Chapitre 4

Résolution numérique de systèmes linéaires par méthode itérative. I méthodes stationnaires

Sommaire

4.1 Introduction

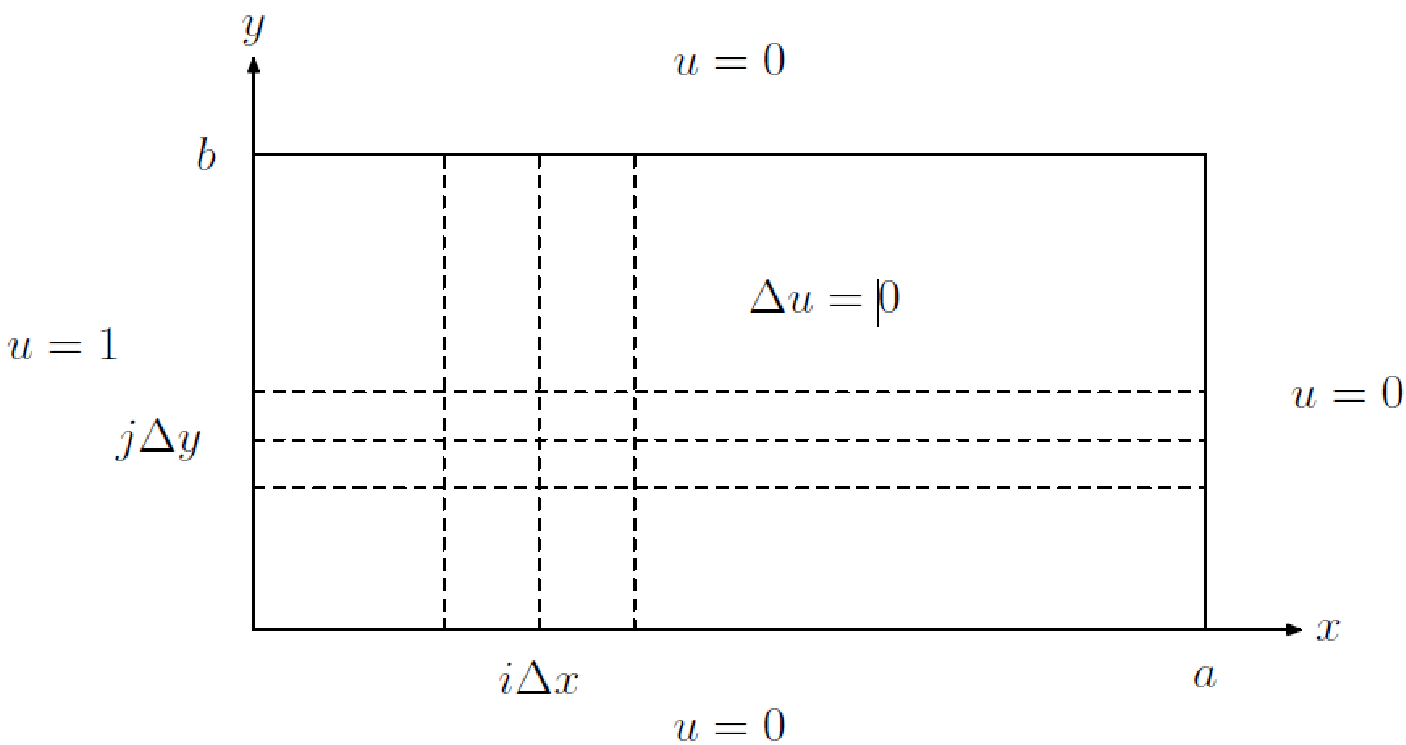
Exemple de base en analyse numérique : équation de la chaleur 2D (et même 3D). On cherche $u(x, y, t)$, solution de

$$\rho \partial_t u - \Delta u = f \text{ dans } \Omega; \quad \Delta u = \partial_{xx} u + \partial_{yy} u + \cdots$$

avec des conditions initiales et aux limites sur $\partial\Omega$.

Equilibre : $u(x, y)$

$$-\Delta u = f \text{ dans } \Omega.$$



On choisit des pas d'espace

$$\Delta x = \frac{a}{m+1}, \quad \Delta y = \frac{b}{m+1}$$

L'opérateur de Laplace en deux dimensions est discrétisé avec des *différences finies*

$$\partial_{xx} u \sim \frac{u(x+\Delta x, y) - 2u(x, y) + u(x - \Delta x, y)}{\Delta x^2};$$
$$\partial_{yy} u \sim \frac{u(x, y+\Delta y) - 2u(x, y) + u(x, y - \Delta y)}{\Delta y^2};$$

On obtient pour $u_{i,j} \sim u(i\Delta x, j\Delta y)$,

$$\frac{1}{\Delta x^2}\left(-u_{i-1,j} + 2u_{i,j} - u_{i+1,j}\right) \quad + \frac{1}{\Delta y^2}\left(-u_{i,j-1} + 2, u_{i,j} - u_{i,j+1}\right) = f(x_i, y_j)$$

On introduit les vecteurs

$$\boldsymbol{u}_j = \begin{pmatrix} u_{1,j} \\ \vdots \\ u_{m,j} \end{pmatrix}$$

pour $j = 1, \cdots, n$. On multiplie l'équation par Δy^2, et on obtient

$$-\boldsymbol{u}_{j-1} + T\boldsymbol{u}_j - \boldsymbol{u}_{j+1} = \delta u_{0,j}\boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{f}_j \Delta y^2$$

$$T = \begin{pmatrix} 2(1+\delta) & -\delta & 0 & & \\ -\delta & 2(1+\delta) & -\delta & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & -\delta & 2(1+\delta) & -\delta \\ & & 0 & -\delta & 2(1+\delta) \end{pmatrix} \quad \text{matrice } m \times m$$

On introduit maintenant le vecteur de toutes les inconnues

$$\boldsymbol{U} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{u}_1 \\ \vdots \\ \boldsymbol{u}_n \end{pmatrix}$$

On obtient un large système de $m \times n$ équations à $m \times n$ inconnues,

$$A\boldsymbol{U} = \boldsymbol{F}$$

avec

$$A = \begin{pmatrix} T & -I & 0 & & \\ -I & T & -I & 0 & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & 0 & -I & T & -I \\ & & 0 & -I & T \end{pmatrix}$$

La matrice A est CREUSE, TRIDIAGONALE PAR BLOCS. Dans chaque bloc-ligne de A, seuls 3 blocs sur les n sont non-identiquement nuls, avec dans chaque ligne de ces blocs au plus 3 éléments non-nuls. Ca fait dans chaque ligne de A 5 élément non nuls sur $m \times n$ (faire $m = 100, n = 50$). La décomposition de Gauss risque de remplir la matrice. Les méthodes itératives n'ont pas besoin de construire la matrice, mais plutôt de savoir faire le produit matrice-vecteur.

Pour construire une méthode itérative on écrit

$$A = M - N; Au = b \iff Mu - Nu = b$$

$$u = M^{-1}(Nu + b)$$

On utilise le point fixe

$$Mu_{k+1} = Nu_k + b$$

Compromis entre
- M est une bonne approximation de A (le meilleur M est A)
- le système à résoudre à chaque itération est simple et peu onéreux.

4.2 Norme de vecteurs et de matrices

Définition 4.1 *Une* ***norme*** *sur un espace vectoriel V est une application $\|\cdot\| : V \to \mathbb{R}^+$ qui vérifie les propriétés suivantes*
- $\|\mathbf{v}\| = 0 \Longleftrightarrow \mathbf{v} = 0,$
- $\|\alpha \mathbf{v}\| = |\alpha| \, \|\mathbf{v}\|, \forall \alpha \in \mathbb{K}, \, \forall \mathbf{v} \in V,$
- $\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\| \leq \|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\| \, , \, \forall (\mathbf{u}, \mathbf{v}) \in V^2$ *(inégalité triangulaire)*

Une norme sur V est également appelée ***norme vectorielle*** *. On appelle* ***espace vectoriel normé*** *un espace vectoriel muni d'une norme.*

Les trois normes suivantes sont les plus couramment utilisées sur $\mathbb{C}^n$:

$$\|\mathbf{v}\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |v_i|$$

$$\|\mathbf{v}\|_2 = \left(\sum_{i=1}^{n} |v_i|^2 \right)^{1/2}$$

$$\|\mathbf{v}\|_\infty = \max_i |v_i| \, .$$

La deuxième norme est la norme euclidienne sur $\mathbb{C}^n$. Elle dérive du produit scalaire $(u, v)_2 = \sum_{i=1}^{n} u_i \bar{v}_i$.

Théorème 4.1 *Soit V un espace de dimension finie. Pour tout nombre réel $p \geq 1$, l'application $v \mapsto \|v\|_p$ définie par*

$$\|\mathbf{v}\|_p = \left(\sum_{i=1}^{n} |v_i|^p \right)^{1/p}$$

est une norme.

Rappel 4.1 *Pour $p > 1$ et $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, l'inégalité*

$$\|\mathbf{uv}\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |u_i v_i| \leq \left(\sum_{i=1}^{n} |u_i|^p \right)^{1/p} \left(\sum_{i=1}^{n} |v_i|^q \right)^{1/q} = \|\mathbf{u}\|_p \, \|\mathbf{v}\|_q$$

*s'appelle l'****inégalité de Hölder****.*

Définition 4.2 *Deux* ***normes*** $\|\cdot\|$ *et* $\|\cdot\|'$, *définies sur un même espace vectoriel* V, *sont* ***équivalentes*** *s'il existe deux constantes* C *et* C' *telles que*

$$\|\mathbf{v}\|' \leq C\,\|\mathbf{v}\| \quad et \quad \|\mathbf{v}\| \leq C'\,\|\mathbf{v}\|' \quad pour\ tout\ \mathbf{v} \in V.$$

Rappel 4.2 *Sur un espace vectoriel de dimension finie toutes les normes sont équivalentes.*

Définition 4.3 *Soit* $\mathcal{M}_n$ *l'anneau des matrices d'ordre* n, *à éléments dans le corps* $\mathbb{K}$. *Une* ***norme matricielle*** *est une application* $\|\cdot\| : \mathcal{M}_n \to \mathbb{R}^+$ *vérifiant*

1. $\|A\| = 0 \Longleftrightarrow A = 0$,
2. $\|\alpha A\| = |\alpha|\,\|A\|, \forall \alpha \in \mathbb{K}, \forall A \in \mathcal{M}_n$,
3. $\|A+B\| \leq \|A\| + \|B\|\,,\ \forall\,(A,B) \in \mathcal{M}_n^2$ *(inégalité triangulaire)*
4. $\|\mathbb{A}\mathbb{B}\| \leq \|A\|\,\|B\|\,,\ \forall\,(A,B) \in \mathcal{M}_n^2$

Rappel 4.3 *Etant donné une norme vectorielle* $\|\cdot\|$ *sur* $\mathbb{K}^n$, *l'application* $\|\cdot\| : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{R}^+$ *définie par*

$$\|A\| = \sup_{\substack{\mathbf{v}\in\mathbb{K}^n \\ \mathbf{v}\neq\mathbf{0}}} \frac{\|A\mathbf{v}\|}{\|\mathbf{v}\|} = \sup_{\substack{\mathbf{v}\in\mathbb{K}^n \\ \|\mathbf{v}\|\leq\mathbf{1}}} \|A\mathbf{v}\| = \sup_{\substack{\mathbf{v}\in\mathbb{K}^n \\ \|\mathbf{v}\|=\mathbf{1}}} \|A\mathbf{v}\|\,,$$

est une norme matricielle, appelée ***norme matricielle subordonnée*** *(à la norme vectorielle donnée).*

De plus

$$\|A\mathbf{v}\| \leq \|A\|\,\|\mathbf{v}\| \quad \forall \mathbf{v} \in\mathbb{K}^n$$

et la norme $\|A\|$ *peut se définir aussi par*

$$\|A\| = \inf\left\{\alpha \in \mathbb{R} : \|A\mathbf{v}\| \leq \alpha\,\|\mathbf{v}\|\,,\ \forall \mathbf{v} \in\mathbb{K}^n\right\}.$$

Il existe au moins un vecteur $\mathbf{u}$ *tel que*

$$\mathbf{u} \neq 0 \quad et \quad \|A\mathbf{u}\| = \|A\|\,\|\mathbf{u}\|\,.$$

Enfin une norme subordonnée vérifie toujours

$$\|I\| = 1$$

Rappelons la définition du rayon spectral d'une matrice. Notons $\lambda_i(A)$ les n valeurs propres de la matrice $n \times n$ A. Le rayon spectral de A est

$$\rho(A) = \max_i |\lambda_i(A)|$$

Théorème 4.2 *Soit $A = (a_{ij})$ une matrice carrée. Alors*

$$\|A\|_1 \overset{déf.}{=} \sup_{\substack{\mathbf{v}\in\mathbb{C}^n \\ \mathbf{v}\neq\mathbf{0}}} \frac{\|A\mathbf{v}\|_1}{\|\mathbf{v}\|_1} = \max_j \sum_i |a_{ij}|$$

$$\|A\|_2 \overset{déf.}{=} \sup_{\substack{\mathbf{v}\in\mathbb{C}^n \\ \mathbf{v}\neq\mathbf{0}}} \frac{\|A\mathbf{v}\|_2}{\|\mathbf{v}\|_2} = \sqrt{\rho\left(A^*A\right)} = \sqrt{\rho\left(\mathbb{A}\mathbb{A}^*\right)} = \|A^*\|_2$$

$$\|A\|_\infty \overset{déf.}{=} \sup_{\substack{\mathbf{v}\in\mathbb{C}^n \\ \mathbf{v}\neq\mathbf{0}}} \frac{\|A\mathbf{v}\|_\infty}{\|\mathbf{v}\|_\infty} = \max_i \sum_j |a_{ij}|$$

La norme $\|\cdot\|_2$ est invariante par transformation unitaire :

$$UU^* = I \Longrightarrow \|A\|_2 = \|AU\|_2 = \|UA\|_2 = \|U^*AU\|_2 .$$

Par ailleurs, si la matrice A est normale :

$$AA^* = A^*\mathbb{A} \Longrightarrow \|A\|_2 = \rho\left(A\right).$$

Remarque 4.1
1. *Si une matrice A est hermitienne, ou symétrique (donc normale), on a $\|A\|_2 = \rho\left(A\right)$.*
2. *Si une matrice A est unitaire ou orthogonale (donc normale), on a $\|A\|_2 = 1$.*

Théorème 4.3
1. *Soit A une matrice carrée quelconque et $\|\cdot\|$ une norme matricielle subordonnée ou non, quelconque. Alors*

$$\rho\left(A\right) \leq \|A\| .$$

2. *Etant donné une matrice A et un nombre $\varepsilon > 0$, il existe au moins une norme matricielle subordonnée telle que*

$$\|A\| \leq \rho\left(A\right) + \varepsilon.$$

Théorème 4.4 *L'application $\|\cdot\|_E : \mathcal{M}_n \to \mathbb{R}^+$ définie par*

$$\|A\|_E = \left(\sum_{i,j} |a_{ij}|^2\right)^{1/2} = \sqrt{tr\left(A^*A\right)},$$

pour toute matrice $A = (a_{ij})$ d'ordre n, est une norme matricielle non subordonnée (pour $n \geq 2$), invariante par transformation unitaire :

$$UU^* = I \Longrightarrow \|A\|_E = \|AU\|_E = \|UA\|_E = \|U^*AU\|_E$$

et qui vérifie

$$\|A\|_2 \leq \|A\|_E \leq \sqrt{n}\,\|A\|_2\,, \ \ \forall A \in \mathcal{M}_n.$$

De plus $\|I\|_E = \sqrt{n}$.

4.3 Conditionnement

On veut estimer $x - y$, où x est solution du système linéaire, et y solution du système perturbé

$$\begin{aligned} A\boldsymbol{x} &= \boldsymbol{b}, \\ (A + \Delta A)\,\boldsymbol{y} &= (\boldsymbol{b} + \Delta \boldsymbol{b})\,. \end{aligned}$$

Exemple de R.S. Wilson :

$$A = \begin{pmatrix} 10 & 7 & 8 & 7 \\ 7 & 5 & 6 & 5 \\ 8 & 6 & 10 & 9 \\ 7 & 5 & 9 & 10 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 32 \\ 23 \\ 33 \\ 31 \end{pmatrix},$$

$$A + \Delta A = \begin{pmatrix} 10 & 7 & 8,1 & 7,2 \\ 7,08 & 5,04 & 6 & 5 \\ 8 & 5,98 & 9,89 & 9 \\ 6,99 & 4,99 & 9 & 9,98 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b} + \boldsymbol{\Delta b} = \begin{pmatrix} 32,01 \\ 22,99 \\ 33,01 \\ 30,99 \end{pmatrix},$$

$$\Delta A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0,1 & 0,2 \\ 0,08 & 0,04 & 0 & 0 \\ 0 & -0,02 & -0,11 & 0 \\ -0,01 & -0,01 & 0 & -0,02 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\Delta b} = \begin{pmatrix} 0,01 \\ -0,01 \\ 0,01 \\ -0,01 \end{pmatrix}.$$

$$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \Longleftrightarrow \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$A\boldsymbol{u} = \boldsymbol{b} + \boldsymbol{\Delta b} \Longleftrightarrow \boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} 1,82 \\ -0,36 \\ 1,35 \\ 0,79 \end{pmatrix}, \Longrightarrow \boldsymbol{\Delta x} = \boldsymbol{u} - \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 0,82 \\ -1,36 \\ 0,35 \\ -0,21 \end{pmatrix}$$

$$(A + \Delta A)\,\boldsymbol{v} = \boldsymbol{b} \Longleftrightarrow \boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} -81 \\ 137 \\ -34 \\ 22 \end{pmatrix}, \Longrightarrow \boldsymbol{\Delta x} = \boldsymbol{v} - \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} -82 \\ 136 \\ -35 \\ 21 \end{pmatrix}$$

Définition 4.4 *Soit $\|.\|$ une norme matricielle subordonnée, le conditionnement d'une matrice régulière A, associé à cette norme, est le nombre*

$$\kappa(A) = \mathrm{cond}(A) = \|A\| \left\|A^{-1}\right\|.$$

Nous noterons $\mathrm{cond}_p(A) = \|A\|_p \left\|A^{-1}\right\|_p$.

Théorème 4.5 *Soit A une matrice inversible. Soient $\boldsymbol{x}$ et $\boldsymbol{x}+\boldsymbol{\Delta x}$ les solutions respectives de*

$$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \text{ et } A\left(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{\Delta x}\right) = \boldsymbol{b}+\boldsymbol{\Delta b}.$$

Supposons $\boldsymbol{b} \neq \boldsymbol{0}$, alors l'inégalité

$$\frac{\|\boldsymbol{\Delta x}\|}{\|\boldsymbol{x}\|} \leq \operatorname{cond}(A)\frac{\|\boldsymbol{\Delta b}\|}{\|\boldsymbol{b}\|}$$

est satisfaite, et c'est la meilleure possible : pour une matrice A donnée, on peut trouver des vecteurs $\boldsymbol{b} \neq \boldsymbol{0}$ et $\boldsymbol{\Delta b} \neq \boldsymbol{0}$ tels qu'elle devienne une égalité.

Démonstration Il suffit de soustraire les 2 équations. $\boldsymbol{\Delta x}$ est solution du système linéaire

$$A\boldsymbol{\Delta x} = \boldsymbol{\Delta b}$$

d'où

$$\|\boldsymbol{\Delta x}\| \leq \left\|A^{-1}\right\| \frac{\|\boldsymbol{\Delta b}\|}{\|\boldsymbol{b}\|} \|\boldsymbol{b}\| \leq \left\|A^{-1}\right\| \|A\| \|\boldsymbol{x}\| \frac{\|\boldsymbol{\Delta b}\|}{\|\boldsymbol{b}\|}$$

■

Théorème 4.6 *Soit A une matrice inversible. Soient $\boldsymbol{x}$ et $\boldsymbol{x}+\boldsymbol{\Delta x}$ les solutions respectives de*

$$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \text{ et } \left(A+\Delta A\right)\left(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{\Delta x}\right) = \boldsymbol{b}.$$

Supposons $\boldsymbol{b} \neq \boldsymbol{0}$, alors l'inégalité

$$\frac{\|\boldsymbol{\Delta x}\|}{\|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{\Delta x}\|} \leq \operatorname{cond}(A)\frac{\|\Delta A\|}{\|A\|}.$$

est satisfaite, et c'est la meilleure possible : pour une matrice A donnée, on peut trouver un vecteur $\boldsymbol{b} \neq \boldsymbol{0}$ et une matrice $\Delta A \neq 0$ tels qu'elle devienne une égalité.

Théorème 4.7 1. *Pour toute une matrice inversible A,*

$$\begin{aligned} \operatorname{cond}(A) &\geq 1, \\ \operatorname{cond}(A) &= \operatorname{cond}(A^{-1}), \\ \operatorname{cond}(\alpha A) &= \operatorname{cond}(A), \text{ pour tout scalaire } \alpha \neq 0 \end{aligned}$$

2. *Pour toute matrice inversible A,*

$$\operatorname{cond}_2(A) = \frac{\mu_{\max}}{\mu_{\min}}$$

où $\mu_{\max}$ et $\mu_{\min}$ sont respectivement la plus grande et la plus petite valeur singulière de A.

3. Si A est une matrice normale,

$$\mathrm{cond}_2(A) = \frac{\max\limits_i |\lambda_i(A)|}{\min\limits_i |\lambda_i(A)|}$$

où les $\lambda_i(A)$ sont les valeurs propres de A.

4. Le conditionnement $\mathrm{cond}_2(A)$ d'une matrice unitaire ou orthogonale vaut 1.

5. Le conditionnement $\mathrm{cond}_2(A)$ est invariant par transformation unitaire

$$UU^* = I \Longrightarrow \mathrm{cond}_2(A) = \mathrm{cond}_2(AU) = \mathrm{cond}_2(UA) = \mathrm{cond}_2(U^*AU).$$

Rappel 4.4 *Les valeurs singulières d'une matrice rectangulaire A sont les racines carrées positives des valeurs propres de A^*A.*

Lorsque l'on veut résoudre un système linéaire $Ax = b$ avec une matrice mal conditionnée, il peut être intéressant de de multiplier à gauche par une matrice C telle CA soit mieux conditionnée. L'exemple le plus simple est le *préconditionnement diagonal*, où la matrice C est la matrice diagonale constituée des inverses des éléments diagonaux de A : c'est l'algorithme de Richardson que nous verrons plus loin.

4.4 Suite de vecteurs et de matrices

Définition 4.5 *Soit V un espace vectoriel muni d'une norme $\|.\|$, on dit qu'une suite (v_k) d'éléments de V* ***converge vers un élément*** *$v \in V$, si*

$$lim_{k\to\infty}\|v_k - v\| = 0$$

et on écrit

$$v = lim_{k\to\infty} v_k.$$

Remarque 4.1 *Sur un espace vectoriel de dimension finie, toutes les normes sont équivalentes. Donc v_k tend vers v si et seuelement si $\|v_k - v\|$ tend vers 0 pour une norme.*

Théorème 4.8 *1. Soit $\|\cdot\|$ une norme matricielle subordonnée, et B une matrice vérifiant*

$$\|B\| < 1.$$

Alors la matrice $(I + B)$ est inversible, et

$$\left\|(I+B)^{-1}\right\| \leq \frac{1}{1 - \|B\|}.$$

2. *Si une matrice de la forme* $(I + B)$ *est singulière, alors nécessairement*

$$\|B\| \geq 1$$

pour toute norme matricielle, subordonnée ou non.

La démonstration repose sur la série de Neumann $\sum B^n$.

Théorème 4.9 *Soit* B *une matrice carrée. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

1. $lim_{k\to\infty} B^k = 0$,
2. $lim_{k\to\infty} B^k v = 0$ *pour tout vecteur* v,
3. $\varrho(B) < 1$,
4. $\|B\| < 1$ *pour au moins une norme matricielle subordonnée* $\|.\|$.

Théorème 4.10 *Soit* B *une matrice carrée, et* $\|.\|$ *une norme matricielle quelconque. Alors*

$$lim_{k\to\infty} \|B^k\|^{1/k} = \varrho(B).$$

Soit donc une suite v_k définie par $v_{k+1} = Bv_k$. On a $v_k = B^k v_0$.

$$\frac{\|v_k\|}{\|v_0\|} \leq \|B^k\|$$

Si l'on veut une erreur inférieure à ε

$$\frac{\|v_k\|}{\|v_0\|} \leq \|B^k\| \leq \varepsilon$$

$$\|B^k\|^{\frac{1}{k}} \leq \varepsilon^{\frac{1}{k}}$$

Définition 4.6 *On définit le facteur de convergence local de la méthode itérative dont la matrice d'itération est* B *est* $\rho_k(B) = \|B^k\|^{\frac{1}{k}}$. *Le facteur asymptotique de convergence asymptotique est* $\rho(B)$. *Le taux de convergence moyen est* $R_k(B) = -\ln \rho_k(B)$, *le taux de convergence asymptotique est* $R(B) = -\ln \rho(B)$.

Théorème 4.11 *Le nombre d'itérations nécessaires pour réduire l'erreur d'un facteur* ε *est au moins égal à* $K = \dfrac{-\ln \varepsilon}{R(B)}$.

4.5 Résultats généraux de convergence

Soit donc l'algorithme

$$Mu_{k+1} = Nu_k + b \tag{4.1}$$

avec $M - N = A$. Si la suite converge, elle converge vers la solution u de $Au = b$, et l'erreur $e_k = u_k - u$ vérifie $Me_{k+1} = Ne_k$. On note $B = M^{-1}N$, c'est la *matrice de l'itération*. On note aussi $r_k := b - Au_k = A(u - u_k) = Ae_k$ le *résidu* à l'étape k. D'après le théorème 4.9, on a

Théorème 4.12 *La suite u_k converge pour toute donnée initiale u_0 si et seulement si $\varrho(B) < 1$, si et seulement si $\|B\| < 1$ pour au moins une norme matricielle subordonnée $\|.\|$.*

4.5.1 Cas des M-matrices

Définition 4.7 (Matrice non-négative) *Une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est dite non-négative (resp. non-positive) si pour tout $i, j \in \{1, \cdots, n\}$, $a_{ij} \geq 0$ (resp. $a_{ij} \leq 0$).*

Théorème 4.13 (Perron-Frobenius) *Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice non-négative. Alors A a une valeur propre non-négative égale au rayon spectral de A, et un vecteur propre correspondant qui est aussi non-négatif.*

Définition 4.8 (Décomposition régulière ou regular splitting) *. Une décomposition $A = M - N$ est dite régulière si M est inversible et si M^{-1} et N sont toutes deux non-négatives.*

Théorème 4.14 *Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice, $A = M - N$ une décomposition régulière. Alors la méthode itérative converge pour toute donnée initiale si et seulement si A est inversible et A^{-1} est non-négative.*

Définition 4.9 (M-matrice) *. Une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est une M-matrice si elle possède les quatre propriétés suivantes : 1. $a_{ii} > 0$ pour tout i, 2. $a_{ij} \leq 0$ pour tout $(i, j), i \neq j$. 3. A est inversible. 4. A^{-1} est non négative.*

Corollaire 4.1 *Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une M-matrice, $A = M - N$ une décomposition régulière. Alors la méthode itérative $Mu_{k+1} = Nu_k + b$ converge pour toute donnée initiale vers la solution de $Au = b$.*

Définition 4.10 (Matrice à diagonale strictement dominante) *La matrice est dite à diagonale strictement dominante si*

$$\forall i, 1 \leq i \leq n, |a_{ii}| > \sum_{j \neq i} |a_{ij}|.$$

4.5.2 Cas des matrices hermitiennes

Théorème 4.15 (Householder-John) *Soit A une matrice hermitienne définie positive, $A = M - N$, où M est inversible. Si $M + N^*$ (qui est toujours hermitienne), est définie positive, la méthode itérative converge pour toute donnée initiale.*

4.6 Méthodes classiques

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice régulière et $b \in \mathbb{K}^n$. Il s'agit de résoudre le système $Au = b$ par une méthode itérative, c'est-à-dire de créer une suite u_k qui converge vers u. On note $D = \operatorname{diag}(A)$, E la matrice triangulaire inférieure vérifiant

$$\begin{cases} e_{ij} = 0, & i \leq j \\ e_{ij} = -a_{ij} & i > j \end{cases}$$

et F la matrice triangulaire supérieure vérifiant

$$\begin{cases} f_{ij} = 0, & i \geq j \\ f_{ij} = -a_{ij} & i > j \end{cases}$$

On a alors

$$A = \begin{pmatrix} \ddots & & -F \\ & D & \\ -E & & \ddots \end{pmatrix} = D - E - F$$

Méthode de Jacobi

$$(u_{k+1})_i = \frac{1}{a_{ii}} \left(b_i - \sum_{j=1, j \neq i}^{n} a_{ij} (u_k)_i \right) \quad \forall i \in \{1, \ldots, n\}$$

Correspond à la décomposition $M = D, N = E + F$.

Théorème 4.16 *Si A est à diagonale strictement dominante, l'algorithme de Jacobi converge.*

Méthode de Jacobi par blocs

Reprenons l'exemple des différences finies en dimension 2. On fait la décomposition

$$D = \begin{pmatrix} T & & & \\ & T & & \\ & & \ddots & \\ & & & T \end{pmatrix}, \quad E = \begin{pmatrix} 0 & & & \\ I & 0 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & I & 0 \end{pmatrix}$$

$M = D$, $N = E + F$.

Théorème 4.17 *Soit $A \in \mathcal{M}(\mathbb{R})$ une matrice symétrique inversible, décomposée en $A = D - E - E^T$, où D est diagonale définie positive, et E strictement triangulaire inférieure. Alors l'algorithme de Jacobi converge si et seulement si A et $2D - A$ sont définies positives.*

Méthode de Gauss-Seidel

$$(u_{k+1})_i = \frac{1}{a_{ii}}\left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}(u_{k+1})_j - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}(u_{k+1})_j\right) \quad \forall i \in \{1, \dots, n\}$$

Correspond à la décomposition $M = D - E, N = F$.

Méthodes de relaxation

$$u_{k+1} = \omega\hat{u}_{k+1} + (1-\omega)u_k$$

où $\hat{u}_{k+1}$ est obtenu à partir de uk par l'une des deux méthodes précédentes.

Avec la méthode de Jacobi

$$(u_{k+1})_i = \frac{\omega}{a_{ii}}\left(b_i - \sum_{j=1, j\neq i}^{n} a_{ij}(u_k)_j\right) + (1-\omega)(u_k)_i \ \forall i \in \{1, \dots, n\}.$$

Avec la méthode de Gauss-Seidel

$$(u_{k+1})_i = \frac{\omega}{a_{ii}}\left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}(u_{k+1})_j - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}(u_k)_j\right) + (1-\omega)(u_k)_i \quad \forall i \in \{1, \dots, n\}$$

Cette méthode de relaxation est appelée méthode S.O.R. (successive over relaxation) Toutes ces méthodes se mettent sous la forme

$$Mu_{k+1} = Nu_k + b$$

avec

Jacobi	$M = D$	$N = E + F$
Gauss-Seidel	$M = D - E$	$N = F$
SOR	$M = \frac{1}{\omega}D - E$	$N = \frac{1-\omega}{\omega}D + F$

Programmation d'une étape de l'algorithme de Jacobi :

```
Pour i=1:N
  S:=B(i)
     Pour j=1:I-1
     S=S-A(i,j)*X(j)
     Pour j=i+1:N
     S=S-A(i,j)*X(j)
  Y(i)=S/A(i,i)
Pour i=1:N
  X(i):=Y(i)
```

<u>Test d'arrêt</u> : tant que $\|r^{(k)}\| >$ eps, on continue.

Exercice 4.1 *Ecrire une étape de l'algorithme SOR.*

Il est d'usage d'affecter les noms suivants aux matrices des méthodes précédentes

Jacobi	$J = D^{-1}(E+F)$
SOR	$\mathcal{L}_\omega = (\frac{1}{\omega}D - E)^{-1}(\frac{1-\omega}{\omega}D + F)$

Théorème 4.18 *Soit A une matrice à diagonale strictement dominante. Si $0 < \omega \leq 1$, la méthode de relaxation converge.*

Lemme 4.1 *Pour tout $\omega \neq 0$, on a $\rho(\mathcal{L}_\omega) \geq |\omega - 1|$.*

On en déduit par le théorème 4.12,

Théorème 4.19 *Si la méthode de relaxation converge pour toute donnée initiale, on a*

$$0 < \omega < 2$$

Corollaire 4.2 *Soit A une matrice hermitienne définie positive. Si $\omega \in]0,2[$, la méthode de relaxation converge pour toute donnée initiale.*

C'est une conséquence du théorème 4.15.

4.7 Cas des matrices tridiagonales, comparaison des méthodes

Théorème 4.20 *Soit A une matrice tridiagonale. Alors $\rho(\mathcal{L}_1) = (\rho(J))^2$: les méthodes de Jacobi et Gauss-Seidel convergent ou divergent simultanément. Si elles convergent, la méthode de Gauss-Seidel est la plus rapide.*

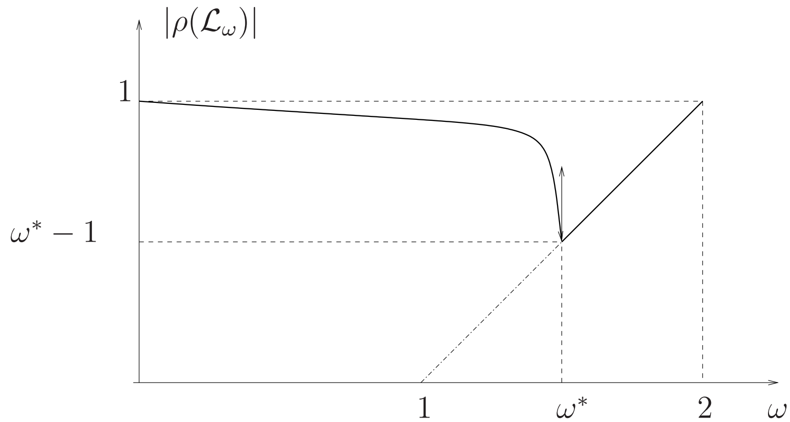


FIG. 4.1 – variations de $\rho(\mathcal{L}_\omega)$ en fonction de ω

Théorème 4.21 *Soit A une matrice tridiagonale telles que les valeurs propres de J soient réelles. Alors les méthodes de Jacobi et de relaxation convergent ou divergent simultanément pour $\omega \in]0,2[$. Si elles convergent, la fonction $\omega \mapsto \rho(\mathcal{L}_\omega)$ a l'allure suivante : avec $\omega^* = \dfrac{2}{1+\sqrt{1-(\rho(J))^2}}$.*

Remarque 4.2 *On ne connaît pas précisément ce ω^* si on ne connaît pas $\rho(J)$. Dans ce cas, le graphe ci-dessus montre que qu'il vaut mieux choisir ω trop grand que trop petit.*

4.8 Méthode de Richardson

On réécrit l'itération sous la forme

$$u_{k+1} = u_k + M^{-1} r_k.$$

Si on choisit $M^{-1} = \alpha I$, on obtient la méthode de Richardson

$$u_{k+1} = (I - \alpha A) u_k + \alpha b.$$

Si A est une matrice symétrique et définie positive, ses valeurs propres $\lambda_i(A)$ sont strictement positives, nous les ordonnons de façon croissante.

Théorème 4.22 *Soit A une matrice symétrique et définie positive d'ordre n. La méthode de Richardson converge si et seulement si $\alpha \in (0, 2/\rho(A))$. La convergence est optimale pour $\alpha_{opt} = \frac{2}{\lambda_1+\lambda_n}$. On a alors*

$$\rho(I - \alpha_{opt}) = \frac{\kappa(A)-1}{\kappa(A)+1}.$$

4.9 La matrice du laplacien en dimension 1

$$A_n = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & & \\ -1 & 2 & -1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & -1 & 2 & -1 \\ & & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

On a

$$\rho(J) = 1 - \frac{\pi^2}{2n^2} + \mathcal{O}(n^{-4}), \rho(\mathcal{L}_1) = 1 - \frac{\pi^2}{n^2} + \mathcal{O}(n^{-4}),$$

$$\omega^* = 2(1 - \frac{\pi}{n} + \mathcal{O}(n^{-2})), \rho(\mathcal{L}_{\omega^*}) = \omega^* - 1 == 1 - \frac{2\pi}{n} + \mathcal{O}(n^{-2}).$$

Pour n=100, pour obtenir une erreur de $\varepsilon = 10^{-1}$, on doit faire

- 9342 itérations de l'algorithme de Jacobi,
- 4671 itérations de l'algorithme de Gauss-Seidel,
- 75 itérations de l'algorithme de l'algorithme de relaxation optimale.

4.10 Complexité

Supposons la matrice A pleine. La complexité d'une itération est d'environ $2n^2$. Si l'on fait au moins n itérations, on a donc une complexité totale de $2n^3$, à comparer aux $2n^3/3$ de la méthode de Gauss.

Exercice 4.2 *Calculer le facteur de convergence pour l'algorithme de Richardson.*

Pour résoudre un système linéaire, on préfèrera les méthodes directes dans le cas des matrices pleines, et les méthodes itératives dans le cas des matrices creuses.