La théorie du micromagnétisme. Modélisation et simulation du comportement des matériaux magnétiques.

Laurence Halpern* Stéphane Labbé†

1 Introduction

Les matériaux ferromagnétiques et ferrimagnétiques ont la particularité de présenter une aimantation rémanente : sous excitation magnétique extérieure nulle, l'aimantation totale d'un échantillon est non nulle. Ceci leur donne des propriétés importantes trouvant des applications dans de nombreux secteurs d'activité industrielle. On citera en particulier quatre domaines d'application : la protection radar, le stockage des informations, la gestion de l'énergie et le matériel de télécommunications. L'utilisation des matériaux ferri et ferromagnétiques au sein de composites permet d'améliorer les propriétés d'absorption des revêtements de protection contre la détection radar mais aussi de limiter l'encombrement de tels systèmes. La connaissance des mécanismes de retournement de l'aimantation dans les particules magnétiques permet également d'augmenter les capacités de stockage des supports d'enregistrement et les vitesses de lecture et d'écriture des données. Enfin, l'optimisation de la forme ou de la composition de pièces magnétiques rend possible la miniaturisation des téléphones mobiles, augmente l'efficacité des radars ainsi que le rendement des transformateurs. Mais, au delà de l'amélioration des performances, l'enjeu de la modélisation des matériaux magnétiques réside dans la réduction des coûts de développement de nouveaux appareils. L'importance économique de ces matériaux est illustrée par le chiffre d'affaire annuel de l'ensemble des industries de ce secteur d'activité : de l'ordre de 60 milliards de dollars. Ce chiffre donne une idée de l'importance souvent ignorée des matériaux ferro et ferrimagnétiques et du besoin qu'éprouvent les industriels de comprendre et prévoir leur comportement.

2 Le modèle du micromagnétisme

2.1 Caractéristiques magnétiques des matériaux considérés

De manière générale, la théorie du micromagnétisme est utilisée pour modéliser des particules ferromagnétiques de petite taille (de l'ordre du micromètre et moins) comme les paillettes des matrices d'enregistrement magnétique ou certaines poudres contenues dans des composites magnétiques absorbants. On se place également dans le domaine des hyperfréquences (entre 10 et 100 GHz), plage de longueur d'onde exploitée par les radars.

Cette théorie, introduite par W.F. Brown dans les années 40, a pour but d'expliquer le comportement non linéaire de certains matériaux magnétiques. L'approche micromagnétique est tout d'abord énergétique. Le principe en est d'identifier les principaux phénomènes intervenant dans la configuration de l'aimantation au sein d'un échantillon et de leur associer une énergie. Alors, les positions d'équilibre sont les minima de l'énergie totale. Mais il est également possible d'utiliser un modèle dynamique, décrivant l'évolution de l'aimantation au cours du temps et reposant sur l'utilisation d'un système

*Université Paris XIII, LAGA, Institut Galilée, 93430 Villetaneuse, France, halpern@math.univ-paris13.fr.

†Université Paris XI, Laboratoire de Mathématique, Bat. 425, 91405 Orsay, France, stephane.labbe@math.u-psud.fr.

introduit par L.D. Landau et E.M. Lifschitz en 1935 [46]. Dans cette approche les positions d'équilibre sont les états relaxés du système.
De manière générale, dans un milieu magnétique, le champ électromagnétique **B**, l'excitation magnétique **H** et l'aimantation **M** sont liés par l'une des équations de Maxwell (dans le système des unités internationales que l'on utilisera systématiquement par la suite)

$$\mathbf{B} = \mu_0(\mathbf{H} + \mathbf{M}), \tag{1}$$

où μ_0 est la perméabilité du vide. Le comportement de l'aimantation dépend alors de la nature des matériaux. Dans certains matériaux, la relation entre **H** et **M** est linéaire, $\mathbf{M} = \chi\ \mathbf{H}$, ce qui permet d'écrire en utilisant (1) $\mathbf{B} = \mu_0(1+\chi)\mathbf{H} = \mu_0\mu_r\mathbf{H} = \mu\mathbf{H}$. χ est appelée susceptibilité magnétique du matériau, μ_r sa perméabilité relative et μ sa perméabilité. Les matériaux obéissant à ce type de loi sont appelés diamagnétiques (pour $\mu_r > 1$) ou paramagnétiques (pour $0 < \mu_r < 1$) ; on peut trouver des matériaux de ce type dans les isolants.
Pour les matériaux ferromagnétiques et ferrimagnétiques, il en va tout à fait différemment. La relation entre le champ magnétique et l'aimantation devient non linéaire : sous excitation magnétique extérieure nulle, l'aimantation totale d'un échantillon est non nulle, ce sont des aimants permanents. Cette aimantation résiduelle est appelée aimantation rémanente. Son comportement est très complexe et pose de sérieux problèmes de modélisation. L'un des phénomènes traduisant cette complexité est celui de l'hystérésis qui correspond à la sensibilité de l'aimantation rémanente à l'historique des traitements magnétiques, c'est à dire à la façon dont on a fait évoluer le champ extérieur dans lequel baigne le matériau. Ce phénomène peut être mis en évidence grâce au cycle d'hystérésis (Fig. 1). Ce procédé consiste à appliquer un champ extérieur uniforme suffisamment fort pour que l'aimantation devienne uniforme, c'est à dire à saturer l'échantillon, puis à faire varier l'intensité de ce champ extérieur (à direction fixée) jusqu'à l'inverser. L'information recueillie pendant la manipulation est l'aimantation totale de l'échantillon traité. Comme on peut le remarquer sur le cycle d'hystérésis représenté figure 1, deux valeurs de l'aimantation se détachent : M_s et $-M_s$. La grandeur M_s est appelée aimantation à saturation et ne varie qu'en fonction de la température. L'aimantation à saturation s'annule

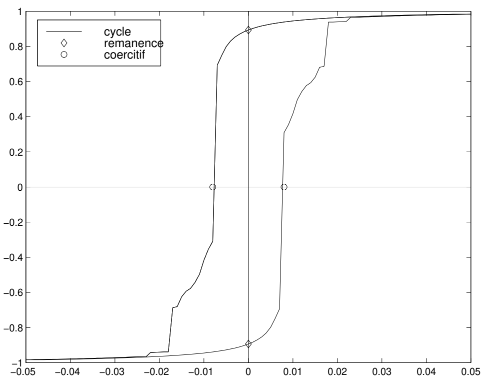

FIG. 1 – Exemple de courbe d'hystérésis. En abscisse l'intensité du champ magnétique extérieur (de direction constante), en ordonnée l'intégrale de l'aimantation sur le domaine .

au-dessus d'une température critique (température de Néel pour les ferrimagnétiques et de Curie pour les ferromagnétiques). Au-delà de cette température, le matériau adopte un comportement linéaire (paramagnétique ou diamagnétique) comme le montre la figure 2.

Ainsi, toutes les théories sur le comportement des ferro ou ferrimagnétiques ont pour objectif d'expliquer ces deux phénomènes clef : l'hystérésis et la dépendance en température de l'aimantation à saturation. Les premières conjectures furent émises par P. Weiss en 1907 [57]. Il postula qu'il existait des forces internes aux matériaux tendant à aligner l'aimantation et luttant contre le désordre thermique, créant ainsi des domaines dans lesquels l'aimantation serait constante. Ces idées furent le moteur de la théorie des domaines dont les fondateurs furent R. Becker [11], W. Döring [12], N.S. Akulov [3] et W. Heisenberg [31] (voir pour plus de précisions le livre de A. Aharoni [1] ou encore le livre de A. Hubert et R. Schäfer [32]). Mais, malgré des tentatives d'amélioration, comme l'introduction du

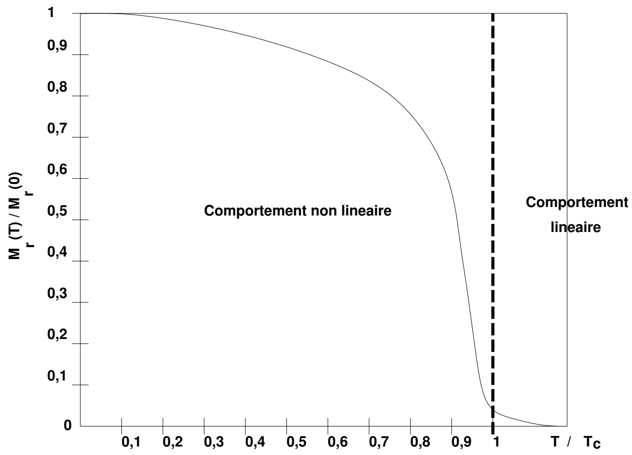

FIG. 2 – Variation de l'aimantation rémanente $\mathbf{M}_r(T)$ en fonction de la température sous champ extérieur nul.

concept de paroi, zone de retournement de l'aimantation entre deux domaines (calcul de l'énergie de parois par L.D. Landau et E.M. Lifschitz en 1935 [46]), cette théorie ne donnait pas des résultats quantitatifs suffisamment probants. Une grande avancée dans la résolution du problème fut alors effectuée dans les années 40 par W.F. Brown. Il introduisit une nouvelle approche : le micromagnétisme ("micro" pour étude microscopique des détails de paroi [16, 17]). Elle est basée sur la minimisation de l'énergie totale d'un échantillon magnétique. Cette énergie totale se compose de plusieurs contributions. Les plus couramment traitées sont : l'énergie de Zeemann ou énergie extérieure, l'énergie magnétostatique, l'énergie d'échange et l'énergie d'anisotropie. Cette théorie a permis de comprendre de nombreux phénomènes. L'un des plus célèbres calculs effectué avec cette approche est celui menant à la classification des parois en parois de Bloch et parois de Néel [1]. Il a été effectué en minimisant les trois énergies internes, échange, anisotropie et magnétostatique, dans le cas d'un film mince infini dans les directions x et y (Fig. 3). Le problème se trouve alors être de dimension 1, la minimisation permettant d'écrire une équation régissant la forme des parois.

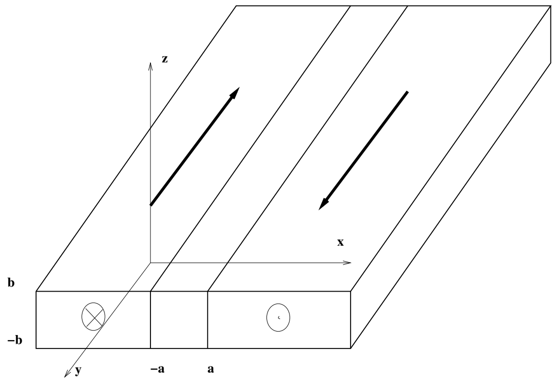

FIG. 3 – Géométrie des domaines dans le film mince.

En considérant que la composante m_z de l'aimantation dans la direction normale au film est nulle, et en utilisant le fait que la norme de l'aimantation est partout égale à un, on obtient :

$$m_x = \frac{q^2 \cos\phi}{q^2 + x^2}, \qquad m_y = \frac{q^2 \sin\phi}{q^2 + x^2},$$

où q est le paramètre donnant l'épaisseur de la paroi et ϕ un paramètre permettant de traiter avec une seule formule les parois de Bloch et de Néel (à l'origine ces deux cas furent étudiés séparément par H.D. Dietze et H. Thomas [24]). Une paroi de Bloch correspond à $\phi = \frac{\pi}{2}$ et une paroi de Néel à $\phi = 0$ (Fig. 4).

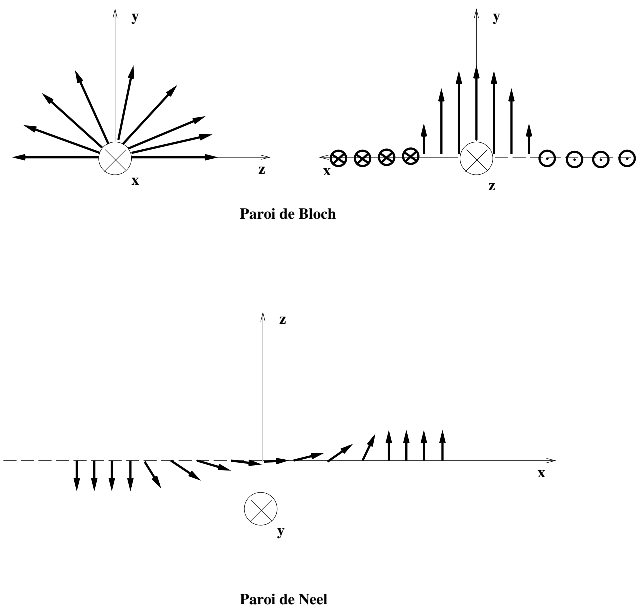

FIG. 4 – Parois de Bloch et de Néel

Ce calcul a permis une première validation de la théorie du micromagnétisme. Par la suite d'autres travaux en dimension 2 furent effectués pour des couches minces et comparés à des données expérimentales. Ces résultats étaient satisfaisants, mais un problème se posait encore : comment rendre compte de la forme des domaines magnétiques et valider les calculs pour un échantillon à trois dimensions ? En effet, s'il est possible d'effectuer des observations surfaciques des domaines, il est par contre pratiquement impossible d'en effectuer en volume.
Il faut donc calculer une grandeur permettant de faire le lien entre des configurations d'aimantation calculées et les données expérimentales : la susceptibilité hyperfréquence. Le principe est de faire "vibrer" la structure dans chaque direction de l'espace afin de capter la réponse des détails de la configuration et ainsi rendre compte de la structure des domaines et des parois. En d'autre termes, la susceptibilité hyperfréquence est la réponse énergétique d'une particule à des perturbations harmoniques du champ magnétique extérieur, dans les trois directions de l'espace, pour une gamme de fréquences. Le résultat obtenu est une matrice 3×3 pour chaque fréquence de la plage d'investigation : la matrice de susceptibilité ; la partie imaginaire des composantes de cette matrice rend compte des capacités d'absorption du matériau (voir par exemple figure 10).

Il est possible de déterminer analytiquement la susceptibilité magnétique pour des domaines infinis [15, 51, 56] et de mettre ainsi en évidence sa sensibilité aux changements de configuration d'aimantation. Par contre, pour les domaines de taille finie, le calcul analytique n'est en général pas possible. Il s'avère, en particulier, que les effets de bords ou de taille ont une influence non négligeable sur la réponse hyperfréquence. Ainsi, il est nécessaire de développer des codes de calcul de la susceptibilité hyperfréquence permettant de traiter des configurations d'aimantation et des domaines finis quelconques. Les calculs de susceptibilité hyperfréquence permettent, par exemple, de déterminer la susceptibilité de matériaux composites complexes [27].

Dans les années 80 le micromagnétisme a connu un regain d'intérêt avec l'augmentation de la puissance de calcul des ordinateurs et les premières simulations, effectuées par des physiciens (par exemple Schabes et Bertram [50] furent parmi les premiers à effectuer des calculs mettant en évidence la transition entre les configurations en fleur et les configurations en vortex dans les cubes en fonction de la taille du cube). Il a fallu attendre les années 90 et les supercalculateurs pour voir de vrais calculs tridimensionnels, stationnaires ou transitoires, dans des domaines réalistes.

Remarque 2.1 *Les matériaux ferro et ferrimagnétiques sont régis par les mêmes lois physiques. La différence provient de la structure cristalline des atomes les composant. Ainsi, les ferrimagnétiques sont*

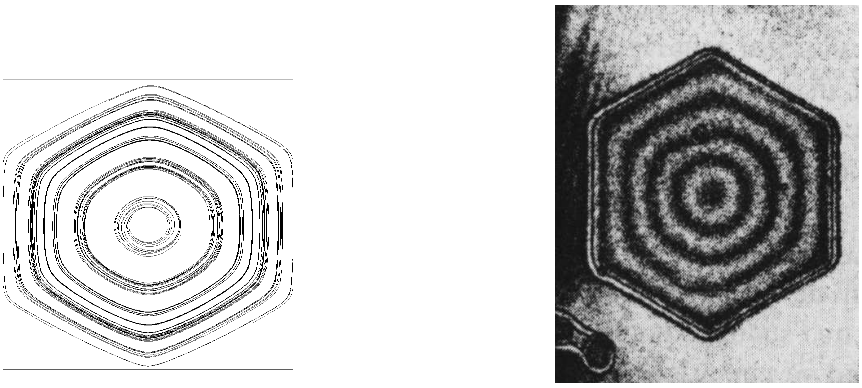

FIG. 5 – A gauche : simulation numérique de l'aimantion avec le code EMicroM [39]. A droite : visualisation par diffraction électronique de l'aimantation dans une plaquette hexagonale [52].

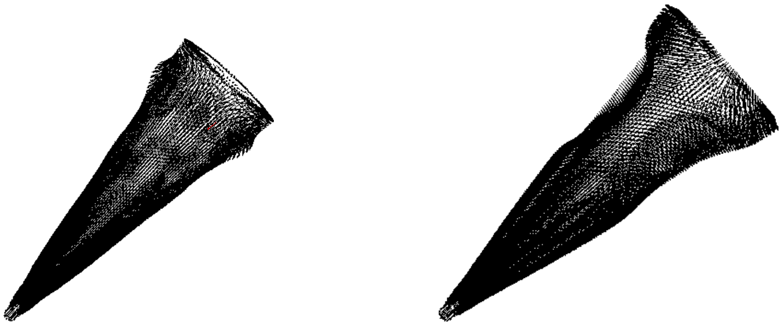

FIG. 6 – Visualisation du champ d'aimantation dans une point de microscope à force magnetique [5]

.

en général des oxydes ou céramiques isolantes, le plus connu étant l'hexaferrite de Baryum ($BaFe_{12}$ O_{19}), l'aimant commun. Les ferromagnétiques, pour leur part, sont des matériaux conducteurs composés de fer, nickel ou cobalt pur ou de leurs alliages. En micro-électronique, leurs propriétés sont souvent plus intéressantes que celles des ferrimagnétiques.

2.2 Les différentes échelles

Dans la suite, afin de ne pas accumuler les difficultés de modélisation, nous considèrerons des matériaux ferromagnétiques à température fixée dans le régime non linéaire, c'est-à-dire au-dessous de la température de Curie.
Le modèle du micromagnétisme dérive de l'équation microscopique du mouvement des spins : l'équation de Larmor. A l'échelle microscopique, les spins sont des vecteurs tournant autour du champ magnétique induit par l'ensemble des charges du système, on parle alors de précession : chaque spin est influencé par la présence des autres spins du système considéré. Cette influence est due tout d'abord aux interactions à courte distance, dites interactions d'échange, tendant à aligner les spins voisins ; on trouve également une interaction à longue distance modélisée par les équations de Maxwell microscopiques. C'est en se basant sur ces considérations que L.D. Landau et E.M. Lifschitz [46] ont construit un sytème à l'échelle mésoscopique comportant deux termes : un terme directement issu de la précession de Larmor et l'autre, heuristique, placé pour simuler la dissipation due à la perte d'information induite par le passage de l'échelle microscopique à l'échelle mésoscopique (où la moyennisation est effectuée sur des zones pouvant contenir jusqu'à une centaine d'atomes). A cette échelle, les équations de Maxwell microscopiques moyennées donnent, en première approximation pour une particule ferromagnétique de taille finie et pour un domaine de longueur d'onde raisonnable, le système de la magnétostatique.
A l'échelle macrocospique, on retrouve le comportement linéaire habituel de l'électromagnétisme reliant l'aimantation $\mathbf{M}$ à l'excitation magnétique $\mathbf{H}$ par le tenseur χ, éventuellement anisotrope et non constant sur le matériau, dépendant de la nature des matériaux ferromagnétiques considérés.

3 Les équations

On note $\mathbf{M}$ le champ d'aimantation, $\mathbf{H}$ l'excitation magnétique et $\mathbf{E}$ le champ électrique. Le matériau magnétique remplit un domaine borné Ω de $\mathbb{R}^3$. L'aimantation est nulle à l'extérieur de Ω.

3.1 Les diverses contributions

L'énergie de Zeemann

On note $\mathbf{H}_{ext}$ l'excitation magnétique extérieure. Ce champ n'est pas mesurable intrinsèquement, mais il est possible de mesurer son énergie, définie par

$$E_{ext}(\mathbf{M}) = -\mu_0 \int_\Omega \mathbf{H}_{ext} \cdot \mathbf{M} \; dX \tag{2}$$

Par exemple dans le cas du champ créé par un électroaimant, on définira son intensité à partir de la puissance électrique de l'électroaimant. Il faut retenir que le champ est extérieur si les changements de configuration d'aimantation n'ont aucune influence sur lui.

L'échange

L'échange traduit la tendance des spins voisins à s'aligner. Cette contribution est purement locale, elle ne dépend que des propriétés microscopiques du matériau. Ce phénomène se traduit à l'échelle macroscopique par un gradient (correspondant à une force de rappel élastique) ; la contribution énergétique s'écrit

$$E_e(\mathbf{M}) = A\frac{\mu_0}{2} \int_\Omega |\mathbf{grad}\ (\mathbf{M})|^2 \; dX, \tag{3}$$

où A est la constante d'échange.

L'anisotropie

L'anisotropie est une force interne due à la structure cristalline du matériau. L'énergie correspondante s'écrit au moyen d'une fonction ϕ paire et convexe, sous la forme générale

$$E_a(\mathbf{M}) = \frac{\mu_0}{2} \int_\Omega \phi(\mathbf{M}) \; dX. \tag{4}$$

La structure cristalline impose des directions privilégiées selon lesquelles l'aimantation aura tendance à s'aligner. Par exemple, pour une anisotropie uniaxiale (ce qui est le cas du cobalt par exemple), il existe une direction $\mathbf{u}$ privilégiée, appelée d'aimantation facile (avec $|\mathbf{u}| = 1$ en tout point de Ω) ; la contribution énergétique s'écrit :

$$E_a(\mathbf{M}) = K \; \frac{\mu_0}{2} \int_\Omega (|\mathbf{M}|^2 - (\mathbf{M} \cdot \mathbf{u})^2) \; dX, \tag{5}$$

où K est la constante d'anisotropie.

Dans le cas d'une anisotropie planaire, où $\mathbf{u}$ est le vecteur normal au plan, on a

$$E_a(\mathbf{M}) = K \; \frac{\mu_0}{2} \int_\Omega (\mathbf{M} \cdot \mathbf{u})^2 \; dX. \tag{6}$$

Enfin dans le cas des matériaux à anisotropie cubique (comme le fer α), il existe trois directions $\{u_i\}_{1\le i\le 3}$ qui minimisent l'énergie, c'est-à-dire telles que

$$\phi(\pm u_1) = \phi(\pm u_2) = \phi(\pm u_3) < \phi(\mathbf{M}) \text{ si } \mathbf{M} \notin \{\pm u_i\}_{1\le i\le 3}$$

Le modèle le plus simple s'écrit

$$E_a(\mathbf{M}) = K \; \frac{\mu_0}{2} \int_\Omega \sum_{i\neq j} (\mathbf{M} \cdot \mathbf{u}_i)^2 (\mathbf{M} \cdot \mathbf{u}_j)^2 \; dX. \tag{7}$$

Dans la suite, nous nous restreindrons au cas d'une anisotropie uniaxiale. Certains des résultats énoncés sont encore valables pour une anisotropie planaire ou cubique (l'existence de solutions principalement).

L'électromagnétisme

La contribution électromagnétique est construite à partir, par exemple, de l'excitation magnétique $\mathbf{H}_M$ et du champ électrique $\mathbf{E}$. Les équations vérifiées par ces champs sont les équations de Maxwell sur $\mathbb{R}^3$:

$$\begin{cases} \mathbf{rot}\ \mathbf{H}_M = \epsilon_0\epsilon_r \dfrac{\partial \mathbf{E}}{\partial T} + \sigma\ \mathbf{E}\ ; & \mathbf{div}\ (\mathbf{H}_M + \mathbf{M}) = 0, \\ \mathbf{rot}\ \mathbf{E} = -\mu_0 \dfrac{\partial}{\partial T}(\mathbf{M} + \mathbf{H}_M)\ ; & \mathbf{div}\ (\epsilon_r \mathbf{E}) = 0, \end{cases} \tag{8}$$

où ϵ_0 est la permittivité dans le vide, ϵ_r la permittivité relative du matériau magnétique ; ϵ_r est constant égal à 1 dans Ω^c et constant compris entre 0 et 1 dans Ω. La conductivité σ est constante dans Ω, nulle à l'extérieur de Ω. Nous avons éliminé l'excitation magnétique $\mathbf{D}$ et le champ magnétique $\mathbf{B}$ grâce aux lois constitutives $\mathbf{D} = \epsilon_0\epsilon_r\mathbf{E},\ \mathbf{B} = \mu_0(\mathbf{M} + \mathbf{H}_M)$. Le système est complété par des conditions initiales sur $\mathbf{E}, \mathbf{H}, \mathbf{M}$.

Remarque 3.1 *On considère ici que le matériau est conducteur (ce qui est le cas des matériaux ferromagnétiques) et qu'il n'y a pas d'accumulations de charges, par conséquent, la divergence de $\epsilon_r\mathbf{E}$ est nulle. De plus, le courant électrique est pris égal à $\sigma\mathbf{E}$ [47].*

On remplace souvent les équations de Maxwell (8) par le système de la magnétostatique sur $\mathbb{R}^3$, appelé encore système de Maxwell quasi-stationnaire [1, 17, 32]) :

$$\begin{cases} \mathbf{rot}\ \mathbf{H}_{QS} = 0, \\ \mathbf{div}\ (\mathbf{H}_{QS} + \mathbf{M}) = 0, \\ \mathbf{M} = 0 \text{ dans } \mathbb{R}^3 \backslash \Omega. \end{cases} \tag{9}$$

Sous certaines conditions sur les paramètres physiques du matériau et la taille de Ω, nous verrons en section 4 les limites de validité de cette approximation.

L'énergie électromagnétique à l'instant T est définie par sa densité :

$$\partial E_m(\mathbf{M}) \cdot \delta\mathbf{M} = -\mu_0 \int_\Omega \mathbf{H}(\mathbf{M}) \cdot \delta\mathbf{M}\ dX, \tag{10}$$

où $\mathbf{H}$ est donné suivant les cas par les équations de Maxwell complètes (8) ou par les équations quasi-stationnaires (9).

Grâce à la condition $\mathbf{div}\ (\mathbf{H}_{QS} + \mathbf{M}) = 0$, on peut écrire dans le cas quasi-stationnaire

$$\frac{d}{dt}\{E_m(\mathbf{M}) - \frac{1}{2}\mu_0 \int_{\mathbb{R}^3} |\mathbf{H}_{QS}|^2\ dX\} = 0, \tag{11}$$

et dans le cas dynamique l'équation

$$\frac{d}{dt}E_m(\mathbf{M}) = \frac{d}{dt}\ \{\int_{\mathbb{R}^3} [\frac{1}{2}\mu_0 \,|\mathbf{H}_M|^2 + \frac{1}{2}\epsilon_0\epsilon_r \,|\mathbf{E}|^2\,]\ dX\} + \sigma \int_{\mathbb{R}^3} |\mathbf{E}|^2 dX. \tag{12}$$

Remarque 3.2 *Les énergies sont définies à une constante près. En particulier on écrira (11) comme*

$$E_m(\mathbf{M}) = \frac{1}{2}\mu_0 \int_{\mathbb{R}^3} |\mathbf{H}_{QS}|^2\ dX.$$

3.2 L'approche énergétique

L'énergie totale du système est donnée par

$$E_{tot}(\mathbf{M}) = E_{ext} + E_e(\mathbf{M}) + E_a(\mathbf{M}) + E_m(\mathbf{M}). \tag{13}$$

Le champ magnétique total est défini par

$$\forall \delta\mathbf{M} \in \mathbb{L}^2(\mathbb{R}^3), \delta\mathbf{M} = 0 \text{ in } \Omega^C, \partial\mathcal{E}_{tot}(\mathbf{M}) \cdot \delta\mathbf{M} = -\mu_0 \int_\Omega \mathbf{H}_{tot}(\mathbf{M}) \cdot \delta\mathbf{M}\, dX, \tag{14}$$

ce qui s'interprète de la manière suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{H}_{tot}(\mathbf{M}) = \mathbf{H}_a(\mathbf{M}) + \mathbf{H}_e(\mathbf{M}) + \mathbf{H}(\mathbf{M}) + \mathbf{H}_{ext} \\ \dfrac{\partial \mathbf{M}}{\partial n} = 0 \text{ on } \partial\Omega \end{array} \right. \tag{15}$$

où les champs d'échange $\mathbf{H}_e$ et d'anisotropie $\mathbf{H}_a$ sont donnés par

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{H}_e(\mathbf{M}) = A \bigtriangleup \mathbf{M}, \\ \mathbf{H}_a(\mathbf{M}) = K \ ((\mathbf{u}.\mathbf{M})\mathbf{u} - \mathbf{M}) = -K\, \mathbf{u} \wedge (\mathbf{M} \wedge \mathbf{u}). \end{array} \right. \tag{16}$$

et $\mathbf{H}(\mathbf{M})$ est donné suivant les cas par les équations de Maxwell complètes (8) ou par les équations quasi-stationnaires (9).
Les états d'équilibre minimisent l'énergie totale E_{tot} de (13) sous la contrainte $|\mathbf{M}| = M_S$ presque partout dans Ω. Dans ces configurations, le champ d'aimantation $\mathbf{M}$ est presque partout parallèle à l'excitation magnétique : on a l'équation

$$\mathbf{M} \wedge \mathbf{H}_{tot} = \mathbf{0}. \tag{17}$$

3.3 L'approche dynamique

La seconde approche, introduite par L.D. Landau et E. Lifschitz [46] et "modernisée" par W.J.F. Brown [17], repose sur une équation dynamique décrivant l'évolution de l'aimantation. Cette équation, comme on l'a vu précédemment, est déduite heuristiquement à partir de l'équation microscopique de la précession de Larmor :

$$\left\{ \begin{array}{l} \dfrac{\partial \mathbf{M}}{\partial T} = -\gamma\mu_0(\mathbf{M} \wedge \mathbf{H}_{tot}(\mathbf{M}) + \dfrac{\alpha}{|\mathbf{M}|}\mathbf{M} \wedge (\mathbf{M} \wedge \mathbf{H}_{tot}(\mathbf{M}))), \\ \mathbf{M}(0, \cdot) = \mathbf{M}^0 \end{array} \right. \tag{18}$$

où γ est le facteur de précession de Larmor et α un facteur adimensionné de dissipation, strictement positif, avec la contrainte sur la donnée initiale

$$\mathbf{M}^0 \equiv 0 \text{ p.p. dans } \ \Omega^c, \ |\mathbf{M}^0| = M_s \text{ p.p. dans } \Omega.$$

On voit souvent une autre formulation de (18), appelée système de Landau-Lifschitz-Gilbert, qui est équivalent à la précédente sous certaines conditions de régularité, et qui s'écrit (en prenant le produit vectoriel de (18) avec $\mathbf{H}_{tot}(\mathbf{M})$) :

$$\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial T} - \frac{\alpha}{|\mathbf{M}|}\mathbf{M} \wedge \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial T} + \gamma\mu_0(1 + \alpha^2)\mathbf{M} \wedge \mathbf{H}_{tot}(\mathbf{M}) = 0 \tag{19}$$

4 Analyse mathématique du modèle

Il y a une analogie assez étroite entre les problèmes du micromagnétisme, et les problèmes induits par la modélisation des cristaux liquides. C'est pourquoi on retrouve de nombreux auteurs dans les deux domaines. Ainsi les intuitions et les techniques de démonstration en micromagnétisme sont issues de celles développées dans la théorie des applications harmoniques sur la sphère.

4.1 Modèle stationnaire

Le théorème d'existence de minimiseurs de l'énergie totale $E_{tot}(\mathbf{M})$ dans $\{\mathbf{M} \in H^1(\Omega), |\mathbf{M}| = M_S\}$ est énoncé dans [55]. La démonstration complète peut être trouvée dans [54] ou dans [30]. Remarquons que l'énergie est quadratique, bornée inférieurement par la semi-norme de $\mathbf{M}$ dans $H^1(\Omega)$, ce qui permet d'obtenir un résultat d'existence assez facilement. Par contre l'ensemble des contraintes n'est pas convexe, et le problème de l'unicité est encore un problème ouvert. Dans le cas du seul terme

d'échange (*i.e.* un laplacien) il existe un résultat de F. Alouges et A. Soyeur de non unicité, analogue à celui concernant les applications harmoniques sur la sphère [7].
L'équation d'Euler du problème de minimisation s'écrit

$$\frac{d}{ds}E_{tot}\left(\frac{\mathbf{M}+s\phi}{|\mathbf{M}+s\phi|}\right)=0$$

Un calcul simple [18] donne la forme

$$H_{tot}+(A|\nabla\mathbf{M}|^2+2(\mathbf{M},\mathbf{H}_{QS}))\mathbf{M}=0 \tag{20}$$

Ceci justifie la remarque faite en 3.2 : pour les états d'équilibre, l'excitation magnétique et l'aimantation sont parallèles.
L'étude de la régularité des états critiques (*i.e.* des solutions de l'équation d'Euler) est très complexe, car le champ démagnétisant donne lieu à un terme non local dans l'énergie. G. Carbou dans [18] établit des résultats analogues à ceux connus pour les applications harmoniques sur la sphère (voir références dans [18]) : essentiellement la régularité en dimension 2, la régularité locale en dimension 3 et le fait que les minimiseurs ont au plus des singularités isolées (voir aussi C. Bonjour [14]). Ce dernier point est également traité par R. Hardt et D. Kinderlehrer dans [30] en considérant les énergies magnétostatique et d'anisotropie comme de petites perturbations de l'énergie d'échange.

4.2 Modèle dynamique

Le problème naturel est celui du couplage entre l'équation de Landau-Lifschitz (18) et les équations de Maxwell (8), avec les contributions d'échange, d'anisotropie et de Zeemann. Pour ce problème on dispose d'un résultat d'existence faible par A. Visintin [55], reposant sur une méthode de Galerkin et des estimations *a priori*. L'unicité est encore un problème ouvert. Par contre on a des résultats d'existence locale et d'unicité pour des solutions régulières par G. Carbou et P. Fabrie [21].
Mentionnons également que pour limiter le volume des calculs, on souhaite utiliser le modèle "quasi-stationnaire" consistant à coupler l'équation de Landau-Lifschitz (18) avec l'approximation quasi-statique (9), en conservant les contributions d'échange, d'anisotropie et de Zeemann. On a alors un résultat d'existence et non unicité de solutions faibles en temps et en espace par F. Alouges et A. Soyeur [7] dans le cas du champ d'échange uniquement, étendu par S. Labbé [41].
Le lien entre solutions du problème transitoire et solutions stationnaires se fait intuitivement de la façon suivante. On se place dans le cadre d'un champ extérieur indépendant du temps. Soit $\mathbf{M}(t)$ une solution du système de Landau-Lifschitz. Il est facile de voir que l'opérateur qui à $\mathbf{M}$ associe l'excitation magnétique totale $H_{tot}(\mathbf{M})$ est linéaire autoadjoint de $(H^1(\Omega))^3$ dans $(L^2(\mathbb{R}^3))^3$. Un petit calcul montre alors que

$$\frac{d}{dt}E_{tot}(t)=-\frac{\alpha\gamma\mu_0}{M_S}\|\mathbf{H}\wedge\mathbf{M}\|^2_{(L^2(\Omega))^3}$$

si bien que les solutions asymptotiques de l'équation transitoire vérifient l'équation (17). Ce résultat est démontré par Carbou et Fabrie dans [20]. Les auteurs établissent d'abord un résultat d'existence faible pour le système de Landau-Lifschitz -Gilbert couplé avec les équations de Maxwell. Soit V l'ensemble ω-limite de $\mathbf{M}$, c'est-à-dire l'ensemble des $\mathbf{v}$ dans $(H^1(\Omega))^3$ qui sont limite faible d'une suite $\mathbf{M}(t_n)$. Alors cet ensemble est non vide, et ses éléments vérifient l'équation (17). Ainsi les minimiseurs de l'énergie sont dans certaines conditions limites du problème transitoire.
Citons pour finir une gamme de résultats hyperboliques, dans le cas où l'on néglige le terme d'échange : d'abord la propagation des ondes en dimension 1 par P. Joly et O. Vacus [36, 53, 35], et un résultat d'existence et unicité de solutions fortes pour le problème dynamique sur $\mathbb{R}^3$ par J.L. Joly, G. Metivier et J. Rauch [33, 34].

4.3 Limites de l'approximation quasi-stationnaire

Nous supposons ici le champ extérieur nul. Dans [20], G. Carbou et P. Fabrie considèrent les équations de Landau-Lifschitz-Gilbert (19) couplées avec les champs d'échange et d'anisotropie (16), et les équations de Maxwell (8). Ils montrent alors que si ϵ_0 et μ_0 tendent vers 0 de façon à ce que $\frac{\epsilon_0}{\mu_0}$ reste borné, la solution tend (modulo l'extraction d'une sous-suite) faiblement $*$ dans $L^\infty(\mathbb{R}_+;(H^1(\Omega))^3)$ vers une solution du modèle quasi-stationnaire où les équations de Landau-Lifschitz-Gilbert (19) sont couplées avec les champs d'échange et d'anisotropie (16), et les équations quasi-stationnaires (9).
Nous utilisons ici leur analyse de convergence, mais avant cela nous effectuons un adimensionnement pour mettre en évidence un petit paramètre. Pour les détails voir [29]. Pour d'autres développements asymptotiques et adimensionnements concernant les équations de Maxwell on pourra se reporter à [8, 23].
Notons $\bar{x}$ et $\bar{t}$ les distance et temps caractéristiques du problème. Nous effectuons le changement de variables $\mathbf{X} = \bar{x}\mathbf{x}$, $T = \bar{t}t$, et un changement d'échelle sur les inconnues du système. Nous définissons le petit paramètre $\eta = \frac{\bar{x}}{c\bar{t}}$, où c est la vitesse de la lumière. Dans notre contexte, la taille du matériau est petite par rapport aux longueurs d'ondes émises. Par homogénéité et linéarité, les champs d'échange et d'anisotropie sont multipliés par une constante, les équations de Landau et Lifschitz sont inchangées, et l'on obtient le système adimensionné dans $\omega = \Omega/\bar{x}$:

$$\left\{ \begin{array}{l} \dfrac{\partial \mathbf{m}}{\partial t} = -\mathbf{m} \wedge \mathbf{h}_{tot}(\mathbf{m}) - \alpha \mathbf{m} \wedge (\mathbf{m} \wedge \mathbf{h}_{tot}(\mathbf{m})), \\ \mathbf{m}(0,\cdot) = \mathbf{m}^0 \end{array} \right. \tag{21}$$

où

$$\mathbf{h}_{tot}(\mathbf{m}) = a \bigtriangleup \mathbf{m} \; - \; K\mathbf{u} \wedge (\mathbf{m} \wedge \mathbf{u}) + \mathbf{h}_M(\mathbf{m}). \tag{22}$$

et $\mathbf{h}_M$ est donné par les équations

$$\left\{ \begin{array}{ll} \mathbf{rot}\ \mathbf{h}_M = \eta^2 \epsilon_r \dfrac{\partial \mathbf{e}}{\partial t} + \eta\sigma \mathbf{e}\ ; & \mathbf{div}\ (\mathbf{h}_M + \mathbf{m}) = 0 \\ \mathbf{rot}\ \mathbf{e} = -\dfrac{\partial}{\partial t}(\mathbf{m} + \mathbf{h}_M)\ ; & \mathbf{div}\ (\epsilon_r \mathbf{e}) = 0 \end{array} \right. \tag{23}$$

avec les conditions initiales adaptées et la contrainte sur la donnée initiale.

$$\mathbf{m}^0 \equiv 0 \text{ p.p. dans } \; \Omega^c, |\mathbf{m}| = 1 \text{ p.p. dans } \omega. \tag{24}$$

Insérons dans les équations un développement formel des divers champs en puissance de η

$$\mathbf{m} = \sum_{i=0}^{\infty} \eta^i\ \mathbf{m}_i, \mathbf{e} = \sum_{i=0}^{\infty} \eta^i\ \mathbf{e}_i, \quad \mathbf{h}_M = \sum_{i=0}^{\infty} \eta^i\ \mathbf{h}_i \tag{25}$$

En écrivant formellement le premier terme nous retrouvons les équations de la magnétostatique,

$$\left\{ \begin{array}{ll} \mathbf{rot}\ \mathbf{h}_0 = 0\ ; & \mathbf{div}\ (\mathbf{h}_0 + \mathbf{m}_0) = 0, \\ \mathbf{rot}\ \mathbf{e}_0 = -\dfrac{\partial}{\partial t}(\mathbf{m}_0 + \mathbf{h}_0)\ ; & \mathbf{div}\ (\epsilon_r \mathbf{e}_0) = 0, \end{array} \right. \tag{26}$$

$$\frac{\partial \mathbf{m}_0}{\partial t} = -\mathbf{m}_0 \times \mathbf{h}_{T,0} - \alpha \mathbf{m}_0 \times (\mathbf{m}_0 \times \mathbf{h}_{T,0}) \text{ in } \omega, \tag{27}$$

avec $\mathbf{h}_{T,0} = \mathbf{h}_a(\mathbf{m}_0) + \mathbf{h}_{ex}(\mathbf{m}_0) + \mathbf{h}_0$, et nous avons un terme correctif où les équations de Landau-Lifschitz sont linéarisées

$$\left\{ \begin{array}{ll} \mathbf{div}\ (\mathbf{h}_1 + \mathbf{m}_1) = 0\ ; & \mathbf{rot}\ \mathbf{h}_1 = \tilde{\sigma} \mathbf{e}_0, \\ \mathbf{rot}\ \mathbf{e}_1 = -\dfrac{\partial}{\partial t}(\mathbf{h}_1 + \mathbf{m}_1)\ ; & \mathbf{div}\ (\tilde{\sigma} \mathbf{e}_1) = 0, \end{array} \right. \tag{28}$$

$$\frac{\partial \mathbf{m}_1}{\partial t} = -\sum_{k+l=1} \mathbf{m}_k \times \mathbf{h}_{T,l} - \alpha \sum_{i+j+l=1} \mathbf{m}_l \times (\mathbf{m}_i \times \mathbf{h}_{T,j}) \text{ in } \omega, \tag{29}$$

et une suite de systèmes pour $k \geq 2$ qu'il serait trop long d'écrire ici.
Les techniques de [20] s'adaptent et l'on montre que lorque η tend vers 0, $\mathbf{m}$ tend vers $\mathbf{m}_0$. Bien sûr la définition de $\mathbf{h}_1$ et $\mathbf{m}_1$ nécessite une régularité supplémentaire sur la donnée initiale.

5 Simulation numérique

5.1 Les codes existants et les méthodes utilisées

5.1.1 Minimisation de l'énergie

Les premiers codes de calcul destinés à déterminer des minimiseurs de l'énergie micromagnétique ont été mis au point par des physiciens, on pourra citer M.E. Schabes et H.N. Bertram ([50], méthode des différences finies), D.V. Berkov, K. Ramstöck et A. Hubert [13]. La méthode utilisée consiste à modéliser l'ensemble des mailles comme une assemblée de dipôles magnétiques interagissant les uns sur les autres. Cette méthode a permis d'effectuer de nombreuses simulations mais s'avère ne pas conserver les propriétés fondamentales de positivité et de norme de l'opérateur continu, ce qui peut conduire à des résultats erronés.

Ensuite, des codes d'éléments finis ont été développés par des physiciens et des numériciens. On citera les calculs en trois dimensions de R. Fisher, T. Schrefl, H. Kronmüller et J. Fidler [26, 25], les calculs en deux et en trois dimensions de F. Alouges [4, 5, 6], les calculs en trois dimensions avec une ou deux directions périodiques de A. Bagnéres [10, 54], les simulations en deux dimensions pour des couches minces de M. Aïd [2] ou encore Y. Zheng et J.-G. Zhu [58].
L'un des problèmes les plus délicats dans la simulation des phénomènes de micromagnétisme est celui de la prise en compte du champ démagnétisant. En effet, ce champ est défini sur l'espace tout entier et non local. Ainsi, une formulation par éléments finis nécessite de mailler l'extérieur du domaine de calcul en plaçant des couches absorbantes appropriées pour modéliser le comportement du champ à l'infini et d'utiliser, par exemple, un "solveur" de Poisson classique (voir O. Vacus [37]). Cette méthode est très gourmande en place mémoire et temps calcul et, si elle peut s'appliquer pour le problème de minimisation de l'énergie dans le cas de maillages de petite taille, elle devient trop coûteuse pour être viable dans le cadre de calculs dynamiques en trois dimensions.
Une méthode d'éléments finis infinis a été développée par F. Alouges [4, 5, 6] pour résoudre le problème de la discrétisation par éléments finis du champ démagnétisant. Cette méthode présente l'avantage de nécessiter peu de mailles à l'extérieur du domaine magnétique.

5.1.2 Simulation du problème dynamique

Trois méthodes sont utilisées pour simuler le problème dynamique : les éléments finis, les différences finies et les volumes finis. La méthode des différences finies est surtout utilisée par les physiciens et constitue la méthode de simulation "historique", on citera par exemple les travaux de Y. Nakatami, Y. Uesaka et N. Hayashi [49]. Les éléments finis sont utilisés par les physiciens (voir par exemple Z. Guo et E. Della Torre [28] sur les films minces) ou par les mathématiciens (O. Vacus et P. Monk [48], simulation mono-dimensionnelle de Landau-Lifschitz couplé avec Maxwell). Comme nous l'avons déjà noté, le principal problème de la méthode des éléments finis est son coût.
Un code industriel a été développé à l'ONERA par S.Labbé (code EMicroM [39]), reposant sur une méthode de type volumes finis (voir [41, 42]). Cette méthode conserve les propriétés fondamentales de l'opérateur continu (positivité et norme inférieur ou égale à un au sens de $\mathbb{L}^2(\mathbb{R}^3)$) et permet d'effectuer une résolution rapide sur des maillages réguliers de grande taille (de l'ordre de 800 000 degrés de liberté). Le principe de cette méthode est d'écrire la solution explicite de l'équation de la magnétostatique dans tout l'espace puis d'utiliser les propriétés de commutation entre l'inverse de l'opérateur laplacien et les opérateurs différentiels linéaires, on obtient $\mathbf{H}_{QS} = \mathbf{grad}\ \mathbf{div}\ (\frac{1}{4\pi r} \star \mathbf{M})$. Alors, en introduisant l'opérateur de projection P_h de $\mathbb{L}^2(\mathbb{R}^3)$ dans $\mathbb{R}^{3N}$, où N représente le nombre de mailles du maillage, et l'opérateur de relèvement R_h, adjoint de P_h pour les produits scalaires canoniques, on définit $\mathbf{H}_{QS,h}$, le champ magnétostatique discrétisé, par $\mathbf{H}_{QS,h} = \mathrm{P}_h \circ \mathbf{H}_{QS} \circ \mathrm{R}_h$. Une partie des intégrations est faite analytiquement, la projection est réalisée par quadrature de Gauss à p points. La projection ainsi approchée sera désignée par $\mathrm{P}_{h,p}$, et le champ magnétostatique discrétisé $\mathbf{H}_{QS,h,p}$ est défini par $\mathbf{H}_{QS,h,p} = \frac{1}{2}(\mathrm{P}_{h,p} \circ \mathbf{H}_{QS} \circ \mathrm{R}_h + (\mathrm{P}_{h,p} \circ \mathbf{H}_{QS} \circ \mathrm{R}_h)^t)$. On remarque alors que l'opérateur discret $\mathbf{H}_{QS,h,p}$ (qui est une matrice pleine) a une structure particulière : c'est une matrice Toeplitz multi-niveaux. Cette propriété permet d'écrire une méthode de calcul rapide du champ démagnétisant approché en

$O(N \log(N))$ opérations et de stocker la matrice pleine $\mathbf{H}_{QS,h,p}$ en $O(N)$ réels. Grâce à cette méthode combinée avec une méthode de masques, il est possible d'effectuer des calculs réalistes sur des domaines de forme quelconque (voir la plaque hexagonale de la figure 5).
La discrétisation temporelle fait intervenir un schéma d'ordre deux explicite. Convergence et stabilité du schéma sont assurées par un procédé d'optimisation du pas de temps à chaque itération temporelle, optimisation permettant d'assurer également une décroissance optimale de l'énergie du système dans le cas autonome.
L'ajout des corrections “Maxwell” (introduites en section 4.3) permettant de traiter les cas pour lesquels l'approximation de la magnétostatique est en limite de validité repose sur le même type d'idées que celles développées pour l'approximation de la magnétostatique mais ne sera pas traitée ici pour des raisons de place [29] .

5.2 Comparaison avec l'expérience : la susceptibilité

Effectuer des calculs sur des particules tri-dimensionnelles est une chose, mais comparer les résultats numériques avec l'expérience en est une autre. En effet, la mesure de l'aimantation en volume pour des domaines tri-dimensionnels est impossible expérimentalement. Par contre, il est possible de calculer la susceptibilité électromagnétique d'un domaine ferromagnétique. Le principe est d'éclairer le domaine avec trois ondes planes de pulsation ω que l'on nommera $\mathbf{h}_1(\omega)$, $\mathbf{h}_2(\omega)$ et $\mathbf{h}_3(\omega)$ dans trois directions orthogonales de l'espace. On obtient trois réponses de l'aimantation $\mathbf{m}_1(\omega)$, $\mathbf{m}_2(\omega)$ et $\mathbf{m}_3(\omega)$ harmoniques d'amplitude complexe, et la susceptibilité $\chi(\omega)$ est le tenseur défini par

$$\chi(\omega)_{ij} = -\mu_0 \int_\Omega \mathbf{h}_i(\omega).\mathbf{m}_j(\omega)\ dx, \forall i \in \{1, 2, 3\}.$$

Les réponses aux excitations sont obtenues par résolution du système de Landau et Lifschitz linéarisé autour d'un état d'équilibre ; cette résolution peut être effectuée grâce à une méthode de préconditionnement [38, 41]. C'est la base d'un code développé par S. Labbé à l'ONERA [40, 43]. La courbe des différents coefficients de $\chi(\omega)$ peut alors être comparée avec les résultats expérimentaux.

Prenons l'exemple de calculs effectués pour des domaines de type plaque mince pour lesquels l'aimantation se place en bandes parallèles de même largeur dans lesquelles l'aimantation est perpendiculaire à la plaque, dirigée vers le bas ou vers le haut, alternativement sur chaque domaine. Des calculs analytiques dans le cas de plaques infinies (domaines pour lesquels l'expression du champ démagnétisant se simplifie) ont été effectués par N. Vukadinovic, J. Ben Youssef et H. Le Gall [56]. Nos résultats sur des échantillons de taille finie rendent compte de phénomènes physiques identifiés différents des phénomènes limites (voir figure 7).

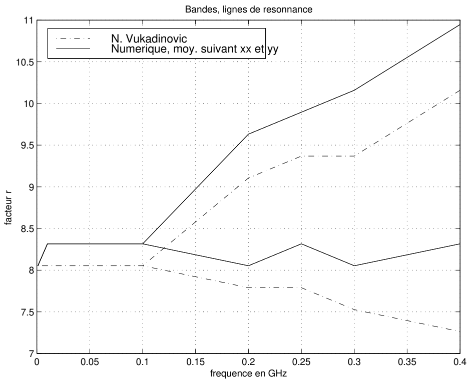

FIG. 7 - Lieu des résonances quand l'anisotropie varie. Le facteur r est inversement proportionnel au facteur K

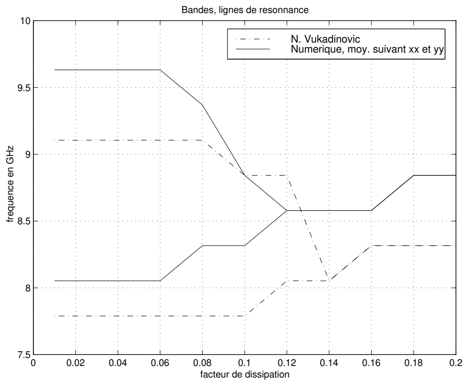

FIG. 8 - Lieu des résonances quand le facteur de dissipation α varie

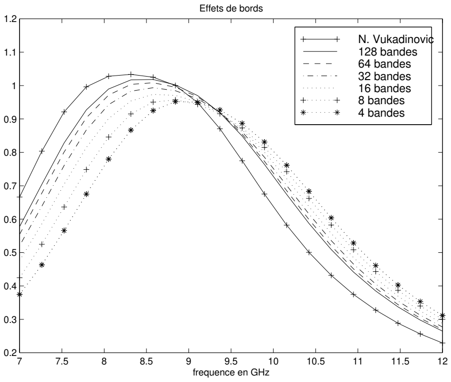

FIG. 9 - La courbe de susceptibilité pour une plaque finie tend vers la courbe théorique pour une plaque infinie quand la taille du domaine augmente, pour une largeur de bande fixée. Ce phénomène est dû aux effets de bords

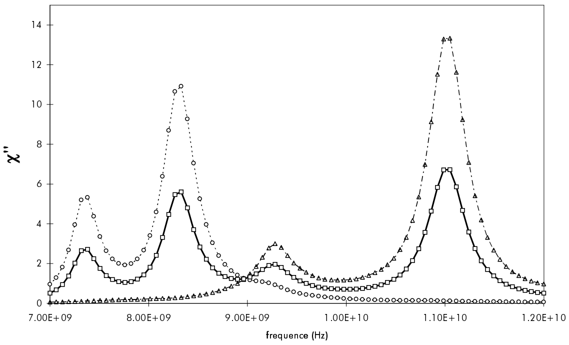

FIG. 10 - Courbe de susceptibilité. Au lieu de deux pics sur la courbe théorique pour une plaque infinie, on trouve 4 pics. Ceci est du aux effets de bords comme le montrent les figures 11, 12, 13 et 14

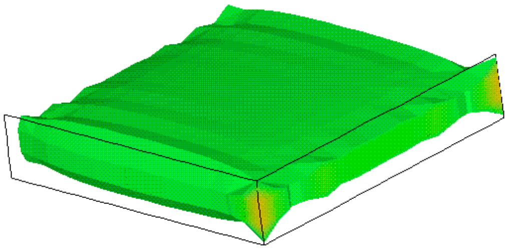

FIG. 11 - Norme de la réponse de l'aimantation pour le pic à $8,4$ GHz

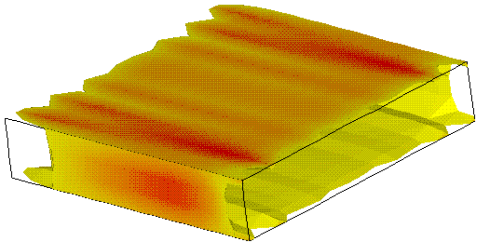

FIG. 12 - Norme de la réponse de l'aimantation pour le pic à $7,3$ GHz

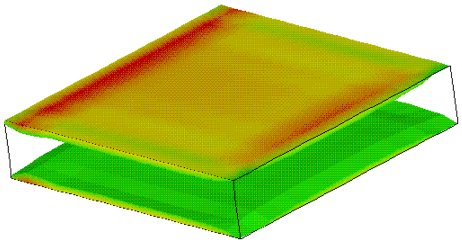

FIG. 13 - Norme de la réponse de l'aimantation pour le pic à 11 GHz

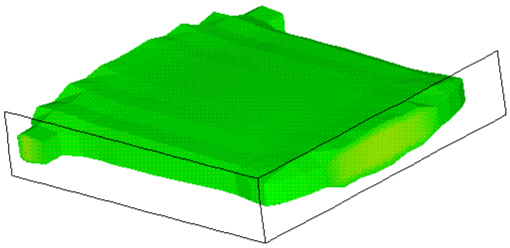

FIG. 14 - Norme de la réponse de l'aimantation pour le pic à $9,2$ GHz

6 Questions diverses et problèmes ouverts

6.1 Problèmes théoriques

- Nous avons déjà mentionné le problème de l'unicité des solutions du système de Landau-Lifschitz couplé avec le modèle de la magnétostatique. On ne dispose actuellement que de résultats partiels en dimension 3.
- Actuellement la question de la stabilité des solutions autour des états stationnaires, en fonction de paramètres physiques tels que le paramètre d'échange n'a pas été abordée à notre connaissance.
- Le système de Landau-Lifschitz (18) constitue un modèle à l'échelle mésoscopique [46]. Il com-

porte deux termes. Le premier est un terme de précession, dérivant directement des équations microscopiques de Larmor. Quant au second terme, il est dissipatif et modélise la perte d'information au passage de l'échelle atomique à l'échelle mésoscopique ; il a été écrit de façon heuristique. Un problème ouvert intéressant est la dérivation "propre" du modèle mésoscopique à partir des termes microscopiques.
– Mentionnons enfin la propagation des ondes dans un milieu proche d'un milieu saturé infini [22].

6.2 Problèmes numériques

Afin de capter les phénomènes de parois, il sera utile d'être capable d'effectuer des raffinements locaux de maillages. Les méthodes testées jusqu'ici ne sont pas satisfaisantes car elles déstabilisent les parois.

6.3 Les couches minces

Dans le domaine de l'enregistrement magnétique, une grande partie de l'activité physique et industrielle concerne la modélisation des couches minces, l'empilement de couches minces, et les structures magnétiques périodiques (par exemple les réseaux de plots). Du point de vue mathématique, cela met en jeu des questions de limite singulière et d'homogénéisation [9, 19]. D'un point de vue numérique, des méthodes spécifiques ont été développées [44, 45].

Remerciements. La liste est longue des personnes sans lesquelles cet article n'existerait pas. Les physiciens d'abord : P.Y. Bertin et F. Boust de l'ONERA, M. Labrune de Paris XIII, toujours disponibles pour de longues discussions. F. Rogier du CERT, F. Alouges de Paris XI, et P. Leca du CEA avec qui tout a commencé à l'ONERA.

Références

[1] A. Aharoni. *Introduction to the theory of ferromagnetism.* Oxford Science Publication, 1996.

[2] M. Aïd. *Simulation de la répartition en domaines des pièces polaires des têtes d'enregistrement magnétique couches minces.* PhD thesis, Institut National Polytechnique de Grenoble, 1993.

[3] N.S. Akulov. On the theory of the magnetization curve of single crystals (en allemand). *Z. Phys.*, pages 794–807, 1931.

[4] F. Alouges. Calcul de configurations micromagnétiques stables par éléments finis sur des géométries quelconques. In *Actes des Rencontres Pluridisciplinaires sur le Micromagnétisme, Institut Galilée, ONERA*, Mai 1997.

[5] F. Alouges. Calcul de configurations magnétiques stables par éléments finis et infinis. In *Actes du Congrès d'Analyse Numérique 1998.* SMAI, Mai 1998.

[6] F. Alouges. *Mémoire d'habilitation à diriger des recherches.* PhD thesis, Ecole Normale Supérieure de Cachan, 1998.

[7] F. Alouges and A. Soyeur. On global weak solutions for Landau-Lifshitz equations : existence and nonuniqueness. *Nonlinear Analysis. Theory, Methods & Applications*, 18(11) :1071–1084, 1992.

[8] H. Ammari, A. Buffa, and J-C. Nédélec. A justification of eddy currents models for the Maxwell equations. *SIAM Journal of Appl. Math*, 60(5) :1805–1823, 2000.

[9] H. Ammari, L. Halpern, and K. Hamdache. Asymptotic behaviour of thin ferromagnetic films. *Asymptot. Anal*, pages 277–294, 2000.

[10] A. Bagnérés-Viallix, P. Barras, and J.B. Albertini. 2D and 3D calculations of micromagnetic wall structures using finite elements. *IEEE Transactions on Magnetics*, 27(5) :3819–3822, Septembre 1991.

[11] R. Becker. On the theory of the magnetization curve (en allemand). *Z. Phys.*, 62, 1930.

[12] R. Becker and W. Döring. *Ferromagnetismus.* Springer, 1939.

[13] D. V. Berkov, K. Ramstöck, and A. Hubert. Solving micromagnetic problems : toward an optimal method. *Phys. Stat. Sol. (a)*, 137 :207–225, 1993.

[14] C. Bonjour. *Inversion de systèmes linéaires pour la simulation des matériaux ferromagnétiques. Singularités d'une configuration d'aimantation.* PhD thesis, IMAG, 1996.

[15] J. P. Bouchaud and P. G. Zerah. The initial susceptibility of ferrites : a quantitative theory. *J. Appl. Phys.*, 67 :5512, 1990.

[16] W.F. Brown. *Magnetostatic Principles in Ferromagnetism.* North-Holland, 1962.

[17] W.F. Brown. *Micromagnetics.* Interscience Publishers, 1963.

[18] G. Carbou. Regularity for critical points of a non local energy. *Calc. Var. PDE*, 5 :409–433, 1997.

[19] G. Carbou. Thin layers in micromagnetism. Université de Bordeaux I, 1999.

[20] G. Carbou and P. Fabrie. Time average in micromagnetism. *Journal of Differential Equations*, 147 :383–409, 1998.

[21] G. Carbou and P. Fabrie. Regular solutions for Landau-Lifshitz equations in a bounded domain. *Differential and integral equations*, 14(2) :213–229, 2001.

[22] T. Colin, C. Galusinski, and H.G. Kaper. Waves in ferromagnetic media. Technical Report 01.08, Université de Bordeaux I.

[23] P. Degond and P-A. Raviart. An analysis of the Darwin model of approximation to Maxwell's equations. *Forum Math. 4*, 4 :13–44, 1992.

[24] H.D. Dietze and H. Thomas. Bloch and Néel walls in thin ferromagnetic films (en allemand). *Z. Phys.*, 163 :523–534, 1961.

[25] R. Fisher, T. Shrefl, H. Kronmüller, and J. Fidler. Phase distribution and computed magnetic properties of high-remanent composite magnets. *Journal of Magnetism and Magnetic Materials*, 150, 1995.

[26] R. Fisher, T. Shrefl, H. Kronmüller, and J. Fidler. Grain-size dependence of remanence and coercive field of isotropic nanocrystalline composite permanent magnets. *Journal of Magnetism and Magnetic Materials*, 153 :35–49, 1996.

[27] E. Flavin, F. Boust, and H. Pascard. Experimental study of microwave susceptibility in ferrite composite materials. In *Proceedings of ICF7, Bordeaux, France*, 1996.

[28] Zhenzhou Guo and Edward Della Torre. Micromagnetic modeling of thin-film recording heads. *IEEE Transactions on Magnetics*, 32(3) :2003–2010, Mai 1996.

[29] L. Halpern and S. Labbé. From the quasi-static to the dynamic Maxwell's model in micromagnetism. In SIAM, editor, *Fifth International Conference on Mathematical and Numerical Aspects of Wave Propagation*, pages 310–314, 2000.

[30] R. Hardt and D. Kinderlehrer. Some regularity results in micromagnetism. *Communications in Partial Differential Equations*, 25(7-8) :1235–1258, 2000.

[31] W. Heisenberg. On the theory of the magnetostriction and magnetization curve (en allemand). *Z. Phys*, 69, 1931.

[32] A. Hubert and R. Schäfer. *Magnetic Domains : The Analysis of Magnetic Microstructures.* Springer-Verlag, 2000.

[33] J.L. Joly, G. Métivier, and J. Rauch. Global solutions to Maxwell equations in ferromagnetic medium. Ecole Polytechnique, Séminaire EDP, exposé numéro 11, 1996-1997.

[34] J.L. Joly, G. Métivier, and J. Rauch. Propagation des ondes électromagnetiques en presence d'un materiau ferromagnetique. In *ESAIM*, volume 3, pages 85–99, 1998.

[35] P. Joly and O. Vacus. Mathematical and numerical studies of nonlinear ferromagnetic materials. *M2AN Math. Model. Numer. Anal.*

[36] P. Joly and O. Vacus. Propagation d'ondes en milieu ferromagnétique 1d : existence et unicité de solutions faibles. *Compte rendu de l'Académie des Sciences Série I*, 324(1), 1997.

[37] P. Joly and O. Vacus. Propagation en milieu ferromagnétique saturé. In *Actes des Rencontres Pluridisciplinaires sur le Micromagnétisme, Institut Galilée, ONERA*, Mai 1997.

[38] S. Labbé and P.Y. Bertin. Microwave polarisability of ferrite particles with non-uniform magnetization. *Journal of Magnetism and Magnetic Materials*, 206 :93–105, 1999.

[39] S. Labbé. *EMicroM, logiciel.* ONERA. numéro APP : IDDN.FR.001.320023.R.P.1998.000.31235.

[40] S. Labbé. *SMicroM, logiciel.* ONERA. numéro APP : IDDN.FR.001.320023.R.P.1998.000.31235.

[41] S. Labbé. *Simulation numérique du comportement hyperfréquence des matériaux ferromagnétiques.* PhD thesis, Université Paris 13, Décembre 1998.

[42] S. Labbé and P. Leca. Résolution rapide des équations de Maxwell quasistationnaires : matrices Toeplitz multidimensionnelles. Application au micromagnétisme. *C. R. Acad. Sci. Paris*, Série I(t. 327) :415–420, 1998.

[43] S. Labbé and P. Leca. Un préconditionneur pour le calcul de la susceptibilité hyperfréquence de particules ferromagnétiques. *C. R. Acad. Sci. Paris*, Série I(t. 329) :647–652, 1999.

[44] M. Labrune and L. Belliard. Stripes domains in multi-layers : micromagnetic simulation. *Phys. Stat. Sol. A*, 174 :483–489, 1999.

[45] M. Labrune and J. Miltat. Wall structure in ferro / antiferromagnetic exchange -coupled bilayers : a numerical micromagnetic approach. *Journal of Magnetism and Magnetic Materials*, 151 :231–245, 1995.

[46] L.D. Landau and E.M. Lifschitz. On the theory of the dispersion of magnetic permeability in ferromagnetic bodies. *Phys. Z. Sowjetunion*, 8 :153–169, 1935.

[47] L.D. Landau and E.M. Lifschitz. *Electrodynamics of continuous media.* Pergamon, New York, 1986.

[48] P. Monk and O. Vacus. Error estimates for a numerical scheme for ferromagnetic problems. *SIAM J. Numer. Anal.*, 36(3) :696–718, 1999.

[49] Y. Nakatani, Y. Uesaka, and N. Hayashi. Computer simulation of switching fields and magnetization states of interacting cubic particles : cases with fields applied parallel to the hard axes. *Journal of Magnetism and Magnetic Materials*, 123 :337–358, 1993.

[50] M. E. Schabes and H. N. Bertram. Magnetization processes in ferromagnetic cubes. *Journal of Applied Physics*, 1 :1347–1357, Août 1988.

[51] E. Schlömann. Microwave behavior of partially magnetized ferrites. *J. Appl. Phys.*, 67(1) :204–214, 1970.

[52] A. Tonomura. Electron-holographic interference microscopy. *Advances in Physics*, 41(1) :59–103, 1992.

[53] O. Vacus. *Modélisation de la propagation d'ondes en milieu ferromagnétique.* PhD thesis, Ecole Centrale de Paris, 1997.

[54] A. Viallix. *Simulation de la structure de parois dans un matériau magnétique.* PhD thesis, Institut National Polytechnique de Grenoble, 1990.

[55] A. Visintin. On Landau-Lifshitz equations for ferromagnetism. *Japan J. Appl. Math.*, 2(1) :69–84, 1985.

[56] N. Vukadinovic, J. Ben Youssef, and H. Le Gall. Influence of magnetic parameters on microwave absorption of domain mode ferromagnetic resonance. *Journal of Magnetism and Magnetic Materials*, 150 :213–222, Mars 1995.

[57] P. Weiss. L'hypothèse du champ moléculaire et la propriété ferromagnétique. *J. de Phys. Rad.*, 6 :661–690, 1907.

[58] Y. Zheng and J.-G. Zhu. Micromagnetics in spin valve memory cell. *IEEE Trans. Magn.*, 32 :4237–4239, 1996.