MACS 2 Cours Optimisation 2019

Problèmes pour le 15 novembre.

Partie I, Projection sur un convexe fermé

Soit K un convexe fermé non vide d'un espace de Hilbert V. On souhaite démontrer le théorème : Soit $w \notin K$. Il existe un unique $u \in K$, appelé la projection de w sur K et noté $\mathbf{P}_K w$, qui minimise la distance entre w et un point de K :

$$\|w - u\| = \inf_{v \in K} \|w - v\|.$$

1. Rappeler la démonstration par les suites minimisantes

On veut maintenant démontrer ce théorème et caractériser u au moyen des outils d'optimisation. Pour simplifier les calculs, on pose $J(v) = \|w - v\|^2$.

2. Montrer que la fonction J est continue.
3. Montrer que J est dérivable, calculer sa dérivée.
4. Calculer sa dérivée seconde et montrer que J est α convexe.
5. En déduire qu'il existe une et une seule solution.
6. Ecrire l'inéquation d'Euler.
7. En déduire une caractérisation de u.

On suppose maintenant que K est un sous-espace affine fermé de V.

8. Ecrire l'équation d'Euler.
9. En déduire une caractérisation de u.

On se place en dimension 2, et K est une droite affine de $\mathbb{R}^2$.

10. Ecrire l'équation d'Euler.
11. En déduire une caractérisation de u.
12. Calculer les coordonnées de u en fonction de celles de w et de l'équation de K.

Partie II, Théorème de Hahn-Banach : séparation d'un point et d'un convexe fermé On revient aux notations générales. Soit K un convexe fermé non vide d'un espace de Hilbert V. On souhaite démontrer le théorème : Soit $u_0 \notin K$. Il existe un hyperplan fermé de V qui sépare strictement u_0 et K, c'est-à-dire une forme linéaire continue L et un nombre réel α tels que

$$\forall v \in K, L(u_0) < \alpha < L(v).$$

1. Montrer que l'application définie par $L(v) = (\mathbf{P}_K u_0 - u_0, v)$ est une forme linéaire.

2. On pose $\alpha = \frac{L(\mathbf{P}_K u_0)+L(u_0)}{2}$ Etablir l'inégalité précédente.
3. Qui est l'hyperplan H ?

Partie III, Application aux moindres carrés Soit une matrice A $m \times n$, avec $m << n$, $b \in \mathbb{R}^m$. On considère le problème de minimisation :

Trouve $u \in \mathbb{R}^n$ qui minimise $\|Au - b\|$.

1. Interpréter ce problème en terme de projection. En déduire qu'il existe une solution.
2. Trouver toutes les solutions.
3. Les caractériser.

On suppose que $\text{rg}\, A < m$. On cherche parmi toutes les solutions celle de norme minimale.

4. Exprimer ce problème sous forme d'un problème de minimisation avec contraintes affines
5. Montrer qu'il a une solution unique.
6. Ecrire une caractérisation de cette solution à l'aide des multiplicateurs de Lagrange.