SuP Galilée, spécialité MACS **Analyse Numérique I**
Année 2011-2012

CONTRÔLE DU LUNDI 7 NOVEMBRE 2011

Durée 2h30. Les documents du cours, et la calculatrice, sont autorisés.

PROBLÈME 1. EQUATIONS NON LINÉAIRES (10 points)

On se place dans un intervalle $[a, b]$ de $\mathbb{R}$.

1) Soit g une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$ telle que $g(a) = g(b) = 0$, $g''(x) > 0$ pour tout x dans $[a, b]$. Montrer que $g(x) < 0$ pour tout x de $]a, b[$.

Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$ telle que $f(a) < 0$, $f(b) > 0$, $f'(x) > 0$ et $f''(x) > 0$ pour tout x dans $[a, b]$.

2)

a) Montrer qu'il existe un unique point c dans $[a, b]$ tel que $f(c) = 0$.

b) Montrer que $f(x) < 0$ pour tout x dans $[a, c[$ et $f(x) > 0$ pour tout x dans $]c, b]$.

c) Montrer qu'il existe m_1 et m_2 tels que pour tout x dans $[a, b]$,

$$0 < m_1 \leq f'(x), \quad 0 < f"(x) \leq m_2.$$

d) Décrire les algorithmes de dichotomie, de Newton et de la sécante pour calculer c. Donner leurs propriétés de convergence.

On introduit ici la méthode de la fausse position qui est un mélange de dichotomie et de la sécante.

3) Soit p le polynôme de degré 1 tel que $p(a) = f(a)$ et $p(b) = f(b)$, et soit c_1 tel que $p(c_1) = 0$. Démontrer que $a < c_1 < c$. (on appliquera 1) à la fonction $g = f - p$).

4) On définit maintenant la suite c_n de la manière suivante.

- On pose $c_0 = a$.
- c_n étant défini, on calcule c_{n+1} : p_n est l'unique polynôme de degré un tel que $p_n(c_n) = f(c_n)$ et $p_n(b) = f(b)$, et on définit c_{n+1} par l'équation $p_n(c_{n+1}) = 0$.

a) Mettre explicitement cette récurrence sous la forme $c_{n+1} = \varphi(c_n)$.

b) Démontrer que (c_n) est une suite strictement croissante contenue dans l'intervalle $[a, c]$.

c) Montrer que la suite (c_n) converge vers c et que pour tout $n \geq 0$, on a

$$|c_n - c| \leq \frac{|f(c_n)|}{m_1}.$$

Problème 2. Systèmes linéaires (10 points)

Soit B une matrice carrée d'ordre p et A la matrice d'ordre $n = 2p$ définie par

$$A = \begin{pmatrix} I & -B \\ -B^T & I \end{pmatrix}$$

On cherche à résoudre le système linéaire $A\boldsymbol{U} = \boldsymbol{b}$. On pourra utiliser dans l'analyse la décomposition par blocs naturelle $\boldsymbol{U} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{u} \\ \boldsymbol{v} \end{pmatrix}$.

On décompose la matrice A comme dans le cours en $A = I - E - F$ et on étudie divers algorithmes itératifs pour la résolution du système linéaire.

1) Ecrire l'algorithme de Jacobi. Montrer que μ est valeur propre de la matrice de Jacobi J si et seulement si μ^2 est valeur propre de BB^T. On pourra pour cela écrire que μ est valeur propre de J si et seulement si il existe un vecteur $\boldsymbol{X}$ non nul tel que $J\boldsymbol{X} = \mu X$ et décomposer X. En déduire le rayon spectral de J en fonction de la norme euclidienne de B, et une condition nécessaire et suffisante de convergence de l'algorithme de Jacobi.

2) On suppose dans cette question que toutes les valeurs propres de B^TB sont strictement comprises entre 0 et 1. Soit un nombre réel $\omega \in]0, 1[$. Écrire l'algorithme de relaxation pour la résolution du système $A\boldsymbol{U} = \boldsymbol{b}$. Montrer que l'inverse de la matrice $(I - \omega E)$ est $(I + \omega E)$. En déduire l'expression de la matrice de relaxation $\mathcal{L}_\omega$ sous forme de blocs, et exprimer ses valeurs propres en fonction de celles de BB^T. En déduire une condition nécessaire et suffisante de convergence (c'est un peu difficile).

3) Donner une condition nécessaire et suffisante sur B pour que A soit définie positive. Dans ce cas, effectuer la décomposition de Cholewski par blocs de la matrice A.

Quelques théorèmes utiles :

Théorème des valeurs intermédiaires :Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une application continue, alors pour tout réel u compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe au moins un réel ξ compris entre a et b tel que $f(\xi) = u$.
Théorème des accroissements finis Soient a et b deux réels tels que $a < b$. Soit f une fonction à valeurs réelles continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$. il existe un réel ξ dans $]a, b[$ tel que $f(b) - f(a) = (b - a)f'(\xi)$.
Théorème de Rolle : Soient a et b deux réels tels que $a < b$. Soit f une fonction à valeurs réelles continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$ telle que $f(a) = f(b)$. Alors il existe (au moins) un réel ξ dans $]a, b[$ tel que $f'(\xi) = 0$.