Chapitre 4

Résolution numérique de systèmes linéaires par méthode itérative

Sommaire

4.1 Introduction 1
4.2 Norme de vecteurs et de matrices 4
4.3 Conditionnement 7
4.4 Suite de vecteurs et de matrices 9
4.5 Résultats généraux de convergence 11
4.5.1 Cas des M-matrices 11
4.5.2 Cas des matrices hermitiennes 12
4.6 Méthodes classiques 12
4.7 Cas des matrices tridiagonales, comparaison des méthodes 14
4.8 Méthode de Richardson 15
4.9 La matrice du laplacien en dimension 1 16
4.10 Complexité 16
4.11 Méthodes par blocs 16

4.1 Introduction

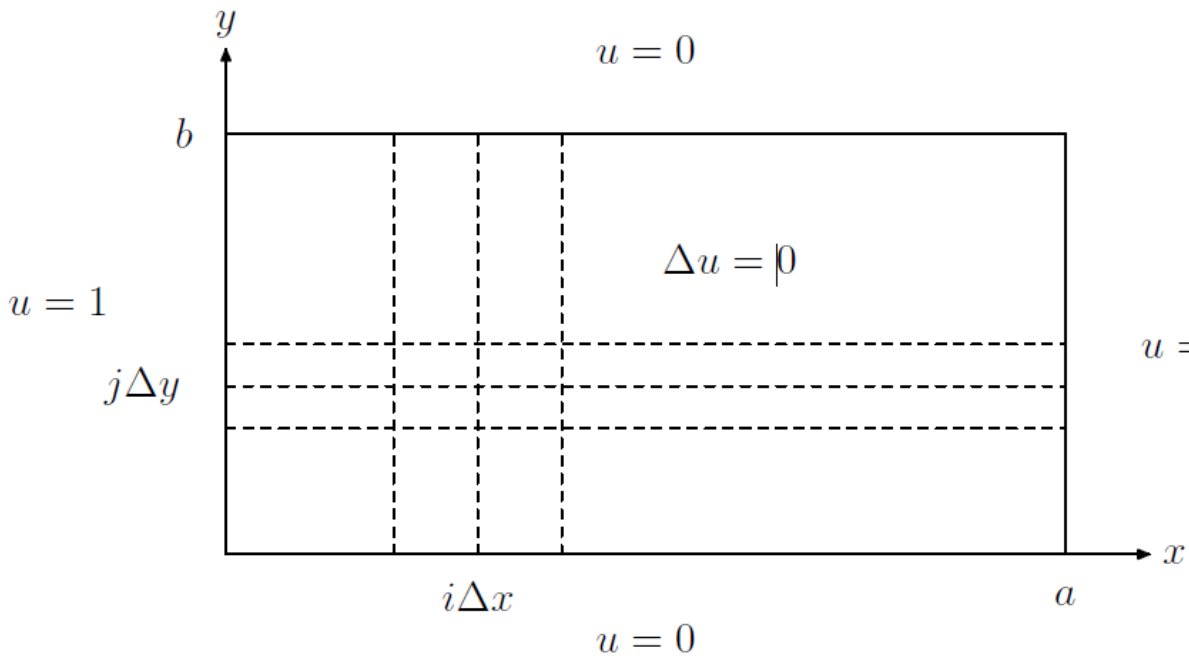
Exemple de base en analyse numérique : équation de la chaleur 2D (et même 3D). On cherche $u(x, y, t)$, solution de

$$\rho \partial_t u - \Delta u = f \text{ dans } \Omega; \quad \Delta u = \partial_{xx} u + \partial_{yy} u + \cdots$$

avec des conditions initiales et aux limites sur $\partial\Omega$.

Equilibre : $u(x, y)$

$$-\Delta u = f \text{ dans } \Omega.$$



On choisit des pas d'espace

$$\Delta x = \frac{a}{m+1}, \quad \Delta y = \frac{b}{m+1}$$

L'opérateur de Laplace en deux dimensions est discrétisé avec des *différences finies*

$$\partial_{xx} u \sim \frac{u(x + \Delta x, y) - 2u(x, y) + u(x - \Delta x, y)}{\Delta x^2};$$
$$\partial_{yy} u \sim \frac{u(x, y + \Delta y) - 2u(x, y) + u(x, y - \Delta y)}{\Delta y^2};$$

On obtient pour $u_{i,j} \sim u(i\Delta x, j\Delta y)$,

$$\frac{1}{\Delta x^2} \left(-u_{i-1,j} + 2u_{i,j} - u_{i+1,j}\right) \quad + \frac{1}{\Delta y^2} \left(-u_{i,j-1} + 2, u_{i,j} - u_{i,j+1}\right) = f(x_i, y_j)$$

On introduit les vecteurs

$$\boldsymbol{u}_j = \begin{pmatrix} u_{1,j} \\ \vdots \\ u_{m,j} \end{pmatrix}$$

pour $j = 1, \cdots, n$. On multiplie l'équation par Δy^2, et on obtient

$$-\boldsymbol{u}_{j-1} + T\boldsymbol{u}_j - \boldsymbol{u}_{j+1} = \delta u_{0,j}\boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{f}_j \Delta y^2$$

$$T = \begin{pmatrix} 2(1+\delta) & -\delta & 0 & & \\ -\delta & 2(1+\delta) & -\delta & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & -\delta & 2(1+\delta) & -\delta \\ & & 0 & -\delta & 2(1+\delta) \end{pmatrix} \quad \text{matrice } m \times m$$

On introduit maintenant le vecteur de toutes les inconnues

$$\boldsymbol{U} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{u}_1 \\ \vdots \\ \boldsymbol{u}_n \end{pmatrix}$$

On obtient un large système de $m \times n$ équations à $m \times n$ inconnues,

$$A\boldsymbol{U} = \boldsymbol{F}$$

avec

$$A = \begin{pmatrix} T & -I & 0 & & \\ -I & T & -I & 0 & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & 0 & -I & T & -I \\ & & 0 & -I & T \end{pmatrix}$$

La matrice A est CREUSE, TRIDIAGONALE PAR BLOCS. Dans chaque bloc-ligne de A, seuls 3 blocs sur les n sont non-identiquement nuls, avec dans chaque ligne de ces blocs au plus 3 éléments non-nuls. Ca fait dans chaque ligne de A 5 élément non nuls sur $m \times n$ (faire $m = 100, n = 50$). La décomposition de Gauss risque de remplir la matrice. Les méthodes itératives n'ont pas besoin de construire la matrice, mais plutôt de savoir faire le produit matrice-vecteur.

Pour construire une méthode itérative on écrit

$$A = M - N; A\boldsymbol{u} = b \iff M\boldsymbol{u} - N\boldsymbol{u} = b$$

$$\boldsymbol{u} = M^{-1}(N\boldsymbol{u} + b)$$

On utilise le point fixe

$$M\boldsymbol{u}_{k+1} = N\boldsymbol{u}_k + b$$

Compromis entre
- M est une bonne approximation de A (le meilleur M est A)
- le système à résoudre à chaque itération est simple et peu onéreux.

4.2 Norme de vecteurs et de matrices

Définition 4.1 *Une* ***norme*** *sur un espace vectoriel V est une application $\|\cdot\| : V \to \mathbb{R}^+$ qui vérifie les propriétés suivantes*
- $\|\boldsymbol{v}\| = 0 \Longleftrightarrow \boldsymbol{v} = 0$,
- $\|\alpha\boldsymbol{v}\| = |\alpha|\,\|\boldsymbol{v}\|\ \forall\alpha \in \mathbb{K},\ \forall\boldsymbol{v} \in V$,
- $\|\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}\| \leq \|\boldsymbol{u}\| + \|\boldsymbol{v}\|\ \ \forall\,(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}) \in V^2$ *(inégalité triangulaire)*

Une norme sur V est également appelée ***norme vectorielle*** *. On appelle* ***espace vectoriel normé*** *un espace vectoriel muni d'une norme.*

Les trois normes suivantes sont les plus couramment utilisées sur $\mathbb{C}^n$:

$$\begin{aligned}
\|\boldsymbol{v}\|_1 &= \sum_{i=1}^{n} |v_i| \\
\|\boldsymbol{v}\|_2 &= \left(\sum_{i=1}^{n} |v_i|^2\right)^{1/2} \\
\|\boldsymbol{v}\|_\infty &= \max_{1\leq i\leq n} |v_i|.
\end{aligned}$$

La deuxième norme est la norme euclidienne sur $\mathbb{C}^n$. Elle dérive du produit scalaire $(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})_2 = \sum_{i=1}^{n} u_i\bar{v}_i$.

Théorème 4.1 *Soit V un espace de dimension finie. Pour tout nombre réel $p \geq 1$, l'application $v \mapsto \|v\|_p$ définie par*

$$\|\boldsymbol{v}\|_p = \left(\sum_{i=1}^{n} |v_i|^p\right)^{1/p}$$

est une norme.

Rappel 4.1 *Pour $p > 1$ et $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, l'inégalité*

$$\|\boldsymbol{uv}\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |u_i v_i| \leq \left(\sum_{i=1}^{n} |u_i|^p\right)^{1/p} \left(\sum_{i=1}^{n} |v_i|^q\right)^{1/q} = \|\boldsymbol{u}\|_p \|\boldsymbol{v}\|_q$$

*s'appelle l'****inégalité de Hölder****.*

Définition 4.2 *Deux* ***normes*** $\|\cdot\|$ *et* $\|\cdot\|'$, *définies sur un même espace vectoriel* V, *sont* ***équivalentes*** *s'il existe deux constantes* C *et* C' *telles que*

$$\|\boldsymbol{v}\|' \leq C\|\boldsymbol{v}\| \quad et \quad \|\boldsymbol{v}\| \leq C'\|\boldsymbol{v}\|' \quad pour\ tout\ \boldsymbol{v} \in V.$$

Rappel 4.2 *Sur un espace vectoriel de dimension finie toutes les normes sont équivalentes.*

Définition 4.3 *Soit* $\mathcal{M}_n$ *l'anneau des matrices d'ordre* n, *à éléments dans le corps* $\mathbb{K}$. *Une* ***norme matricielle*** *est une application* $\|\cdot\| : \mathcal{M}_n \to \mathbb{R}^+$ *vérifiant*

1. $\|A\| = 0 \Longleftrightarrow A = 0$,
2. $\|\alpha A\| = |\alpha|\,\|A\|, \forall \alpha \in \mathbb{K},\ \forall A \in \mathcal{M}_n$,
3. $\|A+B\| \leq \|A\| + \|B\|,\ \forall\,(A,B) \in \mathcal{M}_n^2$ *(inégalité triangulaire)*
4. $\|AB\| \leq \|A\|\|B\|,\ \forall\,(A,B) \in \mathcal{M}_n^2$

Etant donné une norme vectorielle $\|\cdot\|$ sur $\mathbb{K}^n$, l'application $\|\cdot\| : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{R}^+$ définie par

$$\|A\| = \sup_{\substack{\boldsymbol{v}\in\mathbb{K}^n \\ \boldsymbol{v}\neq 0}} \frac{\|A\boldsymbol{v}\|}{\|\boldsymbol{v}\|} = \sup_{\substack{\boldsymbol{v}\in\mathbb{K}^n \\ \|\boldsymbol{v}\|\leq 1}} \|A\boldsymbol{v}\| = \sup_{\substack{\boldsymbol{v}\in\mathbb{K}^n \\ \|\boldsymbol{v}\|= 1}} \|A\boldsymbol{v}\|,$$

est une norme matricielle, appelée **norme matricielle subordonnée** (à la norme vectorielle donnée).

De plus

$$\|A\boldsymbol{v}\| \leq \|A\|\|\boldsymbol{v}\| \quad \forall \boldsymbol{v} \in \mathbb{K}^n$$

et la norme $\|A\|$ peut se définir aussi par

$$\|A\| = \inf\left\{\alpha \in \mathbb{R} : \|A\boldsymbol{v}\| \leq \alpha\|\boldsymbol{v}\|,\ \forall \boldsymbol{v} \in \mathbb{K}^n\right\}.$$

Il existe au moins un vecteur $\boldsymbol{u}$ tel que

$$\boldsymbol{u} \neq 0 \ \text{ et } \ \|A\boldsymbol{u}\| = \|A\|\|\boldsymbol{u}\|.$$

Enfin une norme subordonnée vérifie toujours

$$\|I\| = 1$$

Rappelons la définition du rayon spectral d'une matrice. Notons $\lambda_i(A)$ les n valeurs propres de la matrice $n \times n$ A. Le rayon spectral de A est

$$\rho(A) = \max_i |\lambda_i(A)|$$

Définition 4.4 *Soit $A = (a_{ij})$ une matrice carrée. Alors*

$$\|A\|_1 = \sup_{\substack{\boldsymbol{v}\in\mathbb{C}^n \\ \boldsymbol{v}\neq 0}} \frac{\|A\boldsymbol{v}\|_1}{\|\boldsymbol{v}\|_1}$$
$$\|A\|_2 = \sup_{\substack{\boldsymbol{v}\in\mathbb{C}^n \\ \boldsymbol{v}\neq 0}} \frac{\|A\boldsymbol{v}\|_2}{\|\boldsymbol{v}\|_2}$$
$$\|A\| = \sup_{\substack{\boldsymbol{v}\in\mathbb{C}^n \\ \boldsymbol{v}\neq 0}} \frac{\|A\boldsymbol{v}\|_\infty}{\|\boldsymbol{v}\|_\infty}$$

Théorème 4.2 *Soit $A = (a_{ij})$ une matrice carrée. Alors*

$$\|A\|_1 = \max_j \sum_i |a_{ij}|$$
$$\|A\|_2 = \sqrt{\rho\left(A^*A\right)} = \sqrt{\rho\left(AA^*\right)} = \|A^*\|_2$$
$$\|A\|_\infty = \max_i \sum_j |a_{ij}|$$

La norme $\|\cdot\|_2$ est invariante par transformation unitaire :

$$UU^* = I \Longrightarrow \|A\|_2 = \|AU\|_2 = \|UA\|_2 = \|U^*AU\|_2.$$

Par ailleurs, si la matrice A est normale, c'est-à-dire si $AA^* = A^*A$, alors

$$\|A\|_2 = \rho\left(A\right).$$

Remarque 4.1
1. *Si une matrice A est hermitienne, ou symétrique (donc normale), on a $\|A\|_2 = \rho\left(A\right)$.*
2. *Si une matrice A est unitaire ou orthogonale (donc normale), on a $\|A\|_2 = 1$.*

Théorème 4.3
1. *Soit A une matrice carrée quelconque et $\|\cdot\|$ une norme matricielle subordonnée ou non, quelconque. Alors*

$$\rho\left(A\right) \leq \|A\|.$$

2. *Etant donné une matrice A et un nombre $\varepsilon > 0$, il existe au moins une norme matricielle subordonnée telle que*

$$\|A\| \leq \rho\left(A\right) + \varepsilon.$$

Théorème 4.4 *L'application* $\|\cdot\|_E : \mathcal{M}_n \to \mathbb{R}^+$ *définie par*

$$\|A\|_E = \left(\sum_{i,j} |a_{ij}|^2\right)^{1/2} = \sqrt{tr\,(A^*A)},$$

pour toute matrice $A = (a_{ij})$ *d'ordre* n*, est une norme matricielle non subordonnée (pour* $n \geq 2$*), invariante par transformation unitaire :*

$$UU^* = I \Longrightarrow \|A\|_E = \|AU\|_E = \|UA\|_E = \|U^*AU\|_E$$

et qui vérifie

$$\|A\|_2 \leq \|A\|_E \leq \sqrt{n}\|A\|_2, \ \ \forall A \in \mathcal{M}_n.$$

De plus $\|I\|_E = \sqrt{n}$*.*

4.3 Conditionnement

On veut estimer $\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}$, où x est solution du système linéaire, et y solution du système perturbé

$$\begin{aligned} A\boldsymbol{x} &= \boldsymbol{b}, \\ (A + \Delta A)\,\boldsymbol{y} &= (\boldsymbol{b} + \Delta\boldsymbol{b})\,. \end{aligned}$$

Exemple de R.S. Wilson :

$$A = \begin{pmatrix} 10 & 7 & 8 & 7 \\ 7 & 5 & 6 & 5 \\ 8 & 6 & 10 & 9 \\ 7 & 5 & 9 & 10 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 32 \\ 23 \\ 33 \\ 31 \end{pmatrix},$$

$$A + \Delta A = \begin{pmatrix} 10 & 7 & 8,1 & 7,2 \\ 7,08 & 5,04 & 6 & 5 \\ 8 & 5,98 & 9,89 & 9 \\ 6,99 & 4,99 & 9 & 9,98 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b + \Delta b} = \begin{pmatrix} 32,01 \\ 22,99 \\ 33,01 \\ 30,99 \end{pmatrix},$$

$$\Delta A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0,1 & 0,2 \\ 0,08 & 0,04 & 0 & 0 \\ 0 & -0,02 & -0,11 & 0 \\ -0,01 & -0,01 & 0 & -0,02 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\Delta b} = \begin{pmatrix} 0,01 \\ -0,01 \\ 0,01 \\ -0,01 \end{pmatrix}.$$

$$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \Longleftrightarrow \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$A\boldsymbol{u} = \boldsymbol{b} + \boldsymbol{\Delta b} \Longleftrightarrow \boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} 1,82 \\ -0,36 \\ 1,35 \\ 0,79 \end{pmatrix}, \Longrightarrow \boldsymbol{\Delta x} = \boldsymbol{u} - \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 0,82 \\ -1,36 \\ 0,35 \\ -0,21 \end{pmatrix}$$

$$(A + \Delta A)\,\boldsymbol{v} = \boldsymbol{b} \Longleftrightarrow \boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} -81 \\ 137 \\ -34 \\ 22 \end{pmatrix}, \Longrightarrow \boldsymbol{\Delta x} = \boldsymbol{v} - \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} -82 \\ 136 \\ -35 \\ 21 \end{pmatrix}$$

Définition 4.5 *Soit $\|.\|$ une norme matricielle subordonnée, le conditionnement d'une matrice régulière A, associé à cette norme, est le nombre*

$$\kappa(A) = \mathrm{cond}(A) = \|A\| \left\|A^{-1}\right\|.$$

Nous noterons $\mathrm{cond}_p(A) = \|A\|_p \left\|A^{-1}\right\|_p$.

Théorème 4.5 *Soit A une matrice inversible. Soient $\boldsymbol{x}$ et $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{\Delta x}$ les solutions respectives de*

$$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \text{ et } A\left(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{\Delta x}\right) = \boldsymbol{b} + \boldsymbol{\Delta b}.$$

Supposons $\boldsymbol{b} \neq \boldsymbol{0}$, alors l'inégalité

$$\frac{\|\boldsymbol{\Delta x}\|}{\|\boldsymbol{x}\|} \leq \mathrm{cond}(A) \frac{\|\boldsymbol{\Delta b}\|}{\|\boldsymbol{b}\|}$$

est satisfaite, et c'est la meilleure possible : pour une matrice A donnée, on peut trouver des vecteurs $\boldsymbol{b} \neq \boldsymbol{0}$ et $\boldsymbol{\Delta b} \neq \boldsymbol{0}$ tels qu'elle devienne une égalité.

Démonstration Il suffit de soustraire les 2 équations. $\boldsymbol{\Delta x}$ est solution du système linéaire

$$A\boldsymbol{\Delta x} = \boldsymbol{\Delta b}$$

d'où

$$\|\boldsymbol{\Delta x}\| \leq \left\|A^{-1}\right\| \frac{\|\boldsymbol{\Delta b}\|}{\|\boldsymbol{b}\|} \|\boldsymbol{b}\| \leq \left\|A^{-1}\right\| \|A\| \|\boldsymbol{x}\| \frac{\|\boldsymbol{\Delta b}\|}{\|\boldsymbol{b}\|}$$

■

Théorème 4.6 *Soit A une matrice inversible. Soient $\boldsymbol{x}$ et $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{\Delta x}$ les solutions respectives de*

$$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \text{ et } (A + \Delta A)\left(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{\Delta x}\right) = \boldsymbol{b}.$$

Supposons $\boldsymbol{b} \neq \boldsymbol{0}$, alors l'inégalité

$$\frac{\|\boldsymbol{\Delta x}\|}{\|\boldsymbol{x} + \boldsymbol{\Delta x}\|} \leq \mathrm{cond}(A) \frac{\|\Delta A\|}{\|A\|}.$$

est satisfaite, et c'est la meilleure possible : pour une matrice A donnée, on peut trouver un vecteur $\boldsymbol{b} \neq \boldsymbol{0}$ et une matrice $\Delta A \neq 0$ tels qu'elle devienne une égalité.

Théorème 4.7 *1. Pour toute une matrice inversible A,*

$$\begin{aligned} \mathrm{cond}(A) &\geq 1, \\ \mathrm{cond}(A) &= \mathrm{cond}(A^{-1}), \\ \mathrm{cond}(\alpha A) &= \mathrm{cond}(A), \text{ pour tout scalaire } \alpha \neq 0 \end{aligned}$$

2. Pour toute matrice inversible A,

$$\mathrm{cond}_2(A) = \frac{\mu_{\max}}{\mu_{\min}}$$

où $\mu_{\max}$ et $\mu_{\min}$ sont respectivement la plus grande et la plus petite valeur singulière de A.

3. Si A est une matrice normale,

$$\mathrm{cond}_2(A) = \frac{\max\limits_i |\lambda_i(A)|}{\min\limits_i |\lambda_i(A)|}$$

où les $\lambda_i(A)$ sont les valeurs propres de A.

4. Le conditionnement $\mathrm{cond}_2(A)$ d'une matrice unitaire ou orthogonale vaut 1.

5. Le conditionnement $\mathrm{cond}_2(A)$ est invariant par transformation unitaire

$$UU^* = I \Longrightarrow \mathrm{cond}_2(A) = \mathrm{cond}_2(AU) = \mathrm{cond}_2(UA) = \mathrm{cond}_2(U^*AU).$$

Rappel 4.3 *Les valeurs singulières d'une matrice rectangulaire A sont les racines carrées positives des valeurs propres de A^*A.*

Lorsque l'on veut résoudre un système linéaire $Ax = b$ avec une matrice mal conditionnée, il peut être intéressant de de multiplier à gauche par une matrice C telle CA soit mieux conditionnée. L'exemple le plus simple est le *préconditionnement diagonal*, où la matrice C est la matrice diagonale constituée des inverses des éléments diagonaux de A : c'est l'algorithme de Richardson que nous verrons plus loin.

4.4 Suite de vecteurs et de matrices

Définition 4.6 *Soit V un espace vectoriel muni d'une norme $\|.\|$, on dit qu'une suite $(\boldsymbol{v}_k)$ d'éléments de V converge vers un élément $\boldsymbol{v} \in V$, si*

$$\lim_{k\to\infty} \|\boldsymbol{v}_k - \boldsymbol{v}\| = 0$$

et on écrit

$$\boldsymbol{v} = \lim_{k\to\infty} \boldsymbol{v}_k.$$

Remarque 4.1 *Sur un espace vectoriel de dimension finie, toutes les normes sont équivalentes. Donc $\boldsymbol{v}_k$ tend vers $\boldsymbol{v}$ si et seulement si $\|\boldsymbol{v}_k - \boldsymbol{v}\|$ tend vers 0 pour une norme.*

Théorème 4.8 *1. Soit $\|\cdot\|$ une norme matricielle subordonnée, et B une matrice vérifiant*

$$\|B\| < 1.$$

Alors la matrice $(I + B)$ est inversible, et

$$\| (I + B)^{-1} \| \leq \frac{1}{1 - \|B\|}.$$

2. Si une matrice de la forme $(I + B)$ est singulière, alors nécessairement

$$\|B\| \geq 1$$

pour toute norme matricielle, subordonnée ou non.

La démonstration repose sur la série de Neumann $\sum B^n$.

Théorème 4.9 *Soit B une matrice carrée. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

1. $lim_{k\to\infty} B^k = 0$,
2. $lim_{k\to\infty} B^k v = 0$ *pour tout vecteur* v,
3. $\varrho(B) < 1$,
4. $\|B\| < 1$ *pour au moins une norme matricielle subordonnée* $\|.\|$.

Théorème 4.10 *Soit B une matrice carrée, et $\|.\|$ une norme matricielle quelconque. Alors*

$$lim_{k\to\infty} \|B^k\|^{1/k} = \varrho(B).$$

Soit donc une suite $\boldsymbol{v}_k$ définie par $\boldsymbol{v}_{k+1} = B\boldsymbol{v}_k$. On a $\boldsymbol{v}_k = B^k \boldsymbol{v}_0$.

$$\frac{\|\boldsymbol{v}_k\|}{\|\boldsymbol{v}_0\|} \leq \|B^k\|$$

Si l'on veut une erreur inférieure à ε

$$\frac{\|\boldsymbol{v}_k\|}{\|\boldsymbol{v}_0\|} \leq \|B^k\| \leq \varepsilon$$

$$\|B^k\|^{\frac{1}{k}} \leq \varepsilon^{\frac{1}{k}}$$

Définition 4.7 *On définit le facteur de convergence local de la méthode itérative dont la matrice d'itération est B est $\rho_k(B) = \|B^k\|^{\frac{1}{k}}$. Le facteur asymptotique de convergence asymptotique est $\rho(B)$. Le taux de convergence moyen est $R_k(B) = -\ln \rho_k(B)$, le taux de convergence asymptotique est $R(B) = -\ln \rho(B)$.*

Théorème 4.11 *Le nombre d'itérations nécessaires pour réduire l'erreur d'un facteur ε est au moins égal à $K = \dfrac{-\ln \varepsilon}{R(B)}$.*

4.5 Résultats généraux de convergence

Soit donc l'algorithme

$$M\boldsymbol{u}_{k+1} = N\boldsymbol{u}_k + b \tag{4.1}$$

avec $M - N = A$. Si la suite converge, elle converge vers la solution $\boldsymbol{u}$ de $A\boldsymbol{u} = \boldsymbol{b}$, et l'erreur $\boldsymbol{e}_k = \boldsymbol{u}_k - \boldsymbol{u}$ vérifie $M\boldsymbol{e}_{k+1} = N\boldsymbol{e}_k$. On note $B = M^{-1}N$, c'est la *matrice de l'itération*. On note aussi $\boldsymbol{r}_k := \boldsymbol{b} - A\boldsymbol{u}_k = A(\boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}_k) = A\boldsymbol{e}_k$ le *résidu* à l'étape k. D'après le théorème 4.9, on a

Théorème 4.12 *La suite $\boldsymbol{u}_k$ converge pour toute donnée initiale $\boldsymbol{u}_0$ si et seulement si $\varrho(B) < 1$, si et seulement si $\|B\| < 1$ pour au moins une norme matricielle subordonnée $\|.\|$.*

4.5.1 Cas des M-matrices

Définition 4.8 (Matrice non-négative) *Une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est dite non-négative (resp. non-positive) si pour tout $i, j \in \{1, \cdots, n\}$, $a_{ij} \geq 0$ (resp. $a_{ij} \leq 0$).*

Théorème 4.13 (Perron-Frobenius) *Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice non-négative. Alors A a une valeur propre non-négative égale au rayon spectral de A, et un vecteur propre correspondant qui est aussi non-négatif.*

Définition 4.9 (Décomposition régulière ou regular splitting) *. Une décomposition $A = M - N$ est dite régulière si M est inversible et si M^{-1} et N sont toutes deux non-négatives.*

Théorème 4.14 *Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice, $A = M - N$ une décomposition régulière. Alors la méthode itérative converge pour toute donnée initiale si et seulement si A est inversible et A^{-1} est non-négative.*

Définition 4.10 (M-matrice) *. Une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est une M-matrice si elle possède les quatre propriétés suivantes : 1. $a_{ii} > 0$ pour tout i, 2. $a_{ij} \leq 0$ pour tout $(i, j), i \neq j$. 3. A est inversible. 4. A^{-1} est non négative.*

Corollaire 4.1 *Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une M-matrice, $A = M - N$ une décomposition régulière. Alors la méthode itérative $M\boldsymbol{u}_{k+1} = N\boldsymbol{u}_k + \boldsymbol{b}$ converge pour toute donnée initiale vers la solution de $A\boldsymbol{u} = \boldsymbol{b}$.*

Définition 4.11 (Matrice à diagonale strictement dominante) *La matrice est dite à diagonale strictement dominante si*

$$\forall i, 1 \leq i \leq n, |a_{ii}| > \sum_{j \neq i} |a_{ij}|.$$

4.5.2 Cas des matrices hermitiennes

Théorème 4.15 (Householder-John) *Soit A une matrice hermitienne définie positive, $A = M - N$, où M est inversible. Si $M + N^*$ (qui est toujours hermitienne), est définie positive, la méthode itérative converge pour toute donnée initiale.*

4.6 Méthodes classiques

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice régulière et $\boldsymbol{b} \in \mathbb{K}^n$. Il s'agit de résoudre le système $A\boldsymbol{u} = \boldsymbol{b}$ par une méthode itérative, c'est-à-dire de créer une suite $\boldsymbol{u}_k$ qui converge vers $\boldsymbol{u}$. On note $D = \text{diag}(A)$, E la matrice triangulaire inférieure vérifiant

$$\begin{cases} e_{ij} = 0, & i \leq j \\ e_{ij} = -a_{ij} & i > j \end{cases},$$

et F la matrice triangulaire supérieure vérifiant

$$\begin{cases} f_{ij} = 0, & i \geq j \\ f_{ij} = -a_{ij} & i > j \end{cases}$$

On a alors

$$A = \begin{pmatrix} \ddots & & -F \\ & D & \\ -E & & \ddots \end{pmatrix} = D - E - F$$

Méthode de Jacobi

On choisit $M = D, N = E + F$, et une étape de l'algorithme s'écrit

$$D\boldsymbol{u}_{k+1} = (E + F)\boldsymbol{u}_k + \boldsymbol{b}.$$

Chaque composante $(u_{k+1})_i$ peut être calculée explicitement par

$$(u_{k+1})_i = \frac{1}{a_{ii}} \left(b_i - \sum_{j=1, j\neq i}^{n} a_{ij}(u_k)_i \right) \quad \forall i \in \{1, \ldots, n\}.$$

Exemple de rrogrammation d'une étape de l'algorithme de Jacobi :

```
Pour i=1:N
  S:=B(i)
     Pour j=1:I-1
     S=S-A(i,j)*X(j)
     Pour j=i+1:N
     S=S-A(i,j)*X(j)
  Y(i)=S/A(i,i)
Pour i=1:N
  X(i):=Y(i)
```

Test d'arrêt : tant que $\|\boldsymbol{r}_k\| >$ eps, on continue.

Théorème 4.16 *Si A est à diagonale strictement dominante, l'algorithme de Jacobi converge.*

Théorème 4.17 *Soit $A \in \mathcal{M}(\mathbb{R})$ une matrice symétrique inversible, décomposée en $A = D - E - E^T$, où D est diagonale définie positive, et E strictement triangulaire inférieure. Alors l'algorithme de Jacobi converge si et seulement si A et $2D - A$ sont définies positives.*

Méthode de Gauss-Seidel

Elle correspond à la décomposition $M = D - E, N = F$.

$$(D - E)\boldsymbol{u}_{k+1} = F\boldsymbol{u}_k + \boldsymbol{b}.$$

Le calcul de $\boldsymbol{u}_{k+1}$ en fonction de $\boldsymbol{u}_k$ nécessite la résolution d'un système triangulaire inférieur de matrice $D - E$.

Méthode de relaxation

Elle est apppelée aussi méthode S.O.R. (successive over relaxation). Elle correspond à la décomposition $M = \frac{1}{\omega}D - E$, $N = \frac{1-\omega}{\omega}D + F$, ce qui s'écrit

$$(\frac{1}{\omega}D - E)\boldsymbol{u}_{k+1} = (\frac{1-\omega}{\omega}D + F)\boldsymbol{u}_k + \boldsymbol{b}.$$

De nouveau, une étape de l'algorithme nécessite la résolution d'un système triangulaire. La méthode de Gauss-Seidel correspond à $\omega = 1$.

Tableau résumé

Jacobi	$M = D$	$N = E + F$
Gauss-Seidel	$M = D - E$	$N = F$
SOR	$M = \frac{1}{\omega}D - E$	$N = \frac{1-\omega}{\omega}D + F$

Exercice 4.1 *Ecrire une étape de l'algorithme SOR.*

Il est d'usage d'affecter les noms suivants aux matrices des méthodes précédentes

Jacobi	$J = D^{-1}(E + F)$
SOR	$\mathcal{L}_\omega = (\frac{1}{\omega}D - E)^{-1}(\frac{1-\omega}{\omega}D + F)$

Théorème 4.18 *Soit A une matrice à diagonale strictement dominante. Si $0 < \omega \leq 1$, la méthode de relaxation converge.*

Théorème 4.19 *Si la méthode de relaxation converge pour toute donnée initiale, on a*

$$0 < \omega < 2$$

La preuve repose sur le lemme suivant, et le théorème 4.12.

Lemme 4.1 *Pour tout $\omega \neq 0$, on a $\rho(\mathcal{L}_\omega) \geq |\omega - 1|$.*

Théorème 4.20 *Soit A une matrice hermitienne définie positive. Si $\omega \in]0, 2[$, la méthode de relaxation converge pour toute donnée initiale.*

C'est une conséquence du théorème 4.15.

4.7 Cas des matrices tridiagonales, comparaison des méthodes

Théorème 4.21 *Soit A une matrice tridiagonale. Alors $\rho(\mathcal{L}_1) = (\rho(J))^2$: les méthodes de Jacobi et Gauss-Seidel convergent ou divergent simultanément. Si elles convergent, la méthode de Gauss-Seidel est la plus rapide.*

Théorème 4.22 *Soit A une matrice tridiagonale telles que les valeurs propres de J soient réelles. Alors les méthodes de Jacobi et de relaxation convergent ou divergent simultanément pour $\omega \in]0,2[$. Si elles convergent, la fonction $\omega \mapsto \rho(\mathcal{L}_\omega)$ a l'allure suivante : avec $\omega^* = \dfrac{2}{1+\sqrt{1-(\rho(J))^2}}$. Le facteur de convergence optimal est*

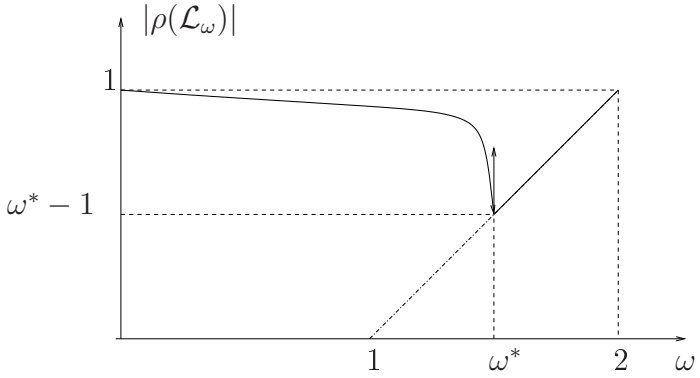


FIGURE 4.1 – variations de $\rho(\mathcal{L}_\omega)$ en fonction de ω

$\rho(\mathcal{L}_{\omega^*}) = \omega^* - 1$.

Remarque 4.2 *On ne connaît pas précisément ce ω^* si on ne connaît pas $\rho(J)$. Dans ce cas, le graphe ci-dessus montre que qu'il vaut mieux choisir ω trop grand que trop petit.*

4.8 Méthode de Richardson

On réécrit l'itération sous la forme

$$\boldsymbol{u}_{k+1} = \boldsymbol{u}_k + M^{-1}\boldsymbol{r}_k.$$

Si on choisit $M^{-1} = \alpha I$, on obtient la méthode de Richardson

$$\boldsymbol{u}_{k+1} = (I - \alpha A)\boldsymbol{u}_k + \alpha \boldsymbol{b}.$$

Si A est une matrice symétrique et définie positive, ses valeurs propres $\lambda_i(A)$ sont strictement positives, nous les ordonnons de façon croissante.

Théorème 4.23 *Soit A une matrice symétrique et définie positive d'ordre n. La méthode de Richardson converge si et seulement si $\alpha \in (0, 2/\rho(A))$. La convergence est optimale pour $\alpha_{opt} = \frac{2}{\lambda_1+\lambda_n}$. On a alors*

$$\rho(I - \alpha_{opt}) = \frac{\kappa(A)-1}{\kappa(A)+1}.$$

4.9 La matrice du laplacien en dimension 1

$$A_n = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & & \\ -1 & 2 & -1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & -1 & 2 & -1 \\ & & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

On a

$$\rho(J) = 1 - \frac{\pi^2}{2n^2} + \mathcal{O}(n^{-4}), \rho(\mathcal{L}_1) = 1 - \frac{\pi^2}{n^2} + \mathcal{O}(n^{-4}),$$

$$\omega^* = 2(1 - \frac{\pi}{n} + \mathcal{O}(n^{-2})), \rho(\mathcal{L}_{\omega^*}) = \omega^* - 1 == 1 - \frac{2\pi}{n} + \mathcal{O}(n^{-2}).$$

Pour n=100, pour obtenir une erreur de $\varepsilon = 10^{-1}$, on doit faire

- 9342 itérations de l'algorithme de Jacobi,
- 4671 itérations de l'algorithme de Gauss-Seidel,
- 75 itérations de l'algorithme de l'algorithme de relaxation optimale.

4.10 Complexité

Supposons la matrice A pleine. La complexité d'une itération est d'environ $2n^2$. Si l'on fait au moins n itérations, on a donc une complexité totale de $2n^3$, à comparer aux $2n^3/3$ de la méthode de Gauss.

Pour résoudre un système linéaire, on préfèrera les méthodes directes dans le cas des matrices pleines, et les méthodes itératives dans le cas des matrices creuses.

4.11 Méthodes par blocs

Reprenons l'exemple des différences finies en dimension 2. La matrice A est tridiagonale par blocs. On fait la décomposition

$$D = \begin{pmatrix} T & & & \\ & T & & \\ & & \ddots & \\ & & & T \end{pmatrix}, \quad E = \begin{pmatrix} 0 & & & \\ I & 0 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & I & 0 \end{pmatrix}, \quad F = E^T$$

ET on découpera aussi le vecteur $\boldsymbol{u}_k$ par blocs. Tous les théorèmes précédents ont un analogue. Voir [4].