/2} \right)^{1/2},$$

$$(1.37) \quad V_0'(p) = \left(1 - \frac{p\alpha^2}{2} \right)^{1/4} V_0(p)$$

si $p\alpha^2 \leq 2$.

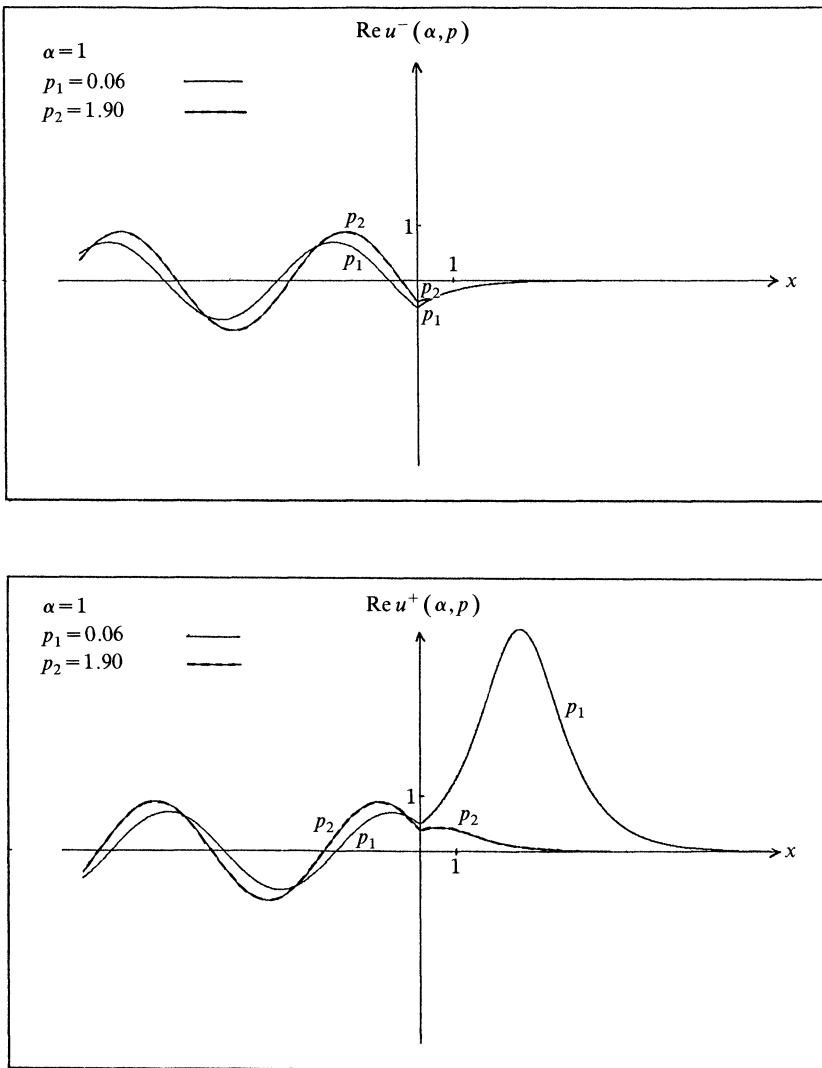


FIG. 9. Représentation des parties réelles de u^+ et u^- .

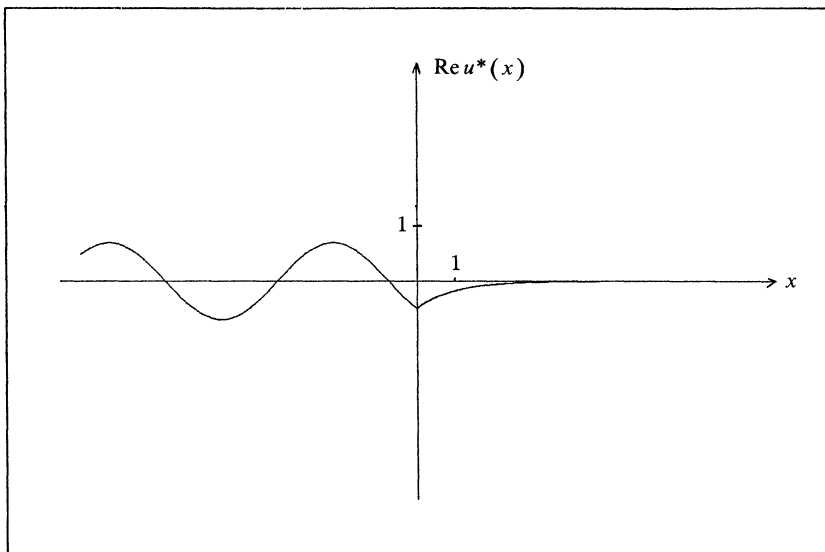


FIG. 10. Représentation de la partie réelle de u^* , solution du problème linéaire.

Nous avons alors le:

LEMME 1.5. Le système (S) admet, suivant les valeurs de $p\alpha^2$, zéro, une ou deux solutions:

$$\begin{aligned} 0 < p\alpha^2 < 2, & \quad 2 \text{ solutions : } (V_0(p), V_0'(p)) \text{ et } (V_0(p), -V_0'(p)), \\ p\alpha^2 = 2, & \quad 1 \text{ solution : } (\sqrt{2}, 0), \\ p\alpha^2 > 2, & \quad 0 \text{ solution.} \end{aligned}$$

L'expression des solutions de $\mathcal{P}_{\alpha,p}$ donnée au théorème 1.2 permet de différencier les deux solutions associées au même paramètre $\alpha^2 p$ par le signe de leurs parties réelles.

Nous notons $u^+(\alpha, p)$ la solution de partie réelle positive et $u^-(\alpha, p)$ la solution de partie réelle négative, et nous représentons leurs parties réelles pour $\alpha = 1$ et différentes valeurs de p (voir figures 9 et 10).

Remarquons d'abord que la valeur de la fonction pour x négatif varie peu lorsque p est proche de zéro ou de deux.

De même, pour x positif, la partie réelle de u^- dépend peu de p , et lorsque p tend vers 0, $u^-(\alpha, p)$ tend vers la solution u^* du problème linéaire. Par contre, lorsque p devient petit, $u^+(\alpha, p)$ admet un maximum pour x positif qui croît en $1/\sqrt{p}$. La fonction u^- semble donc être la "bonne" solution, et u^+ la solution "parasite."

L'étude de $\mathcal{P}_{\alpha,p}$ fait ainsi apparaître qu'une non-linéarité, même faible, peut modifier totalement la nature de l'équation stationnaire. Nous allons maintenant examiner le problème dérivant directement de (1), en réintroduisant le terme non autonome xu . Nous verrons que l'effet de seuil disparaît, mais qu'en revanche le nombre de solutions est croissant avec p .

2. Etude du problème $\mathcal{Q}_{\alpha,p}$. Comme pour le problème $\mathcal{P}_{\alpha,p}$, nous allons écrire un système de deux relations à deux inconnues, reliant les valeurs en zéro d'une fonction v

et de sa dérivée, où v est solution de l'équation réelle associée à \mathcal{Q}_c^+ :

$$(2.7) \quad -v'' + xv - v^3 = 0.$$

La première relation sera obtenue comme précédemment par l'intégration explicite de \mathcal{Q}_c^- et les conditions de transmission. Par contre la caractérisation des solutions de (2.7) est beaucoup plus complexe, car il nous semble impossible de résoudre explicitement cette équation. Nous ferons intervenir un paramètre x_0 , et pour chaque valeur de x_0 nous définissons une fonctionnelle sur $[x_0, +\infty[$. Nous caractérisons ainsi les solutions de (2.7) qui tendent vers zéro à l'infini comme les solutions coïncidant sur $[x_0, +\infty[$ avec le minimum de cette fonctionnelle pour un certain x_0 . Nous obtiendrons ainsi la deuxième relation entre v_0 et v'_0 , par l'intermédiaire du paramètre x_0 .

2.1. Etude mathématique. Nous commençons par caractériser les solutions du problème linéaire \mathcal{Q}_c^- .

2.1.1. Etude du problème \mathcal{Q}_c^- . Nous pouvons exprimer la solution u de \mathcal{Q}_c^- à partir de la fonction d'Airy Ai définie dans [1] par:

$$(2.8) \quad \begin{aligned} z'' - xz &= 0, & x \in \mathbb{R}, \\ z(0) &= 3^{-2/3}/\Gamma(2/3), \\ z'(0) &= -3^{-1/3}/\Gamma(1/3). \end{aligned}$$

LEMME 2.1. *Toutes les solutions de \mathcal{Q}_c^- vérifient*

$$(2.9) \quad \forall v < 0, \quad u(x) = \lambda Ai(xe^{2i\pi/3}), \quad \lambda \in \mathbb{C}.$$

En $x=0$, u et u' sont liés par la relation

$$(2.10) \quad u'(0_-) + Ke^{2i\pi/3}u(0_-) = 0$$

où $K = -Ai'(0)/Ai(0)$.

Ce lemme est une conséquence immédiate des propriétés de la fonction d'Airy données dans [1].

Nous introduisons maintenant le problème réel:

$$(2.11) \quad \mathcal{Q}_R^+ \begin{cases} -v' + xv - v^3 = 0, & x \in \mathbb{R}_+, \\ xv \rightarrow 0, & x \rightarrow +\infty, \end{cases}$$

et nous cherchons à décrire l'ensemble de ses solutions. Pour cela nous notons que, pour x fixé, l'application:

$$v \rightarrow xv - v^3$$

est le gradient d'une fonction convexe sur

$$(2.12) \quad I_x = \left[-\sqrt{\frac{x}{3}}, +\sqrt{\frac{x}{3}} \right].$$

Pour tout x_0 positif, nous introduisons un problème aux limites sur $]x_0, +\infty[$ tel que, pour tout x , la solution $v(x)$ appartienne à I_x . Nous montrerons que toute solution de \mathcal{Q}_R^+ est solution d'un unique problème de ce type, et nous en caractériserons les solutions comme minima d'une fonctionnelle convexe.

Nous la prolongerons ensuite sur $[0, x_0]$ et nous aurons *toutes* les solutions de \mathcal{Q}_R^+ , paramétrisées par x_0 .

2.1.2. Comportement asymptotique des solutions de \mathcal{Q}_R^+ . Pour tout x_0 positif, nous introduisons le problème

$$(2.13) \quad \mathcal{Q}_{x_0} \begin{cases} -v'' + xv - v^3 = 0, \\ v(x_0) = \sqrt{\frac{x_0}{3}}, \quad xv(x) \rightarrow 0 \quad \text{quand } x \rightarrow +\infty, \\ \forall x \geq x_0, \quad v(x) \in I_x. \end{cases}$$

Avant de décrire ses solutions, nous montrons qu'elles sont les restrictions à $[x_0, +\infty[$ des solutions de \mathcal{Q}_R^+ (voir figure 11).

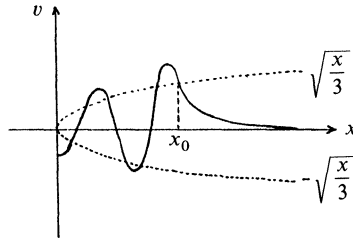


FIG. 11. Illustration du lemme 2.2.

LEMME 2.2. Soit v une solution de \mathcal{Q}_R^+ . Alors il existe un x_0 positif tel que la restriction de v à $[x_0, +\infty[$ soit solution de \mathcal{Q}_{x_0} .

Démonstration. Comme dans 1, si v est solution de \mathcal{Q}_R^+ , $v^{(n)}(x)$ tend vers 0 pour tout n lorsque x tend vers $+\infty$. Puisque v est \mathcal{C}^∞ , il existe alors un x_0 positif tel que $v^2(x_0) = x_0/3$ et, pour tout x supérieur à x_0 , $v^2(x) \leq x/3$. Alors v est solution de \mathcal{Q}_{x_0} .

Le lien entre \mathcal{Q}_R^+ et \mathcal{Q}_{x_0} ainsi établi, nous étudions le problème \mathcal{Q}_{x_0} , et nous introduisons un problème de minimisation.

Notons:

$$(2.14) \quad V(x_0) = \{ v \in H^1(]x_0, +\infty[), \sqrt{x}v \in L^2(]x_0, +\infty[) \}.$$

$V(x_0)$ est un espace de Hilbert pour la norme définie par

$$(2.15) \quad \|v\|^2 = |v|_1^2 + \|\sqrt{x}v\|_0^2.$$

Soit

$$(2.16) \quad \mathcal{J}_{x_0}(v) = \frac{1}{2} \int_{x_0}^{+\infty} v^2(x) dx + \frac{1}{2} \int_{x_0}^{+\infty} \left(xv^2(x) - \frac{v^4(x)}{2} \right) dx,$$

une fonctionnelle définie sur $V(x_0)$.

Nous définissons un convexe fermé de $V(x_0)$ par

$$(2.17) \quad K(x_0) = \left\{ v \in V(x_0); v(x_0) = \sqrt{\frac{x_0}{3}}; v(x) \in I_x, \forall x \geq x_0 \right\}$$

et un problème de minimisation avec contraintes par:

$$(2.18) \quad \mathcal{M}_{x_0} : \inf_{v \in V(x_0)} \mathcal{J}_{x_0}(v).$$

L'introduction de ce problème est justifiée par le

LEMME 2.3. Existence et unicité pour le problème \mathcal{Q}_{x_0} . *Le problème \mathcal{Q}_{x_0} admet une solution unique \mathcal{C}^∞ . C'est une fonction positive, décroissante, convexe. De plus c'est la solution du problème de minimisation \mathcal{M}_{x_0} .*

Démonstration. La fonctionnelle \mathcal{J}_{x_0} est strictement convexe, différentiable, coercive, sur la convexe fermé $K(x_0)$. Un théorème usuel d'optimisation prouve qu'elle admet un minimum unique sur $K(x_0)$, caractérisé par

$$\forall w \in K(x_0), \quad \mathcal{J}'_{x_0}(v)(w-v) \geq 0,$$

soit ici

$$(2.19) \quad \forall w \in K(x_0), \quad \int_{x_0}^{+\infty} (-v'' + xv - v^3)(w-v) \geq 0.$$

D'autre part, $|v|$ est dans $K(x_0)$ et $\mathcal{J}_{x_0}(v) = \mathcal{J}_{x_0}(|v|)$. L'unicité assure alors la positivité de v .

Posons maintenant:

$$(2.20) \quad \Omega_0 = \left\{ x \in [x_0, +\infty[; v(x) = \sqrt{\frac{x}{3}} \right\},$$

$$(2.21) \quad \Omega_+ = \left\{ x \in]x_0, +\infty[; v(x) < \sqrt{\frac{x}{3}} \right\}.$$

Si φ appartient à $\mathcal{D}_+(]x_0, +\infty[)$, et si ε est un nombre positif assez petit:

$$w = v - \varepsilon\varphi \in K(x_0).$$

Appliquons (2.19) à w :

$$\forall x \in \Omega_+, \quad -v'' + xv - v^3 = 0,$$

$$\forall x \in \Omega_0, \quad -v'' + xv - v^3 \leq 0.$$

Nous en déduisons que v'' est positive, et donc que v' est croissante, sur $]x_0, +\infty[$. Or v' tend vers 0 à l'infini. Donc v' est négative, et v est décroissante sur $]x_0, +\infty[$. Par suite Ω_0 se réduit à x_0 , et

$$(2.22) \quad \forall x \in]x_0, +\infty[, \quad -v'' + xv - v^3 = 0.$$

Ainsi v est dans $H^2(]x_0, +\infty[)$, et donc dans $\mathcal{C}^1(]x_0, +\infty[)$; v est \mathcal{C}^∞ sur $]x_0, +\infty[$ et par continuité (2.22) est valable aussi en x_0 . La caractérisation (2.19) montre enfin que toute solution de \mathcal{Q}_{x_0} est solution de \mathcal{M}_{x_0} .

Notons maintenant, pour tout x_0 :

$$(2.23) \quad v(x_0, \gamma; x) \text{ une solution } \mathcal{C}^\infty \text{ du problème de Cauchy,}$$

$$\begin{cases} -v'' + xv - v^3 = 0 & \text{sur }]x_0, +\infty[, \\ v(x_0) = \sqrt{\frac{x_0}{3}}, \quad v'(x_0) = \gamma, \end{cases}$$

$$(2.24) \quad v^*(x_0; x) \text{ la solution du problème de minimisation } \mathcal{M}_{x_0},$$

$$(2.25) \quad \gamma^*(x_0) \text{ sa dérivée en } x_0.$$

Nous pouvons énoncer le

THÉORÈME 2.1. Condition nécessaire d'existence pour le problème \mathcal{Q}_R^+ . Soit v une solution du problème \mathcal{Q}_R^+ . Il existe un x_0 positif tel que

$$v = v^*(x_0; \cdot) \quad \text{ou} \quad v = -v^*(x_0; \cdot) \quad \text{sur} \quad]x_0, +\infty[.$$

Ce théorème est une conséquence des deux lemmes précédents.

Remarquons que $\gamma^*(x_0)$ n'est pas donné explicitement en fonction de x_0 . Par la suite, nous calculerons $u^*(x_0; \cdot)$ numériquement, et nous aurons besoin de certaines propriétés de $\gamma^*(x_0)$ que nous établissons maintenant.

2.1.3. Propriétés de $\gamma^*(x_0)$ —Comportement asymptotique lorsque x tend vers $+\infty$. Toutes les démonstrations seront basées sur une estimation à priori.

LEMME 2.4. Egalité d'énergie. Si une fonction v est solution sur $]y, z[$ de l'équation différentielle (2.7), on a sur $]y, z[$ la relation:

$$(2.26) \quad \frac{d}{dx} \left(v'^2 - xv^2 + \frac{v^4}{2} \right) = -v^2.$$

La démonstration est analogue à celle du lemme 1.1.

Nous établissons maintenant deux propriétés de $v^*(x_0; \cdot)$.

LEMME 2.5.

i) Encadrement de la solution $v^*(x_0; \cdot)$ du problème aux limites par des solutions $v(x_0, \gamma; \cdot)$ de problèmes de Cauchy.

• Si $\gamma_1 < \gamma^*(x_0)$ il existe un $x_1 > x_0$, tel que $v(x_0, \gamma_1; x_1) = 0$.

• Si $\gamma_1 > \gamma^*(x_0)$ il existe un $x_2 > x_0$, tel que $v'(x_0, \gamma_2; x_2) = 0$.

ii) Encadrement de $\gamma^*(x_0)$ en fonction de x_0 . Pour tout $x_0 > 0$ on a l'encadrement

$$(2.27) \quad -\frac{1}{\sqrt{3}} \left(x_0 + \frac{1}{4} x_0^{-1/2} \right) \leq \gamma^*(x_0) \leq -\frac{x_0}{3} \sqrt{\frac{5}{2}}.$$

En particulier $\gamma^*(x_0)$ tend vers $-\infty$ lorsque x_0 tend vers $+\infty$.

La figure 12 illustre la partie (i) du lemme 2.5.

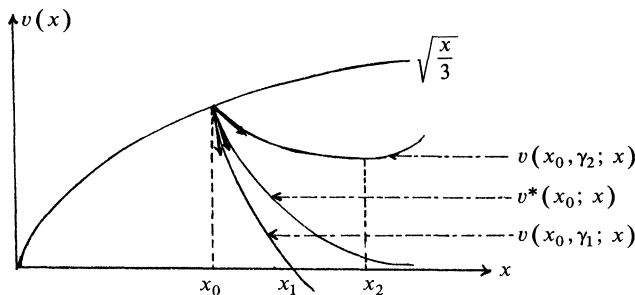


FIG. 12. Représentation de $v(x_0, \gamma_1; \cdot)$, $v^*(x_0; \cdot)$, $v(x_0, \gamma_2; \cdot)$ pour $\gamma_1 < \gamma^*(x_0) < \gamma_2$.

Démonstration. i) Nous établissons le premier résultat; le deuxième se démontre de même. Soit donc $\gamma_1 < \gamma^*(x_0)$, et raisonnons par l'absurde: supposons que $v(x_0, \gamma_1; x)$ ne s'annule jamais sur $]x_0, +\infty[$. D'après l'unicité de la solution du problème \mathcal{Q}_{x_0} , les

deux fonctions $v^*(x_0; \cdot)$ et $v(x_0, \gamma_1; \cdot)$ prennent la même valeur en un point x' tel que $x' > x_0$ (voir figure 13):

$$v^*(x_0; x') = v(x_0, \gamma_1; x').$$

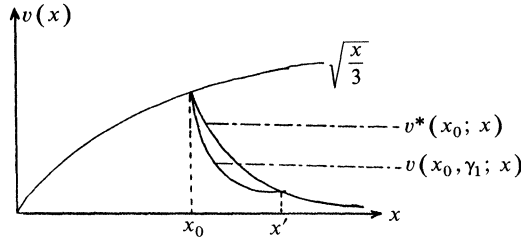


FIG. 13

Posons

$$w(x) = v^*(x_0; x) - v(x_0, \gamma_1; x).$$

w s'annule en x_0 et x' , sa dérivée s'annule donc en un point x'' tel que:

$$x_0 < x'' < x', \quad w'(x'') = 0.$$

Or

$$w''(x) = x(v^*(x_0; x) - v(x_0, \gamma_1; x)) - ((v^*(x_0; x))^3 - (v(x_0, \gamma_1; x))^3).$$

w'' est positive sur $]x_0, x'[,$ et $w'(x_0) = \gamma^*(x_0) - \gamma_1 > 0$. w' est alors strictement positive sur $]x_0, x'[,$ et ne peut s'annuler en x'' .

ii) La majoration résulte du lemme 2.4. En effet, la fonction

$$x \rightarrow (v^*(x_0; x))^2 - x(v^*(x_0; x))^2 + \frac{1}{2}(v^*(x_0; x))^4$$

est décroissante et tend vers 0 à l'infini. Elle est donc positive en x_0 :

$$\gamma^{*2}(x_0) - \frac{5x_0^2}{18} \geq 0.$$

La minoration provient de la remarque suivante: la fonction v définie sur $]x_0, +\infty[$ par

$$v(x) = \frac{x_0^{3/4}}{\sqrt{3}} \exp\left(\frac{2}{3}x_0^{3/2}x^{-1/4} \exp\left(-\frac{2}{3}x^{3/2}\right)\right)$$

est une sous-solution. Sa dérivée en x_0 est donc inférieure à $\gamma^*(x_0)$.

Nous pouvons de plus préciser le comportement asymptotique des fonctions $v^*(x_0; \cdot)$.

Effectuons un changement d'échelle et une translation; posons pour cela:

$$(2.28) \quad \begin{aligned} v^*(x_0; x) &= \sqrt{x_0} w_{x_0}(y), \\ y &= \sqrt{x_0}(x - x_0). \end{aligned}$$

w_{x_0} est une fonction définie sur $[0, +\infty[$, solution du problème aux limites:

$$(2.29) \quad \begin{aligned} & -w'' + \left(1 + \frac{y}{x_0^{3/2}}\right)w - w^3 = 0, \\ & w(0) = \frac{1}{\sqrt{3}}, \quad w(x) \rightarrow 0 \quad \text{quand } x \rightarrow +\infty. \end{aligned}$$

De plus la pente de w_{x_0} en 0 est déterminée:

$$(2.30) \quad w'_{x_0}(0) = \frac{\gamma^*(x_0)}{x_0}.$$

Nous avons tracé ci-dessous les représentations de $v^*(x_0; \cdot)$ sur $[x_0, x_0 + A]$ et de w_{x_0} sur $[0, A]$ pour différentes valeurs de x_0 . Il apparait nettement sur la fig. 14 que la pente de v^* en $x_0, \gamma^*(x_0)$ décroît et tend vers $-\infty$ lorsque x_0 croît et tend vers $+\infty$. La figure 15 semble montrer que la famille w_{x_0} est croissante sur $[0, +\infty[$ et converge uniformément lorsque x_0 tend vers $+\infty$. C'est ce résultat que nous allons établir.

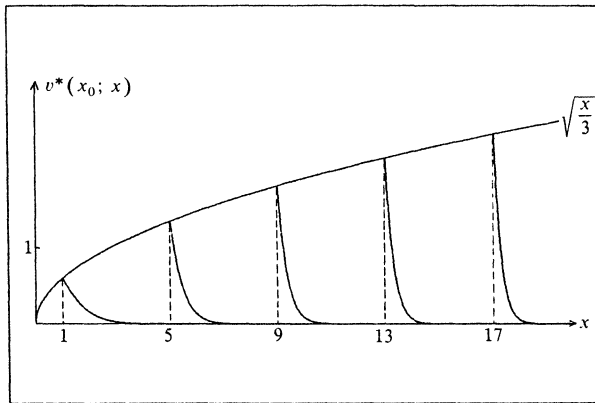


FIG. 14. Représentation de $v^*(x_0; \cdot)$ sur $[x_0, +\infty[$ pour différentes valeurs de x_0 .

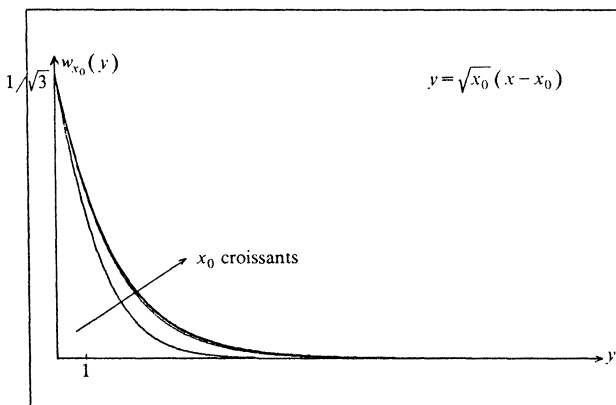


FIG. 15. Représentation de w_{x_0} sur $[0, +\infty[$ pour différentes valeurs de x_0 .

LEMME 2.6. Comportement asymptotique de $v^*(x_0; \cdot)$ lorsque x_0 tend vers l'infini. La famille de fonctions w_{x_0} est croissante avec x_0 et converge uniformément vers $V(\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\sqrt{\frac{5}{2}}; \cdot)$ lorsque x_0 tend vers $+\infty$. En particulier

i) la fonction $x_0 \rightarrow \gamma^*(x_0)/x_0$ est croissante et tend vers $-\frac{1}{3}\sqrt{\frac{5}{2}}$ lorsque x_0 tend vers $+\infty$;

ii) sur $]x_0, +\infty[$, $v^*(x_0; x) \leq \lambda\sqrt{x_0} e^{-\sqrt{x_0}(x-x_0)}$, où λ est une constante.

Rappelons que $V(1/\sqrt{3}, -\frac{1}{3}\sqrt{\frac{5}{2}}; \cdot)$ est définie en (1.27) comme la solution du problème:

$$-v'' + v - v^3 = 0, \quad x \geq 0,$$

$$v(0) = \frac{1}{\sqrt{3}},$$

$$v'(0) = -\frac{1}{3}\sqrt{\frac{5}{2}}.$$

Démonstration. 1. Montrons d'abord que la famille des fonctions w_{x_0} est croissante avec x_0 . Soient donc deux réels positifs x_0 et x_1 . Nous allons établir l'inégalité:

$$(2.31) \quad \forall y \geq 0, \quad \frac{1}{\sqrt{x_0}} v^*\left(x_0; x_0 + \frac{y}{\sqrt{x_0}}\right) \geq \frac{1}{\sqrt{x_1}} v^*\left(x_1; x_1 + \frac{y}{\sqrt{x_1}}\right).$$

Notons

$$(2.32) \quad \mu = \sqrt{\frac{x_1}{x_0}}$$

et, pour $x \geq x_1$,

$$(2.33) \quad v(x) = \mu v^*(x_0; x_0 + \mu(x - x_1))$$

μ est supérieur à 1, et la fonction v vérifie

$$v(x_1) = v^*(x_1; x_1),$$

$$0 \leq v(x) \leq \sqrt{\frac{x}{3}}, \quad x \geq x_1,$$

$$-v'' + xv - v^3 = (1 - \mu^3)(x - x_1)v(x) \geq 0, \quad x \geq x_1.$$

v est donc une sur-solution pour le problème de minimisation \mathcal{M}_{x_1} , et

$$\forall x \geq x_1, \quad v(x) \geq v^*(x_1; x);$$

donc,

$$\forall y \geq 0, \quad v\left(x_1 + \frac{y}{\sqrt{x_1}}\right) \geq v^*\left(x_1; x_1 + \frac{y}{\sqrt{x_1}}\right).$$

L'inégalité (2.31) est établie.

2. Montrons maintenant que, pour tout x_0 , la fonction w_{x_0} est bornée par $V(1/\sqrt{3}, -\frac{1}{3}\sqrt{\frac{5}{2}}; \cdot)$. Il suffit pour cela de prouver que la fonction φ définie sur $[x_0, +\infty[$ par

$$\varphi(x) = \sqrt{x_0} V\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{3}\sqrt{\frac{5}{2}}; \sqrt{x_0}(x - x_0)\right)$$

est une sous-solution pour le problème de minimisation \mathcal{M}_{x_0} , ce qui se vérifie immédiatement.

La famille des w_{x_0} est une famille croissante de fonctions monotones, uniformément majorée sur $[0, +\infty[$; elle converge donc presque partout. Pour assurer la convergence uniforme, il suffit de vérifier que $w'_{x_0}(x)$ est uniformément bornée sur $[0, +\infty[$. Or:

$$\forall x \geq 0, \quad 0 \geq w'_{x_0}(x) \geq w'_{x_0}(0) = \frac{\gamma^*(x_0)}{x_0}$$

et d'après le lemme 2.4,

$$\frac{\gamma^*(x_0)}{x_0} \geq -\frac{1}{\sqrt{3}} \left(1 + \frac{1}{4} x_0^{-3/2}\right) \geq C \quad \text{pour } x_0 \text{ assez grand.}$$

La famille w_{x_0} converge donc uniformément vers une fonction continue w .

3. Il nous reste à prouver que la limite de w_{x_0} est $V(1/\sqrt{3}, -\frac{1}{3}\sqrt{\frac{5}{2}}; \cdot)$. Rappelons d'abord que, d'après le théorème 1.1, v est donnée explicitement par

$$V\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{3}\sqrt{\frac{5}{2}}; y\right) = 2\sqrt{2} \frac{e^{y+X}}{1+e^{(y+X)}}$$

où X est déterminé par

$$e^X = \sqrt{5} + \sqrt{6},$$

d'où

$$\forall y \geq 0, \quad V\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{3}\sqrt{\frac{5}{2}}; y\right) < \lambda e^{-y},$$

et puisque v est un majorant de w_{x_0}

$$\forall x_0 > 0, \forall y \geq 0, \quad w_{x_0}(y) \leq \lambda y e^{-y} \leq C.$$

Nous avons ainsi tous les éléments pour passer à la limite dans l'équation

$$-w'' + \left(1 + \frac{y}{x_0^{3/2}}\right)w - w^3 = 0, \quad y \geq 0.$$

La limite w de w_{x_0} vérifie donc

$$\begin{aligned} -w'' + w - w^3 &= 0, \\ w(0) &= \frac{1}{\sqrt{3}}, \quad w(y) \rightarrow 0 \text{ quand } y \rightarrow +\infty, \\ w'(0) &< 0, \end{aligned}$$

et w est bien égale à $V(1/\sqrt{3}, \frac{1}{3}\sqrt{\frac{5}{2}}; \cdot)$. En particulier la fonction $x_0 \rightarrow \gamma^*(x_0)/x_0$ tend vers $-\frac{1}{3}\sqrt{\frac{5}{2}}$ lorsque x_0 tend vers $+\infty$.

La majoration ii) du lemme provient de la majoration établie plus haut:

$$\forall x_0 > 0, \forall y \geq 0, \quad w_{x_0}(y) \leq \lambda e^{-y}.$$

Ces propriétés asymptotiques étant établies, nous poursuivons notre étude en prolongeant les fonctions $v^*(x_0; \cdot)$ sur $[0, x_0]$.

2.1.4. Description des solutions de \mathcal{Q}_R^+ . Nous définissons un problème de Cauchy sur $[0, x_0]$ (en renversant le sens des x), par:

$$(2.34) \quad -v'' + xv - v^3 = 0, \quad 0 \leq x \leq x_0,$$

$$(2.35) \quad \begin{aligned} v(x_0) &= \sqrt{\frac{x_0}{3}}, \\ v'(x_0) &= \gamma^*(x_0). \end{aligned}$$

L'existence locale d'une solution à ce problème provient simplement des théorèmes usuels d'équations différentielles. L'existence globale sera assurée par des estimations à priori.

LEMME 2.7. *On a pour une solution v de (2.34), (2.35) les estimations à priori:*

$$(2.36) \quad \|v\|_{L^\infty([0, x_0])} \leq \varphi(x_0)$$

$$(2.37) \quad \|v'\|_{L^\infty([0, x_0])} \leq \psi(x_0)$$

où $\varphi(x_0)$ et $\psi(x_0)$ sont données par:

$$(2.38) \quad \varphi^2(x_0) = x_0 + \left(x_0^2 + 2 \left(\gamma^{*2}(x_0) - \frac{5x_0^2}{18} \right) \right)^{1/2},$$

$$(2.39) \quad \psi^2(x_0) = 2x_0\varphi^2(x_0) + \gamma^{*2}(x_0) - \frac{5x_0^2}{18}.$$

Les estimations ne sont pas uniformes en x_0 , car $\varphi(x_0)$ et $\psi(x_0)$ tendent vers l'infini avec x_0 .

Démonstration. Les estimations seront établies en deux étapes. Nous montrerons d'abord que la suite des extrema locaux est croissante, puis nous majorerons le dernier extremum local, c'est-à-dire celui qui est atteint le plus près de x_0 .

Rappelons d'abord l'estimation d'énergie:

$$(2.40) \quad \frac{d}{dx} \left(v'^2 - xv^2 + \frac{v^4}{2} \right) = -v^2 \quad \text{sur } [0, x_0].$$

La fonction

$$x \rightarrow v'^2 - xv^2 + \frac{v^4}{2}$$

est décroissante. Puisque v est le prolongement de $v^*(x_0, \cdot)$ elle est égale en x_0 à $(\gamma^*(x_0))^2 - 5x_0^2/18$ qui est positif, et donc

$$(2.41) \quad \forall x \in [0, x_0], \quad v'^2 - xv^2 + \frac{v^4}{2} \geq \gamma^{*2}(x_0) - \frac{5x_0^2}{18}.$$

En particulier, en un point où la dérivée s'annule, nous obtenons:

$$(2.42) \quad \forall x \in [0, x_0], \quad v'(x) = 0 \Rightarrow v^2 \geq 2x.$$

Montrons le résultat suivant: *si deux extrema locaux successifs sont atteints en x_1 et x_2 , $0 \leq x_1 < x_2 < x_0$, alors $|v(x_1)| < |v(x_2)|$.*

Nous raisonnerons par l'absurde: soient x_1 et x_2 deux points tels que

$$0 < x_1 < x_2 < x_0, \quad |v(x_1)| \geq |v(x_2)|.$$

Nous sommes par exemple dans le cas de la figure 16.

Par commodité, nous noterons

$$v_1 = v(x_1), \quad v_2 = v(x_2).$$

Nous intégrons l'égalité d'énergie (2.40) entre x_1 et x_2 . Puisque v' s'annule en x_1 et x_2 , nous avons:

$$-x_1 v_1^2 + \frac{v_1^4}{2} - \left(-x_2 v_2^2 + \frac{v_2^4}{2} \right) = \int_{x_1}^{x_2} v^2(x) dx.$$

Par hypothèse, nous pouvons majorer v sur $[x_1, x_2]$ par v_1^2 . Après simplification, nous obtenons:

$$\frac{v_1^2 + v_2^2}{2} \leq x_2.$$

Mais d'autre part, d'après (2.42),

$$\frac{v_1^2 + v_2^2}{2} \geq v_2^2 \geq 2x_2,$$

ce qui apporte une contradiction.

Le cas où un extremum local est atteint en zéro se traite de même.

Il nous reste à établir les estimations sur l'extremum le plus proche de x_0 . Comme pour la démonstration précédente, deux situations peuvent se présenter: l'extremum est atteint, soit en 0, soit en $x_1 > 0$ (voir figure 17).

Nous traitons le premier cas, le deuxième se résout de même. Nous intégrons l'égalité d'énergie entre 0 et x_0 :

$$v^2 + \frac{v_0^4}{2} - \left(\gamma^{*2}(x_0) - \frac{5x_0^2}{18} \right) = \int_0^{x_0} v^2(x) dx.$$

Nous majorons v^2 sur $[0, x_0]$ par v_0^2 et nous obtenons

$$\frac{v_0^4}{2} - x_0 v_0^2 - \left(\gamma^{*2}(x_0) - \frac{5x_0^2}{18} \right) \leq 0,$$

ce qui n'est réalisé que si

$$v_0^2 \leq x_0 + \left(x_0^2 + \left(\gamma^{*2}(x_0) - \frac{5x_0^2}{18} \right) \right)^{1/2}$$

ce qui constitue l'estimation (2.36).

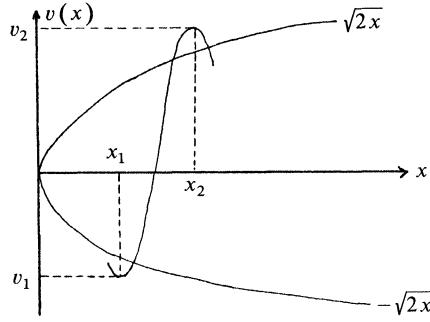


FIG. 16

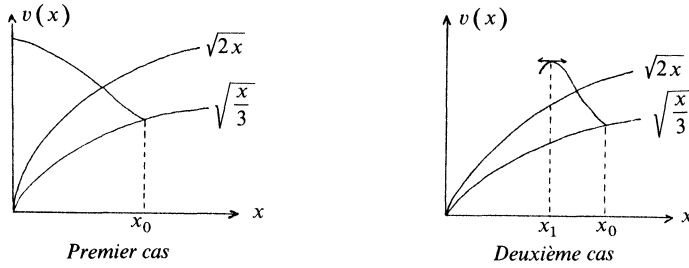


FIG. 17

Pour établir l'estimation (2.37), il suffit de remarquer que

$$\forall x \in [0, x_0], \quad 0 \leq v'^2 - xv^2 + \frac{v^4}{2} \leq v_0'^2 + \frac{v_0^4}{2}$$

et

$$v_0'^2 + \frac{v_0^4}{2} \leq \gamma^{*2}(x_0) - \frac{5x_0^2}{18} + x_0\varphi^2(x_0).$$

Nous avons ainsi:

$$\forall x \in [0, x_0], \quad v'^2 \leq 2x_0\varphi^2(x_0) + \gamma^{*2}(x_0) - \frac{5x_0^2}{18} = \psi^2(x_0).$$

Nous avons ainsi établi les estimations L^∞ sur u et u' .

Le lemme 2.7 nous permet donc de prolonger $v^*(x_0; \cdot)$ sur toute la droite \mathbb{R}_+ . En particulier, nous pouvons définir sa valeur en zéro ainsi que celle de sa dérivée, et donc une application de \mathbb{R}_+ dans \mathbb{R}^2 par

$$(2.43) \quad \sigma(x_0) = \left(v^*(x_0; 0), \frac{dv^*}{dx}(x_0; 0) \right).$$

Nous noterons \mathcal{S} l'image de \mathbb{R}_+ par σ :

$$(2.44) \quad \mathcal{S} = \left\{ (v_0, v'_0) \in \mathbb{R}^2, \exists x_0 \in \mathbb{R}_+, (v_0, v'_0) = \sigma(x_0) \right\}.$$

Les solutions de \mathcal{Q}_R^+ sont les solutions de l'équation différentielle dont les valeurs initiales appartiennent à \mathcal{S} .

THÉORÈME 2.2. *Caractérisation des solutions de \mathcal{Q}_R^+ . L'ensemble des solutions de \mathcal{Q}_R^+ est l'ensemble des $v^*(x_0; \cdot)$ et $-v^*(x_0; \cdot)$ lorsque x_0 décrit \mathbb{R}_+ .*

Il ne nous reste plus qu'à relier les caractérisations des solutions des problèmes \mathcal{Q}_c^- et \mathcal{Q}_R^+ .

2.1.5. Le système d'équations non linéaires vérifié par v_0 et v'_0 . Comme pour le problème $\mathcal{P}_{\alpha,p}$, nous pouvons établir une équivalence entre les problèmes réel et complexe sur \mathbb{R}_+ :

LEMME 2.8. *Equivalence entre \mathcal{Q}_c^+ et \mathcal{Q}_R^+ . La fonction u à valeurs complexes est solution de \mathcal{Q}_c^+ si et seulement si il existe un nombre complexe z_0 et une fonction réelle v tels que*

$$(2.45) \quad u = \frac{z_0}{\sqrt{p}} v, \quad |z_0|=1, \quad v \text{ solution de } \mathcal{Q}_R^+.$$

La démonstration est pratiquement la même que dans le lemme 1.2. Ce qui tient lieu ici d'énergie est la fonction

$$x \rightarrow |u'|^2 - x|u|^2 + \frac{p}{2}|u|^4$$

qui est décroissante, ce qui permet d'affirmer que u' tend vers zéro lorsque x tend vers $+\infty$.

Notons $E_{\alpha,p}$ la famille d'ellipses définie par:

$$(2.46) \quad E_{\alpha,p} = \left\{ (X, Y) \in \mathbb{R}^2, \left(Y - \frac{k}{2} X \right)^2 + \frac{3}{4} k^2 X^2 - \alpha^2 p = 0 \right\}$$

où k est le réel défini dans le lemme 2.1.

Nous pouvons maintenant décrire explicitement les solutions de $\mathcal{Q}_{\alpha,p}$.

PROPOSITION 2.1. *Caractérisation des solutions de $\mathcal{Q}_{\alpha,p}$. Le problème $\mathcal{Q}_{\alpha,p}$ admet une solution u si et seulement si il existe (v_0, v'_0) appartenant à $\mathcal{S} \cap E_{\alpha,p}$. Elle s'écrit alors:*

$$(2.47) \quad u(x) = \begin{cases} \frac{1}{\alpha p} (v'_0 + ke^{-2i\pi/3} v_0) v^*(x_0; \cdot), & x \geq 0, \\ \frac{1}{\alpha p} v_0 (v'_0 + ke^{-2i\pi/3} v_0) \frac{\text{Ai}(xe^{2i\pi/3})}{\text{Ai}(0)}, & x \leq 0, \end{cases}$$

où x_0 est tel que

$$(2.48) \quad v_0 = v^*(x_0; 0), \quad v'_0 = \frac{d}{dx} v^*(x_0; 0).$$

Démonstration. Soit u une solution de $\mathcal{Q}_{\alpha,p}$. D'après le lemme 2.8, u peut s'exprimer sur \mathbb{R}_+ à partir des solutions de \mathcal{Q}_R^+ , et donc

$$(2.49) \quad \exists x_0 \in \mathbb{R}_+, \exists z_0 \in \mathbb{C}, \quad u = \frac{z_0}{\sqrt{p}} v^*(x_0; \cdot), \quad |z_0|=1.$$

Nous utilisons maintenant la caractérisation des solutions de \mathcal{Q}_c^- donnée par le lemme 2.1, et les conditions de transmission

$$\begin{aligned} u'(0_-) + ke^{2i\pi/3} u(0_-) &= 0, \\ u(0_-) &= u(0_+), \\ u'(0_-) &= u'(0_+) - \alpha. \end{aligned}$$

Ce système se traduit par

$$(2.50) \quad \frac{z_0}{\sqrt{p}} \left(\frac{dv^*}{dx}(x_0; 0) + ke^{2i\pi/3}v^*(x_0; 0) \right) = \alpha.$$

Notons

$$v_0 = v^*(x_0; 0), \quad v'_0 = \frac{dv^*}{dx}(x_0; 0).$$

La relation (2.50) se réécrit sous la forme

$$\begin{aligned} |v'_0 + ke^{2i\pi/3}v_0|^2 &= \alpha^2 p, \\ z_0 &= \frac{1}{\alpha p} (v'_0 + ke^{-2i\pi/3}v_0). \end{aligned}$$

(v_0, v'_0) appartient donc à $\mathcal{S} \cap E_{\alpha, p}$, et u est donnée par l'expression (2.47).

Réciproquement si (v_0, v'_0) appartient à $\mathcal{S} \cap E_{\alpha, p}$, il leur correspond par σ^{-1} un réel x_0 positif tel que $(v_0, v'_0) = \sigma(x_0)$, et la fonction u définie par (2.47) est solution de $\mathcal{L}_{\alpha, p}$.

Nous sommes donc ramenés à étudier le nombre de solutions du problème

$$(2.50) \quad (v_0, v'_0) \in \mathcal{S} \cap E_{\alpha, p}$$

en fonction du paramètre $\alpha^2 p$. C'est un système non linéaire de deux relations à deux inconnues; l'une, $E_{\alpha, p}$, est connue exactement, et nous approcherons \mathcal{S} numériquement.

2.2. Etude numérique du système non linéaire reliant v_0 et v'_0 . Nous commençons par étudier l'approximation numérique de $v^*(x_0; \cdot)$. Un pas h de discrétisation étant donné, nous approchons $v^*(x_0; \cdot)$ par $v_h^*(x_0; \cdot)$ définie de la manière suivante:

Nous discrétisons l'équation différentielle $-v'' + xv - v^3 = 0$ sur $[0, +\infty[$ par un schéma aux différences finies centré.

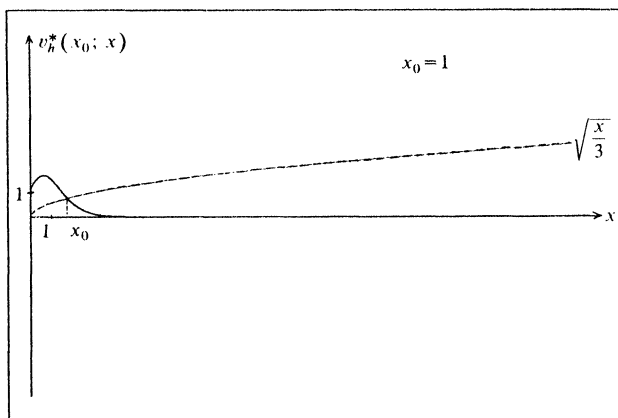
$$(2.51) \quad \begin{aligned} -\frac{v_{i+1} - 2v_i + v_{i-1}}{h} + x_i v_i - v_i^3 &= 0, \\ x_i &= x_0 + \varepsilon i h, \\ v_i &\sim v^*(x_0; x_i); \end{aligned}$$

ε prend la valeur $+1$ ou -1 selon qu'on se place sur $[0, x_0]$ ou $[x_0, +\infty[$.

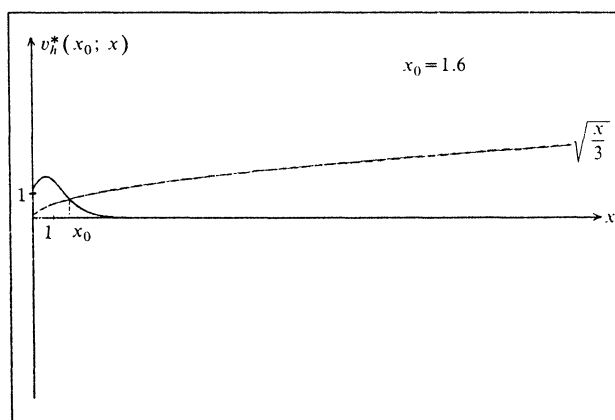
1. D'après le lemme 2.5, nous avons un encadrement de $\gamma^*(x_0)$ et de $v^*(x_0; \cdot)$ sur $[x_0, +\infty[$. Ces propriétés nous permettent de calculer une approximation $\gamma_h^*(x_0)$ de $\gamma^*(x_0)$ avec toute la précision souhaitée, et $v_h^*(x_0; \cdot)$ sur $[x_0, x_0 + A[$ à l'aide du schéma (2.51).

2. Nous calculons $v_h^*(x_0; \cdot)$ sur $[0, x_0]$ comme solution de l'équation (2.51), associée aux valeurs de Cauchy $(v^*(x_0; x_0), \gamma_h^*(x_0))$.

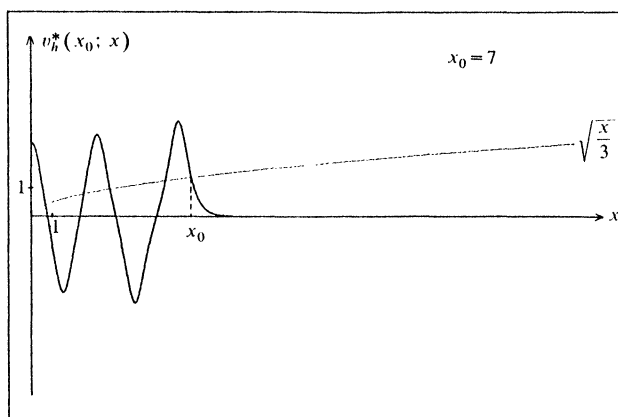
3. Nous traçons les courbes représentant $v_h^*(x_0; \cdot)$ pour différentes valeurs du paramètre x_0 (voir figure 18).



$x_0 = 1$. $v_h^*(x_0; \cdot)$ est strictement décroissante sur $[0, +\infty[$.

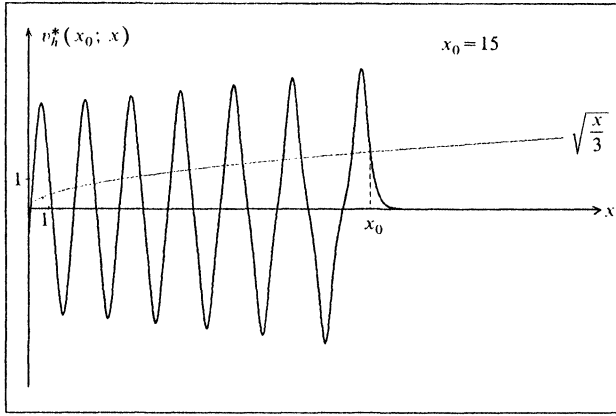


$x_0 = 1.6$. Naissance d'une oscillation.



$x_0 = 7$. $v_h^*(x_0; \cdot)$ a 2 oscillations.

FIG. 18. Représentation de la solution approchée de \mathcal{Q}_R^+ pour différentes valeurs de x_0 , pour un pas de discrétisation $h = \frac{1}{100}$.



$x_0 = 15$. Le nombre d'oscillations croît avec x_0 .

FIG. 18 (continued).

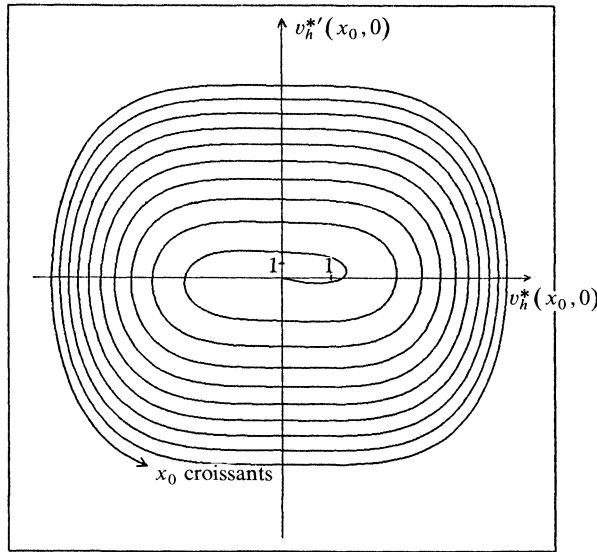


FIG. 19. Représentation de l'approximation \mathcal{S}_h de \mathcal{S} .

Tant que x_0 reste petit, v_h^* est décroissante sur $[0, x_0]$. Pour une valeur de x_0 proche de 1, il apparaît une oscillation. Puis, lorsque x_0 grandit, le nombre d'oscillations de $v_h^*(x_0; \cdot)$ sur $[0, x_0]$ grandit. Pour $x \geq x_0$, $v_h^*(x_0; \cdot)$ est décroissante et tend vers zéro de plus en plus rapidement lorsque x_0 croît. Tout ceci correspond bien aux résultats démontrés précédemment.

Nous représentons ci-dessous l'image par l'application σ_h du segment $[0, 20]$.

$$\mathcal{S}_h = \left\{ \left(v_h^*(x_0; 0), \frac{dv_h^*}{dx}(x_0; 0) \right); x_0 \in [0, 20] \right\};$$

$\sigma_h(x_0)$ a été calculé pour des valeurs de x_0 variant de 0 à 20 par pas de $\frac{1}{100}$ (voir figure 19).

La fonction $|s_h(x_0)|$ croît: \mathcal{S}_h est une spirale qui se déroule; cela est dû au fait que lorsque x_0 est grand, $v_h^*(x_0; \cdot)$ oscille de plus en plus sur $[0, x_0]$.

Nous n'avons pas d'estimation d'erreur sur \mathcal{S}_h , mais nous avons fait le calcul numérique pour différentes valeurs du pas de discrétisation: $h = \frac{1}{100}$, $h = \frac{1}{500}$, $h = \frac{1}{1000}$: les courbes sont strictement superposables: \mathcal{S}_h semble donc constituer, pour x_0 variant entre 0 et 20, une bonne approximation de \mathcal{S} .

Par ailleurs nous n'avons pas pu établir le comportement asymptotique de $\mathcal{S}(x_0)$: la nécessité de prendre un pas de plus en plus petit augmente notablement le volume des calculs et en limite la fiabilité: nous ne savons donc pas s'il existe un cycle limite ou si, au contraire, $|\sigma_h(x_0)|$ tend vers l'infini avec x_0 .

Revenons maintenant au nombre de solutions du problème $\mathcal{Q}_{\alpha,p}$. Il est donné, rappelons le, par le nombre d'éléments (v_0, v'_0) dans l'intersection de \mathcal{S} et $E_{\alpha,p}$. Dans la mesure où \mathcal{S}_h est une approximation de \mathcal{S} , il est donné par le nombre d'éléments dans $\mathcal{S}_h \cap E_{\alpha,p}$. Nous avons représenté ci-dessous \mathcal{S}_h et les ellipses $E_{\alpha,p}$ pour des valeurs du paramètre $\alpha^2 p$ croissant entre 1 et 5 (voir figure 20).

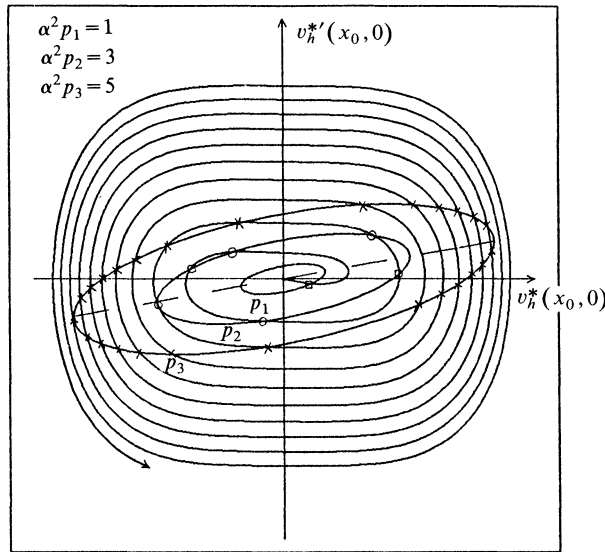


FIG. 20. Représentation de $\mathcal{S}_h \cap E_{\alpha,p}$ pour $\alpha^2 p = 1, 3, 5$.

Lorsque $\alpha^2 p$ varie, il y a toujours au moins un élément dans $\mathcal{S}_h \cap E_{\alpha,p}$. Plus $\alpha^2 p$ est grand, plus il y a d'éléments dans l'intersection. Par contre nous ne savons pas s'il existe une valeur limite de $\alpha^2 p$ au-dessus de laquelle $\mathcal{S}_h \cap E_{\alpha,p}$ contient une infinité d'éléments.

Rappelons que nous avons pris toutes les précautions pour que \mathcal{S}_h soit une "bonne" approximation de \mathcal{S} . Dans cette mesure, il semble que:

Le problème $\mathcal{Q}_{\alpha,p}$ admet toujours au moins une solution. Lorsque $p\alpha^2$ grandit, le nombre des solutions croît comme le montre la figure 14. L'ensemble des solutions peut être paramétré par $\{x_i\}_{i=1,I}$ et plus x_i est grand, plus la solution associée oscille.

BIBLIOGRAPHIE

[1] M. ABRAMOWITZ ET I. A. STEGUN, *Handbook of Mathematical Functions*, Dover, New York, 1970.
 [2] J. C. ADAM, A. GOURDIN-SERVENIERE ET G. LAVAL, *Efficiency of resonant absorption of electromagnetic waves in an inhomogeneous plasma*, Rapport du Centre de Physique Théorique de l'Ecole Polytechnique, 1981.

- [3] V. ARNOLD, *Equations différentielles ordinaires*, Ed. MIR, Moscou, 1974.
- [4] H. BERESTYCKI ET P. L. LIONS, *Non linear scalar fields equations I*, Université Paris VI, Rapport interne N° 80 020, 1980.
- [5] T. CAZENAVE, *Stabilité et instabilité des états stationnaires dans les équations de Schrödinger non linéaires*, Université Paris VI, Rapport interne N° 82008, 1982.
- [6] J. GINIBRE ET G. VELO, *On a class of non linear Schrödinger equations, I et II*, J. Funct. Anal., 32 (1979), pp. 1–71.
- [7] R. T. GLASSEY, *On the blowing-up of solutions to the Cauchy problem for non linear Schrödinger equations*, J. Math. Phys., 18 (1977), pp. 1794–1797.
- [8] G. J. MORALES ET Y. C. LEE, *Generation of density cavities and localized electric fields in a non uniform plasma*, Phys. Fluids, 20 (1977), pp. 1135–1146.
- [9] V. E. ZAKHAROV ET A. B. SHABAT, *Exact theory of two-dimensional self-focusing and one-dimensional self-modulation of waves in non linear media*, Soviet Phys. JETP, 34 (January 1972).