3 The heat equation

3.1 The Cauchy problem in one dimension

On se place ici dans le cadre $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R} \times (0,T)$, 1-périodique en espace sur $\mathbb{R}$.

u $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R} \times (0,T)$, 1-périodique en espace sur $\mathbb{R}$

$$\partial_t u - \partial_{xx} u = F, \quad u(x,0) = u_0(x). \tag{3.1}$$

La fonction F dépend de x et t.

Théorème 3.1 *Supposons la donnée initiale f est $\mathcal{C}^\infty$ 1-périodique, la source F est $\mathcal{C}^\infty$ en temps et en espace, et pour tout temps périodique en x. Alors le problème de Cauchy (3.1) admet une solution unique u $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R} \times (0,T)$, 1-périodique en espace sur $\mathbb{R}$.*

Toute la suite du paragraphe 3.1 est consacrée à la démonstration du théorème. Le produit scalaire en espace est

$$(u,v) = \int_0^1 u(x)v(x)\,dx, \quad \|u\|^2 = \int_0^1 u^2(x)\,dx$$

Grâce aux conditions de périodicité, on a la formule d'intégration par parties

$$(u', v) = -(u, v'). \tag{3.2}$$

3.1.1 A priori estimates

On multiplie l'équation par u et on intègre par parties sur $(0,1)$. On obtient

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u\|^2 + \|\partial_x u\|^2 = (F(\cdot,t), u).$$

On utilise alors l'inégalité de Cauchy-Schwarz ($|(u,v)| \leq \|u\|\,\|v\|$) et l'inégalité de Young ultrasimple ($ab \leq \frac{1}{2}(a^2+b^2)$), pour en déduire l'estimation d'énergie.

$$\|u(\cdot,t)\|^2 \leq e^t\,\|f\|^2 + \int_0^t e^{t-s}\|F(\cdot,s)\|^2\,ds$$

On l'applique ensuite à toutes les dérivées en x.

Estimation d'énergie : pour tout $p \in \mathbb{N}$,

$$\|\partial_x^p u(\cdot,t)\|^2 \leq e^t\,\|d^p f\|^2 + \int_0^t e^{t-s}\|\partial_x^p F(\cdot,s)\|^2\,ds \tag{3.3}$$

3.1.2 Existence *via* finite differences

On se donne une grille en espace définie par $N \in \mathbb{N}$, $h = 1/N$, $x_j = jh$. Une suite $V = (v_j)_{j\in\mathbb{Z}}$ est N-périodique si $v_{j+N} = v_j$ pour tout j. Alors il suffit de considérer $v_0, \ldots, v_{N-1}$ pour définir tout la suite.

Différences finies

$$\begin{array}{rlll} \text{Premier ordre} & (D^+V)_j = \frac{v_{j+1}-v_j}{h} & (D^-V)_j = \frac{v_j - v_{j-1}}{h} & (D^0V)_j = \frac{v_{j+1}-v_{j-1}}{h} \\ \text{Deuxième ordre} & & (D^2V)_j := (D^+D^-V)_j = \frac{v_{j+1}-2v_j+v_{j-1}}{h^2} & \end{array}$$

Pour une fonction v suffisamment régulière

$$\begin{aligned} &\exists \eta \in]x_j, x_{j+1}[, && (D^+V)_j = v'(x_j) + \tfrac{h}{2} v''(\eta), \\ &\exists \eta \in]x_{j-1}, x_j[, && (D^-V)_j = v'(x_j) - \tfrac{h}{2} v''(\eta), \\ &\exists \eta \in]x_{j-1}, x_{j+1}[, && (D^0V)_j = v'(x_j) + \tfrac{h^2}{6} v^3(\eta), \\ &\exists \eta \in]x_{j-1}, x_{j+1}[, && (D^0V)_j = v''(x_j) + \tfrac{h^2}{12} v^4(\eta. \end{aligned}$$

Système discret

$V(t) = (v_j(t))$ N-périodique pour tout t,

$$\frac{dv_j}{dt} - D^+D^-v_j = F_j := F(x_j, \cdot), \quad v_j(0) = f_j := f(x_j). \tag{3.4}$$

Avec les inconnues $\tilde{V} = (v_0, \ldots, v_{N-1})$ le système se réécrit

$$\frac{dV}{dt} = AV + F, \quad V(0) = f.$$

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 1 & & & 1 \\ 1 & \ddots & \ddots & 0 & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & 0 & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & & & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

La théorie des équations différentielles ordinaires nous dit qu'il existe une solution unique

$$\tilde{V} = e^{tA} \cdot f + \int_0^t e^{(t-s)} \cdot AF(s)\, ds$$

Estimations discrètes

Produit scalaire discret : $V = (v_j)_{j \in \mathbb{Z}}$, $W = (w_j)_{j \in \mathbb{Z}}$

$$(V, W)_h = h \sum_0^{N-1} v_j w_j, \quad \|V\|_h^2 = h \sum_0^{N-1} v_j^2$$

On a les intégrations par parties discrètes

$$(V, D^-W)_h = -(D^+V, W)_h, (V, D^0W)_h = -(D^0V, W)_h. \tag{3.5}$$

d'où l'on déduit

$$-(V, D^+D^-V)_h = \|D^-V\|_h^2.$$

Estimation d'énergie discrète : pour tout $p \in \mathbb{N}$,

$$\|(D^+)^p V(t)\|_h^2 \le e^t \, \|(D^+)^p f\|_h^2 + \int_0^t e^{t-s} \|(D^+)^p F(s)\|_h^2 \, ds \tag{3.6}$$

Interpolation par fonction $\mathcal{C}^\infty$ 1-périodique

On suppose désormais que $N = 2M + 1$. Alors il existe une unique fonction w^h $\mathcal{C}^\infty$ 1-périodique telle que

$$w^h(x_j, t) = v_j(t), \quad j \in \mathbb{Z}.$$

On la connait par sa série de Fourier

$$w^h(x,t) = \sum_{k=-m}^{m} a_k^h(t) e^{2i\pi kx}, \quad a_k^h = (V, e^{2i\pi kx})_h.$$

Par l'égalité de Parseval on a les égalités

$$\|w^h(\cdot,t)\| = \|V(t)\|_h, \quad \|(D^+)^p V(t)\|_h \leq \left(\frac{\pi}{2}\right)^p \|\partial_x^p w^h(\cdot,t)\| \tag{3.7}$$

Grâce à toutes les estimations précédentes on en déduit que w^h est bornée indépendamment de h dans L^2 ainsi que toutes ses dérivées, en temps et en espace.

Estimation d'interpolation : pour tout $p \in \mathbb{N}$,

$$\|\partial_x^p \partial_t^q u(\cdot,t)\|^2 \leq C(p,q,f,F,T) \tag{3.8}$$

Equation approchée pour w^h

Equation approchée :

$$\partial_t w^h - \partial_{xx} w^h = F + R^h, \quad w^h(x,0) = f + r^h, \|R^h\| \leq Ch, \quad \|r^h\| \leq Ch. \tag{3.9}$$

Convergence de la suite $w^{1/N}$ vers w solution de (3.1)

Par soustraction on voit que pour $M \neq N$, $w^{1/N} - w^{1/M}$ est solution de l'équation de base (3.1) avec $F = R^{1/N} - R^{1/M}$ et $f = r^{1/N} - r^{1/M}$. les estimations a priori (3.6) permettent alors de conclure que la suite $w^{1/N}$ et toutes ses dérivées en x et t sont de Cauchy dans L^2 (et d'ailleurs également dans L^∞) et donc convergent vers une fonction w qui est $\mathcal{C}^\infty$ et 1-périodique. En passant à la limite dans (3.9) on obtient que w est solution de (3.1)

3.2 Fundamental solution and explicit formula

Ici on ne considère pas le problème périodique, mais des fonctions L^2 sur tout $\mathbb{R}$. De plus on suppose la source de chaleur F nulle pour tout temps.

Théorème 3.2 *Si f est $\mathcal{C}^\infty$ à support compact, alors pour $F \equiv 0$ le problème (3.1) a une et une seule solution dans $\mathcal{C}^\infty$, et*

$$u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} e^{-\frac{(x-y)^2}{4t}} f(y)\, dy$$

La démonstration repose sur la transformée de Fourier en espace.

3.2.1 Rappels sur la transformée de Fourier et la convolution

$$\hat{f}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-ikx}\, dx$$

est définie pour f dans L^1. On peut alors l'étendre à L^2 par dualité, c'est une isométrie de L^2 dans L^2,

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(k) e^{ikx}\, dk, \quad \|f\| = \|\hat{f}\|.$$

On définit la convolution dans L^1 par

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x-y) g(y)\, dy.$$

On a alors $\widehat{f * g} = \sqrt{2\pi} \hat{f} \hat{g}$.. On sait aussi que la transformée de Fourier de la gaussienne $e^{-x^2/2}$ est $e^{-k^2/2}$. D'où on déduit que

$$\hat{g}(k) = e^{-k^2 t} \iff g(x) = \frac{1}{\sqrt{2t}} e^{-\frac{x^2}{4t}}$$

L'équation transformée en espace s'écrit

$$\partial_t \hat{u} + k^2 \hat{u} = 0,$$

d'où l'on déduit que

$$\hat{u} = e^{-k^2 t} f$$

et l'on obtient la formule par les résultats rappelés ci-dessus.

3.2.2 Conséquence : principe du maximum

Théorème 3.3 *Si $m \leq f \leq M$, alors $m \leq u \leq M$.*