
Résolution numérique des équations non linéaires

EXERCICE 1 : ORDRE DE CONVERGENCE.

Soit I un intervalle fermé de $\mathbb{R}$, et soit $g : I \longrightarrow I$ une fonction assez régulière admettant un point fixe $a \in I$. On considère la suite des itérés suivante :

$$\begin{cases} x_0 \in I, \\ x_{n+1} = g(x_n), \forall n \in \mathbb{N} \end{cases} \quad (1)$$

Calculer l'erreur $e_n = x_n - a$ et donner une condition pour que la méthode du point fixe (1) soit d'ordre $p \geq 1$.

EXERCICE 2 : EXEMPLES D'APPLICATION.

1) On considère l'équation

$$e^{-x} = x \quad \text{dans } [0, +\infty[. \quad (2)$$

1.a) On définit la méthode itérative suivante :

$$\begin{cases} x_0 \in [0, +\infty[, \\ x_{n+1} = e^{-x_n}, \forall n \in \mathbb{N} \end{cases} \quad (3)$$

Montrer que la méthode (3) est convergente et donner l'ordre de convergence.

1.b) Appliquer la méthode de Newton à l'équation (2) et montrer que la convergence est quadratique.

2) Montrer que l'équation $x = -\ln(x)$ pour $x \in]0, +\infty[$ admet une unique solution. Montrer que la méthode itérative

$$\begin{cases} x_0 \in [0, +\infty[, \\ x_{n+1} = -\ln(x_n), \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

diverge. Proposer une méthode d'approximation de la solution.

EXERCICE 3 : POINTS FIXES ATTRACTIFS, RÉPULSIFS.

Soient I un intervalle fermé de $\mathbb{R}$, et $\phi : I \longrightarrow I$ une fonction dans $\mathcal{C}^1(I)$ admettant un point fixe $a \in I$ (i.e $\phi(a) = a$). On considère une suite des itérés définie par :

$$\begin{cases} x_0 \in I, \\ x_{n+1} = \phi(x_n), \quad \forall n \in \mathbb{N} \end{cases} \quad (4)$$

1) On suppose que $|\phi'(a)| < 1$.

1.a) Soit k tel que $|\phi'(a)| < k < 1$. Montrer que :

$$\exists h > 0; \quad |\phi'(x)| \leq k \quad \forall x \in [a-h, a+h].$$

1.b) Prouver que $\phi([a-h, a+h]) \subset [a-h, a+h]$ et que la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ donnée par (4) converge vers a pour tout $x_0 \in [a-h, a+h]$.

2) On suppose maintenant que $|\phi'(a)| > 1$. Peut-on utiliser l'algorithme (4) pour approcher a ?

3) Enfin, on étudie le cas où $|\phi'(a)| = 1$. En prenant $\phi(x) = \sin(x)$, $I = [0, \frac{\pi}{2}]$, et $a = 0$, puis $\phi(x) = \text{sh}(x)$, $I = [0, +\infty[$, et $a = 0$. Conclure.

EXERCICE 4 : EXTRACTION DE RACINES CARRÉES.

Pour un réel λ positif, on considère la fonction f_λ définie par : $f_\lambda(x) = x^2 - \lambda$ où $x \in \mathbb{R}$.

1) Pour un réel x_0 fixé, donner l'algorithme de Newton pour la résolution de l'équation $f_\lambda(x) = 0$.

2) On suppose maintenant que $x_0 > 0$.

2.a) Montrer que la suite $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ des itérées de Newton est minorée par $\sqrt{\lambda}$.

2.b) Montrer que la suite $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ converge et déterminer sa limite.

EXERCICE 5 : RACINES DE POLYNÔMES.

Soit p un polynôme de degré $n \geq 2$ à coefficients réels et on suppose qu'il a n racines distinctes réelles $x_n > x_{n-1} > \dots > x_1$.

- 1) Appliquer la méthode de Newton pour l'approximation des racines de p .
- 2) Démontrer que pour toute valeur initiale $x^0 > x_n$, la suite $(x^k)_{k \in \mathbb{N}}$ des itérées de Newton est strictement décroissante et converge vers la plus grande racine x_n .
- 3) Vérifier que la convergence est quadratique.

EXERCICE 6 : CAS D'UN SYSTÈME NON LINÉAIRE.

On considère le système d'équations suivant :

$$\begin{cases} -5x + 2 \sin x + 2 \cos y &= 0 \\ 2 \cos x + 2 \sin y - 5y &= 0 \end{cases} . \quad (5)$$

Notons $u = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ et $\bar{u}$ une solution du système (5).

1) Méthode du point fixe :

1.a) Montrer que le système (5) se réécrit sous la forme $\phi(u) = u$ où ϕ est une fonction strictement contractante dans $\mathbb{R}^2$ pour la norme $\|\cdot\|_1$.

1.b) Vérifier que la solution $\bar{u}$ est unique.

1.c) A partir de la fonction ϕ , construire une suite $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$ qui converge vers $\bar{u}$ et estimer la vitesse de convergence.

2) Méthode de Newton :

2.a) Écrire un algorithme de Newton pour approcher la solution du système (5).

2.b) La limite de cet algorithme est-elle toujours bien définie ?

EXERCICE 7 : CALCUL DES ÉLÉMENTS PROPRES.

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique d'ordre n . Soient λ une valeur propre simple de A et e_λ le vecteur propre normé associé à λ . Pour calculer (λ, e_λ) , on applique la méthode de Newton au système non linéaire suivant :

$$\begin{cases} Ax - \lambda x = 0 \\ x \cdot x = 1 \end{cases} .$$

Montrer que l'algorithme de Newton associé à ce problème est bien défini et localement convergent.

EXERCICE 8 : VARIANTE DE LA MÉTHODE DE NEWTON.

Soit $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et $a \in \mathbb{R}$ tel que $f(a) = 0$. Soient $x_0 \in \mathbb{R}$, $c \in \mathbb{R}_*^+$, $\lambda \in \mathbb{R}_*^+$.

On suppose que les hypothèses suivantes sont vérifiées :

- $a \in I = [x_0 - c, x_0 + c]$,
- $|f(x_0)| \leq \frac{c}{2\lambda}$,
- $|f'(x) - f'(y)| \leq \frac{1}{2\lambda}$ pour $(x, y) \in I^2$,
- $|f'(x)| \geq \frac{1}{\lambda}$.

On définit la suite $(x^n)_{n \in \mathbb{N}}$ par :

$$\begin{cases} x^0 = x_0, \\ x^{n+1} = x^n - \frac{f(x^n)}{f'(y)}, \quad \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}, \quad (6)$$

où $y \in I$ choisi de manière arbitraire.

1) Montrer par récurrence que la suite définie par (6) satisfait $x^n \in I$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ (On pourra utiliser que x^{n+1} s'écrit $x^{n+1} = x^n - x_0 - \frac{f(x^n) - f(x_0)}{f'(y)} - \frac{f(x_0)}{f'(y)}$).

2) Montrer que la suite $(x^n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par (6) vérifie

$$|x^n - a| \leq \frac{c}{2^n}$$

et quelle converge vers a de manière au moins linéaire.

3) On remplace l'algorithme (6) par

$$\begin{cases} x^0 = x_0, \\ x^{n+1} = x^n - \frac{f(x^n)}{f'(y^n)}, \quad \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}, \quad (7)$$

où la suite $(y^n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite donnée d'éléments de I . Montrer que la suite $(x^n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers a de manière au moins linéaire, et que cette convergence devient super-linéaire si $f'(y^n) \rightarrow f'(a)$ quand n tend vers l'infini.

4) On suppose maintenant que $n \geq 1$ et que $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$. La méthode définie par (6) ou (7) peut-elle se généraliser avec d'éventuelles modifications des hypothèses à la dimension n ?