SuP Galilée, spécialité MACS **Analyse Numérique I**
Année 2011-2012

Contrôle du Lundi 7 novembre 2011

Corrigé

Problème 1. Equations non linéaires (10 points)

Quelques théorèmes utiles :

Théorème des valeurs intermédiaires :Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une application continue, alors pour tout réel u compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe au moins un réel ξ compris entre a et b tel que $f(\xi) = u$.
Théorème des accroissements finis Soient a et b deux réels tels que $a < b$. Soit f une fonction à valeurs réelles continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$. il existe un réel ξ dans $]a, b[$ tel que $f(b) - f(a) = (b - a)f'(\xi)$.
Théorème de Rolle : Soient a et b deux réels tels que $a < b$. Soit f une fonction à valeurs réelles continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$ telle que $f(a) = f(b)$. Alors il existe (au moins) un réel ξ dans $]a, b[$ tel que $f'(\xi) = 0$.

1) Soit g une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$ telle que $g(a) = g(b) = 0$, $g''(x) > 0$ pour tout x dans $]a, b[$. La fonction g étant de dérivée seconde strictement positive est strictement convexe, et donc pour tout $x = ta+(1-t)b$ dans $]a, b[$, avec $t \in]0, 1[$,

$$g(x) < tg(a) + (1 - t)g(b) < 0$$

.

Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$ telle que $f(a) < 0$, $f(b) > 0$, $f'(x) > 0$ et $f''(x) > 0$ pour tout x dans $[a, b]$.
2)

a) **Montrer qu'il existe un unique point c dans $[a, b]$ tel que $f(c) = 0$.** On applique le théorème des valeurs intermédiaires avec $u = 0$ (cas particulier connu sous le nom de théorème de Bolzano).

b) f ne s'annule pas sur $[a, c[$, elle est donc de sugne constant, donc négative. Même raisonnement sur $]c, b]$.

c) **Montrer qu'il existe m_1 et m_2 tels que pour tout x dans $[a, b]$,**

$$0 < m_1 \leq f'(x), \quad 0 < f"(x) \leq m_2.$$

C'est juste un résultat de compacité sur $\mathbb{R}$: *toute fonction continue sur un compact de $\mathbb{R}$ y est bornée et atteint sa borne inférieure.* On applique ce résultat à f' et f", et comme elles ne s'annulent pas...

d) **Décrire les algorithmes de dichotomie, de Newton et de la sécante pour calculer c. Donner leurs propriétés de convergence.** Voir cours.

3) Soit p le polynôme de degré 1 tel que $p(a) = f(a)$ et $p(b) = f(b)$, et soit c_1 tel que $p(c_1) = 0$. Définissons la fonction $g = f - p$. Puisque $g(a) = g(b) = 0$, et que $g" = f" > 0$ sur $[a, b]$, nous pouvons lui appliquer 1) et en déduire que $f(c_1) = g(c_1) < 0$. D'après 2)b), $c_1 \in]0, c[$.

4) On définit maintenant la suite c_n de la manière suivante.

- On pose $c_0 = a$.
- c_n étant défini, on calcule c_{n+1} : p_n est l'unique polynôme de degré un tel que $p_n(c_n) = f(c_n)$ et $p_n(b) = f(b)$, et on définit c_{n+1} par l'équation $p_n(c_{n+1}) = 0$.

a) **Mettre explicitement cette récurrence sous la forme $c_{n+1} = \varphi(c_n)$.** Il suffit d'écrire

$$p_n = \frac{x - c_n}{b - c_n} f(b) + \frac{x - b}{c_n - b} f(c_n)$$

ou encore

$$p_n = \frac{1}{b - c_n} \left((x - c_n) f(b) - (x - b) f(c_n) \right),$$

$$\text{et } p_n(x) = 0 \iff (x - c_n) f(b) - (x - b) f(c_n).$$

On en déduit la valeur de c_{n+1} :

$$c_{n+1} = \frac{c_n f(b) - b f(c_n)}{f(b) - f(c_n)}. \tag{1}$$

Cette dernière formule permet de définir la fonction φ par

$$\varphi(x) = \frac{x f(b) - b f(x)}{f(b) - f(x)}.$$

b) **Démontrer que (c_n) est une suite strictement croissante contenue dans l'intervalle** $[a, c]$: on raisonne comme en 3) a).

c) **Montrer que la suite (c_n) converge vers** c : la suite est croissante et majorée par c. Elle converge donc vers $\bar{c}$ et on a aussi $f(c_n) \to f(\bar{c})$. On peut passer à la limite dans (1) et obtenir

$$\bar{c} = \frac{\bar{c} f(b) - b f(\bar{c})}{f(b) - f(\bar{c})},$$

ou encore $(b-\bar{c})f(\bar{c})=0$, ce qui donne $\bar{c}=0$, et donc puisque c est l'unique point qui annule f, $\bar{c}=c$: la suite c_n converge vers c. On applique maintenant le théorème des accroissements finis à la fonction f sur $[c_n,c]$: pour tout $n\geq 0$, il existe $\xi_n \in]c_n,c[$ tel que $f(c_n)=(c-c_n)f'(\xi_n)$. Il suffit donc d'appliquer 2)c) pour obtenir $c-c_n\leq \frac{|f(c_n)|}{m_1}$.

Problème 2. Systèmes linéaires (10 points)

Soit B une matrice carrée d'ordre p inversible et A la matrice d'ordre $n=2p$ définie par

$$A=\begin{pmatrix} I & -B \\ -B^T & I \end{pmatrix}$$

On cherche à résoudre le système linéaire $A\boldsymbol{U}=\boldsymbol{b}$. On pourra utiliser dans l'analyse la décomposition par blocs naturelle $\boldsymbol{U}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{u}\\ \boldsymbol{v}\end{pmatrix}$.

On décompose la matrice A comme dans le cours en $A=I-E-F$ et on étudie divers algorithmes itératifs pour la résolution du système linéaire.

1) Algorithme de Jacobi : il s'écrit $D\boldsymbol{U}_{k+1}=(E+F)\boldsymbol{U}_k+\boldsymbol{b}$. Donc $J=E+F=\begin{pmatrix} 0 & -B \\ -B^T & 0 \end{pmatrix}$ μ est valeur propre de la matrice de Jacobi J si et seulement si il existe un vecteur $\boldsymbol{X}=(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ non nul tel que $J\boldsymbol{X}=\mu X$, ou encore

$$\begin{pmatrix} -\mu I & -B \\ -B^T & -\mu I \end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{x}\\ \boldsymbol{y}\end{pmatrix}=0, \quad \text{ou encore} \quad \left\{\begin{array}{l} -\mu\boldsymbol{x}-B\boldsymbol{y}=0 \\ -B^T\boldsymbol{x}-\mu\boldsymbol{y}=0 \end{array}\right.$$

Tirons $\mu\boldsymbol{x}$ du premier bloc, et substituons le dans $\mu\times$ le deuxième :

$$B^TB\boldsymbol{y}-\mu^2\boldsymbol{y}=0$$

Donc si μ est valeur propre de J, μ^2 est valeur propre de B^TB. Cette dernière matrice étant symétrique définie positive, elle a p valeurs propres strictement positives $\alpha_1,\ldots,\alpha_p$, ce qui donne $2p$ valeurs propres pour J, $\pm\sqrt{\alpha_1},\ldots,\sqrt{\alpha_p}$ On a donc $\rho(J)=\sqrt{\rho(B^TB)}=\|B\|_2$, et l'algorithme de Jacobi converge si et seulement si $\|B\|_2<1$.

2) Soit un nombre réel ω. L'algorithme de relaxation s'écrit

$$(D-\omega E)\boldsymbol{U}_{k+1}=((1-\omega)I+\omega F)\boldsymbol{U}_k+\boldsymbol{b},$$

donc $\mathcal{L}_\omega=(I-\omega E)^{-1}((1-\omega)I+\omega F)$. On vérifie par blocs que $E^2=0$, et donc que $(I-\omega E)(I+\omega E)=I$, si bien que l'inverse de la matrice $(I-\omega E)$ est $(I+\omega E)$. Donc $\mathcal{L}_\omega=(I+\omega E)((1-\omega)I+\omega F)$,

$$\mathcal{L}_\omega=\begin{pmatrix} (1-\omega)I & \omega B \\ \omega(1-\omega)B^T & (1-\omega)I+\omega^2B^TB \end{pmatrix}$$

Les valeurs propres de $\mathcal{L}_\omega$ sont données par

$$\begin{pmatrix} (1-\omega-\lambda)I & \omega B \\ \omega(1-\omega)B^T & (1-\omega-\lambda)I+\omega^2 B^T B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{y} \end{pmatrix} = 0,$$

$$\text{ou encore} \left\{ \begin{array}{c} (1-\omega-\lambda)\boldsymbol{x}+\omega B\boldsymbol{y}=0 \\ \omega(1-\omega)B^T\boldsymbol{x}+((1-\omega-\lambda)I+\omega^2 B^T B)\boldsymbol{y}=0 \end{array} \right.$$

Pour $\omega \neq 1$, comme pour Jacobi, nous extrayons x du premier bloc et reportons dans le deuxième, pour obtenir

$$\left(\omega^2 - \omega^2 \frac{1-\omega}{1-\omega-\lambda}\right) B^T B + (1-\omega-\lambda)\boldsymbol{y} = 0, \text{soit encore}$$

$$-\frac{\omega^2\lambda}{1-\omega-\lambda} B^T B + (1-\omega-\lambda)\boldsymbol{y} = 0,$$

ce qui exprime que $\frac{(1-\omega-\lambda)^2}{\omega^2\lambda}$ est une valeur propre α_j de $B^T B$, et donc que

$$\frac{(1-\omega-\lambda)^2}{\omega^2\lambda} = \alpha_j$$

Pour $\omega = 1$, les valeurs propres de $\mathcal{L}_1$ sont les valeurs propres de $B^T B$. L'algorithme converge donc sous les mêmes conditions que celui de Jacobi. Pour $\omega \neq 1$, les valeurs propres sont positives, et pour chaque j, elles sont racines de l'équation du second degré $(1-\omega-\lambda)^2 - \omega^2\alpha_j\lambda = 0$, qui se réécrit sous la forme

$$P(\lambda) = \lambda^2 - 2(\frac{\alpha}{2}\omega^2 + 1 - \omega)\lambda + (1-\omega)^2 = 0$$

Le discriminant de cette équation est $\frac{\alpha}{2}\omega^2 - 2\omega + 2$. Il est positif lorsque $\omega < \omega_0 = \frac{1-\sqrt{1-\alpha}}{\alpha} < 1$, et négatif si $\omega_0 = \frac{1-\sqrt{1-\alpha}}{\alpha} < \omega < 1$. Dans ce derniers cas, P a deux racines complexes conjuguées de module $(1-\omega)^2 < 1$. Dans le premier cas, il y a deux racines réelles, dont le produit $(1-\omega)^2$ est inférieur à 1. Elles sont donc toutes deux inférieures à 1 strictement si et seulement si 1 est à l'extérieur des racines, soit $P(1) > 0$, soit $P(1) = 1 - \alpha_j > 0$ ce qui est le cas. On a donc le résultat : l'algorithme de relaxation converge.

3) Calculons, pour $\boldsymbol{X} = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$,

$$(A\boldsymbol{X}, \boldsymbol{X}) = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) - (B^T \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) - (\boldsymbol{x}, B\boldsymbol{y}) - (\boldsymbol{y}, \boldsymbol{y}).$$

Nous réécrivons

$$(A\boldsymbol{X}, \boldsymbol{X}) = \|\boldsymbol{x} - B\boldsymbol{y}\|^2 + ((I - B^T B)\boldsymbol{y}, y\boldsymbol{y}).$$

Donc A est symétrique définie positive si et seulement si $I - B^T B$ l'est.

Cherchons la décomposition de Cholewski de la matrice A sous la forme blocs

$$\begin{pmatrix} I & -B \\ -B^T & I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B_{11} & 0 \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_{11}^T & B_{21}^T \\ 0 & B_{22}^T \end{pmatrix}$$

En effectuant le produit, nous trouvons pour le premier terme $B_{11} B_{11}^T = I$. B_{11} est la matrice de Cholewski de l'identité, donc par l'unicité de la décomposition $B_{11} = I$. Écrivons les deux autres termes :

$$B_{21}^T = -B, \quad B_{21} B_{21}^T + B_{22} B_{22}^T = I,$$

ce qui détermine B_{21} et conditionne la détermination de la matrice B_{22} à la résolution de $B_{22} B_{22}^T = I - BB^T$, et donc à la décomposition de Cholewski de $I - BB^T$, ce qui est possible puisque $I - B^T B$ est symétrique définie positive.