Comptes rendus de l'Académie des sciences. Série 1, Mathématique

ANALYSE NUMÉRIQUE. — *Conditions aux limites artificielles pour les équations de Navier-Stokes incompressibles.* Note de **Laurence Halpern** et **Michelle Schatzman,** présentée par Jacques-Louis Lions.

Une famille de conditions aux limites artificielles pour les équations de Navier-Stokes incompressibles, lorsque la viscosité est faible, est décrite. Ces conditions aux limites sont locales en temps. On démontre que les problèmes de Cauchy associés sont bien posés et on établit des estimations d'erreur.

NUMERICAL ANALYSIS. — Artificial boundary conditions for the incompressible Navier-Stokes equations.

A sequence of artificial boundary conditions for the time-dependent incompressible Navier-Stokes equations with small viscosity is designed. These boundary conditions are local in time. The Cauchy problems are proved to be well-posed and error estimates with respect to the viscosity are given.

I. Introduction. — Dans un grand nombre d'applications (géophysique, météorologie, mécanique des fluides. . .) on est amené à calculer la solution d'une équation aux dérivées partielles dans un domaine non borné. Pour limiter le volume des calculs, et donc leur coût, il devient alors nécessaire de borner le domaine et d'imposer sur les frontières artificielles des conditions aux limites adaptées.

Ces « bonnes » conditions aux limites sont des approximations de la condition aux limites dite transparente, c'est-à-dire telle que la solution du problème dans le domaine borné soit la restriction de la solution du problème originel. La relation transparente est pseudodifférentielle en temps et en espace, ce qui est difficile et coûteux à mettre en œuvre. On l'approche alors par des conditions locales en temps, appelées conditions aux limites absorbantes ou artificielles.

L'analyse mathématique approfondie de tels problèmes a été faite pour la première fois dans [3], pour les équations et systèmes hyperboliques. Par ailleurs divers auteurs ont proposé et calculé des conditions aux limites artificielles pour les équations d'Euler et de Navier-Stokes, stationnaires ou instationnaires, principalement dans le cas compressible ([1], [2], [4], [5], [8], [10], [11]).

Poursuivant l'étude faite dans [6] pour l'équation d'advection diffusion, on traite ici les équations de Navier-Stokes incompressibles. En linéarisant autour de la valeur **a** du champ de vitesse à l'infini on obtient l'équation :

$$\mathbf{u}_t+(\mathbf{a}\,.\,\nabla)\,\mathbf{u}-\nu\,\Delta\mathbf{u}+\nabla p=0 \tag{1 a}$$

$$\operatorname{div}\mathbf{u}=0 \tag{1 b}$$

où ∇ désigne l'opérateur gradient, Δ le laplacien. Le vecteur **a** est fonction uniquement des variables d'espace. On suppose que la première composante a_1 est strictement positive, si bien que la solution se propage essentiellement dans la direction $x \geqq 0$. On cherche de « bonnes » conditions aux limites sur une frontière artificielle Γ tracée en $x=0$.

Les résultats sont démontrés en dimension 2 mais on peut également établir les formulations en dimension 3 (*cf.* [7]).

II. La condition transparente. — Le problème de Cauchy est constitué des équations (1 *a*), (1 *b*) dans $\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}_+$ avec une donnée initiale **U**. Les données **a** et **U** sont à support dans un compact inclus dans $\mathbb{R}^2_-=\{(x,\,y)\in\mathbb{R}^2,\ x<0\}$, à divergence nulle. On suppose de plus que $a_1>0$ pour $x\geqq 0$.

0249-6291/87/03040083 $ 2.00 © Académie des Sciences

THÉORÈME 1. — *La condition aux limites transparente sur* Γ *s'écrit au moyen des transformées de Fourier partielles de* $\mathbf{u}$ *et* p *par rapport à* t *et* y :

$$\frac{\partial \hat{\mathbf{u}}}{\partial x}(0, \omega, \kappa) = \mathbf{B}(\omega, \kappa)\,\hat{\mathbf{u}}(\omega, \kappa) \tag{2a}$$

$$i\kappa \hat{p}(\omega, \kappa) = i\kappa\,\mathbf{b}(\omega, \kappa)\,.\,\hat{\mathbf{u}}(\omega, \kappa) \tag{2b}$$

où la matrice B *et le vecteur* $\mathbf{b}$ *sont définis par*

$$\mathrm{B} = \begin{bmatrix} 0 & -i\kappa \\ i\lambda\sigma & \lambda - |\kappa| \end{bmatrix} \tag{3a}$$

$$\mathbf{b} = [i\omega|\kappa|^{-1} + ia_2\sigma + \nu(|\kappa| - \lambda),\ i\sigma(\nu(\lambda - |\kappa|) - a_1)] \tag{3b}$$

ω *et* κ *sont les variables duales de* t *et* y, σ *et* λ *sont définies par :*

$$\sigma = \text{signe}\,(\kappa) \tag{4}$$

$$\lambda = (a_1 - \rho^{1/2})/2\nu; \qquad \rho = a_1^2 + 4\nu(\nu|\kappa|^2 + i\omega + i\kappa a_2); \quad \operatorname{Re}\rho^{1/2} > 0. \tag{5}$$

Pour établir que la solution $\mathbf{u}$ du problème de Cauchy dans tout l'espace vérifie (2) on utilise la transformation de Fourier en y et t dans le demi-espace $\mathbb{R}^2_+ = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2,\ x > 0\}$ et on élimine les modes exponentiellement croissants en x.

Le problème de Cauchy dans le demi-espace $\mathbb{R}^2_-$, avec la condition aux limites transparente (2) imposée sur le bord Γ s'écrit sous forme variationnelle. On pose :

$$\mathbf{W}(\mathbb{R}^2_-) = \{\mathbf{u} \in \mathbf{H}^1(\mathbb{R}^2_-),\ \operatorname{div}\mathbf{u} = 0\} \tag{6a}$$

$$\mathbf{H}(\mathbb{R}^2_-) = \{\mathbf{u} \in \mathbf{L}^2(\mathbb{R}^2_-),\ \operatorname{div}\mathbf{u} = 0\}. \tag{6b}$$

Par des techniques de Fourier on peut étendre les résultats usuels sur les espaces de trace en domaine borné ([12]) et définir sur $\mathbf{H}(\mathbb{R}^2_-)$ un produit scalaire équivalent au produit scalaire induit par $\mathbf{L}^2(\mathbb{R}^2_-)$:

$$s(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \int (\mathbf{u}, \mathbf{v})\,dx + \int |\kappa|^{-1}\,\hat{u}_1(\kappa)\,\bar{\hat{v}}_1(\kappa)\,d\kappa. \tag{7}$$

Soit E la forme bilinéaire sur $\mathbf{W}(\mathbb{R}^2_-)$ donnée par :

$$\mathrm{E}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \int_0^t \left[-s\left(\mathbf{u}, \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t}\right) + a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + \langle \mathrm{L}\mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle_\Gamma \right] dt \tag{8}$$

où la forme a est égale à :

$$a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \nu(\nabla\mathbf{u}, \nabla\mathbf{v}) + \frac{1}{2}[((\mathbf{a}\,.\,\nabla)\,\mathbf{u}, \mathbf{v}) - (\mathbf{u}, (\mathbf{a}\,.\,\nabla)\,\mathbf{v})] \tag{9}$$

et l'opérateur frontière L est défini par son symbole :

$$\mathrm{L}(\kappa, \omega, \nu) = \mathrm{M}(\kappa, \omega, \nu) + \frac{\rho^{1/2}}{2}\mathrm{N}(\kappa) \tag{10a}$$

$$\mathrm{M}(\kappa, \omega, \nu) = \begin{bmatrix} ia_2\sigma + \nu|\kappa| & -i\sigma a_1/2 \\ -i\sigma a_1/2 & \nu|\kappa| \end{bmatrix}, \qquad \mathrm{N}(\kappa) = \begin{bmatrix} 1 & -i\sigma \\ i\sigma & 1 \end{bmatrix}. \tag{10b}$$

Le problème s'écrit sous forme variationnelle :

(11) Trouver $\mathbf{u}$ dans $\mathrm{L}^2(\mathbb{R}; \mathbf{W}(\mathbb{R}^2_-))$ tel que $\forall\,\mathbf{v} \in \mathrm{H}^1(\mathbb{R}; \mathbf{W}(\mathbb{R}^2_-))$; $\mathrm{E}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = s(\mathbf{U}, \mathbf{v}(0))$

On démontre par une méthode de Galerkin, et avec des estimations précises en variable de Fourier le :

THÉORÈME 2. — *Pour toute donnée initiale* $\mathbf{U}$ *dans* $\mathbf{W}(\mathbb{R}^2_-)$, *le problème* (11) *admet une solution unique* $\mathbf{u}$ *qui vérifie de plus :*

$$s(\mathbf{u}(t),\ \mathbf{u}(t)) \leqq s(\mathbf{U},\ \mathbf{U}), \qquad \forall t \geqq 0 \tag{12}$$

$$\mathbf{u} \in \mathrm{H}^{1-\varepsilon}(\mathbb{R}_+;\ \mathbf{W}'(\mathbb{R}^2_-)), \qquad \forall \varepsilon > 0. \tag{13}$$

III. CONDITIONS AUX LIMITES APPROCHÉES. — La condition transparente donnée par (2) ou (11) est globale en temps et en espace et on l'approche par une condition locale en temps. En effet la présence des termes $|\kappa|$ et $\sigma = \text{signe}(\kappa)$ rend difficile une approximation locale en espace. On approche le noyau de l'opérateur frontière $\mathrm{L}(\kappa,\ \omega,\ \nu)$ par des polynômes ou des fractions rationnelles en ω et ν, en supposant que la viscosité ν est faible.

Une approximation de L s'obtient en approchant séparément M et ρ dans (10). Pour $n=0$ on écrira :

$$\mathrm{L}_0(\kappa,\ \omega,\ \nu) = \mathrm{M}(\kappa,\ \omega,\ 0) + \frac{a_1}{2}\mathrm{N}(\kappa) \tag{14}$$

et pour tout n non nul, on définit une famille d'opérateurs L_n par :

$$\mathrm{L}_n(\kappa,\ \omega,\ \nu) = \mathrm{M}(\kappa,\ \omega,\ \nu) + \frac{r_n}{2}\mathrm{N}(\kappa) \tag{15}$$

où r_n est une approximation de $\rho^{1/2}$ donnée par :

$$\left\{\begin{array}{l} r_n = a_1 - 2\nu\lambda_n \\ \lambda_{n+1} = \dfrac{-i\nu\omega'\lambda_n + i\omega' a_1 + \nu|\kappa|^2}{\nu\lambda_n - a_1 - i\nu\omega'}; \qquad \lambda_1 = -i\omega'; \quad \omega' = \dfrac{\omega + a_2\kappa}{a_1}. \end{array}\right. \tag{16}$$

Ce choix, déjà décrit dans [6], permet d'établir un résultat d'existence pour les problèmes approchés et une estimation d'erreur en fonction de ν. Posons :

$$\mathrm{E}_n(\mathbf{u},\ \mathbf{v}) = \mathrm{E}(\mathbf{u},\ \mathbf{v}) + \langle \mathrm{L}_n(\mathbf{u}),\ \mathbf{v} \rangle_\Gamma - \langle \mathrm{L}(\mathbf{u}),\ \mathbf{v} \rangle_\Gamma. \tag{17}$$

THÉORÈME 3. — *Si* $\mathbf{U}$ *appartient à* $\mathbf{H}(\mathbb{R}^2_-)$ *pour* $n \geqq 1$ ($\mathbf{W}(\mathbb{R}^2_-)$ *pour* $n=0$), *il existe un unique* $\mathbf{u}^n$ *dans* $\mathrm{H}^{1/2-\varepsilon}(\mathbb{R};\ \mathbf{H}(\mathbb{R}^2_-))$ *tel que pour tout* $\mathbf{v}$ *dans* $\mathrm{H}^1(\mathbb{R};\ \mathbf{W}(\mathbb{R}^2_-))$ *on ait :*

$$\mathrm{E}_n(\mathbf{u}^n,\ \mathbf{v}) = s(\mathbf{U},\ \mathbf{v}(0)). \tag{18}$$

THÉORÈME 4. — *Soit* $\mathbf{e}^n = \mathbf{u}^n - \mathbf{u}$, *où* $\mathbf{u}$ *est la solution de* (11) *et* $\mathbf{u}^n$ *la solution de* (18). *Si* $\mathbf{u}$ *est suffisamment régulière on a pour tout temps* T *strictement positif :*

$$\|e^n\|_{\mathrm{H}^{-2n}(0,\ \mathrm{T};\ \mathbf{W}(\mathbb{R}^2_-))} \leqq \mathrm{C}(\mathrm{T},\ \mathrm{U})\,\nu^{2n} \qquad \text{si} \quad n > 0. \tag{19}$$

Pour $n=0$ *l'exposant* $2n$ *doit être remplacé par* 1.

Les problèmes approchés associés aux deux premières conditions aux limites peuvent se mettre sous forme variationnelle :

$$\frac{d}{dt}\mathrm{A}_n(\mathbf{u}^n,\ \mathbf{v}) + \mathrm{B}_n(\mathbf{u}^n,\ \mathbf{v}) = 0 \tag{20}$$

$$\left\{\begin{array}{l} \mathrm{A}_0(\mathbf{v},\ \mathbf{w}) = \displaystyle\iint_{\mathbb{R}^2_-} \mathbf{v}\,.\,\mathbf{w} - 2\iint_{\Gamma\times\Gamma} \mathrm{Log}|y-y'|\,\mathbf{v}(y)\,.\,\mathbf{w}(y')\,dy\,dy' - 2\gamma\int_\Gamma \mathbf{v}\,.\,\mathbf{w}\,dy \\ \mathrm{B}_0(\mathbf{v},\ \mathbf{w}) = a(\mathbf{v},\ \mathbf{w}) - \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\iint_{\Gamma\times\Gamma} \frac{1}{y-y'}(\mathbf{v} \wedge \mathbf{a})(y)\,(\mathbf{w}\,.\,\mathbf{n})(y')\,dy\,dy' \end{array}\right. \tag{21 a}$$

$$(21\,b)\quad \left\{\begin{aligned} &\mathrm{A}_1(\mathbf{v},\mathbf{w})=\mathrm{A}_0(\mathbf{v},\mathbf{w})+\frac{\nu}{a_1}\int_\Gamma \mathbf{v}\,.\,\mathbf{w}\,dy-\frac{\nu}{\pi a_1}\iint_{\Gamma\times\Gamma}\frac{1}{y-y'}\mathbf{v}(y)\wedge\mathbf{w}(y')\,dy\,dy' \\ &\mathrm{B}_1(\mathbf{v},\mathbf{w})=\mathrm{B}_0(\mathbf{v},\mathbf{w})+\frac{a_2}{a_1}\nu\int_\Gamma\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial y}\,.\,\mathbf{w}\,dy \\ &\qquad+\frac{\nu}{\pi}\iint_{\Gamma\times\Gamma}\frac{1}{y-y'}\left[-\frac{a_2}{a_1}\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial y}(y)\wedge\mathbf{w}(y')+\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial y}(y)\,.\,\mathbf{w}(y')\right]dy\,dy' \end{aligned}\right.$$

où γ est la constante d'Euler.

On peut expliciter ces conditions aux limites approchées :

$$(22\,a)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{\partial u_1}{\partial t}+(\mathbf{a}\,.\,\nabla)\,u_1+\nu\,\mathrm{H}\frac{\partial^2 u_1}{\partial x\,\partial y}=\mathrm{H}\frac{\partial p}{\partial y} \\ &\frac{\partial u_2}{\partial x}=0 \end{aligned}\right\}\ \text{Première condition}$$

$$(22\,b)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{\partial p}{\partial x}=0 \\ &\left(\frac{\partial}{\partial t}+\mathbf{a}\,.\,\nabla\right)\left(\frac{\partial u_1}{\partial y}+\mathrm{H}\frac{\partial u_2}{\partial y}\right)=0 \end{aligned}\right\}\ \text{Deuxième condition}$$

où H est la transformée de Hilbert dans la direction y.

Remarquons que la première équation de $(22\,a)$ peut aussi s'écrire, en utilisant l'équation à l'intérieur,

$$(23)\qquad \frac{\partial u_1}{\partial t}+(\mathbf{a}\,.\,\nabla)\,u_1-\nu\frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2}+\frac{\partial p}{\partial x}=0$$

qui est comparable à l'approximation de « couche mince » de l'équation de Navier-Stokes [9].

Reçue le 8 décembre 1986.

Références bibliographiques

[1] S. Abarbanel et coll., Non Reflecting Boundary Conditions for Compressible Navier-Stokes Equations, *Congrès I.N.R.I.A.*, décembre 1985.

[2] A. Bayliss et E. Turkel, Far Field Boundary Conditions for Compressible Flows, *J. Comp. Phys.*, 48, 1982, p. 182-200.

[3] B. Engquist et A. Majda, Absorbing Boundary Conditions for the Numerical Simulation of Waves, *Math. Comp.*, 31, n° 139, 1977, p. 629-651.

[4] B. Engquist et A. Majda, Numerical Radiation Conditions for Unsteady Transonic Flow, *J. Comp. Phys.*, 40, 1981, p. 91-103.

[5] L. Ferm et B. Gustafsson, A Down-Stream Procedure for the Euler Equations, *Comp. and Fluids*, 10, n° 4, 1982, p. 261-276.

[6] L. Halpern, Artificial Boundary Conditions for the Advection Diffusion Equation, *Math. Comp.*, 46, 1986, p. 425-439.

[7] L. Halpern, Conditions aux limites artificielles pour l'équation de Navier-Stokes linéarisée, *Thèse d'État*, Université Paris-VI, 1986.

[8] G. W. Hedstrom, Non-Reflecting Boundary Conditions for Nonlinear Hyperbolic Systems, *J. Comp. Phys.*, 30, 1979, p. 222-238.

[9] M. Israeli et M. Rosenfeld, Marching Multigrid Solutions to the Parabolized Navier-Stokes (and Thin Layer) Equations, *5th G.A.M.M. Conf. Num. Fluid Dynamics*, Roma, 1983.

[10] C. Johnson et J.-C. Nedelec, On the Coupling of Integral and Finite Element Methods, *Math. Comp.*, 35, 1980, p. 1063-1081.

[11] D. Rudy et J. C. Strikwerda, A Non-Reflecting Outflow Boundary Condition for Subsonic Navier-Stokes Calculations, *J. Comp. Phys.*, 36, 1980, p. 55-71.

[12] R. Temam, *Navier-Stokes Equations*, North-Holland, 1977.

L. H. : *Centre de Mathématiques appliquées, École Polytechnique*, 91128 *Palaiseau Cedex;*
M. S. : *Département de Mathématiques, Université Claude-Bernard*, 69622 *Villeurbanne Cedex.*