Optimisation MACS 2 2019

Part I. Résultats théoriques

13 novembre 2019

Résultats d'existence

Caractérisation des extrema

Lagrangien et point selle

Définitions

Soit V un espace de Hilbert sur $\mathbb{R}$, K une partie de V , J une fonction définie sur V à valeurs dans $\mathbb{R}$. On dit que u est **minimum local** de J sur K si u appartient à K et s'il existe un voisinage U de u dans K tel que

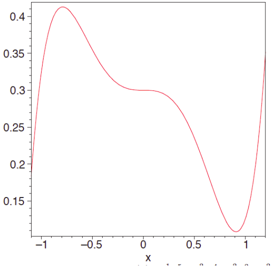
$$\forall v \in U, J(u) \leq J(v). \tag{1}$$

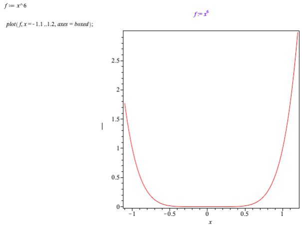
Si la relation précédente est vraie pour tout v dans K, on dit que u est **minimum global** de J sur K. On parle de minimum strict si l'inégalité est stricte dans (1). On définit un problème de minimisation sur K par

$$\begin{cases} u \in K, \\ J(u) = \inf\limits_{v \in K} J(v) \end{cases} \tag{2}$$

On dit alors que u est **solution optimale** du problème de minimisation sur K. Le problème de minimisation est dit **sans contrainte** si $V = K$, **avec contraintes** si $V \neq K$.

Exemple en dimension 1





$$f(x) = \frac{1}{2}x^5 - \frac{3}{40}x^4 - \frac{3}{5}x^3 + \frac{3}{10}$$

$$f(x) = x^6$$

$$\left\{ \begin{array}{ccc} f'(x^*) & = & 0 \\ f''(x^*) & > & 0 \end{array} \right\} \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{c} f \text{ has a local} \\ \text{minimum at } x^* \end{array} \right\} \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{ccc} f'(x^*) & = & 0 \\ f''(x^*) & \geq & 0 \end{array} \right\}$$

Optimisation

$$\underset{\mathbf{u}\in\mathbf{K}}{\mathrm{Min}}\ \mathbf{J(u)}$$

- J fonction différentiable
- $K \subset V$ avec V espace de Hilbert.
- Dimension
  - $\dim V < +\infty$: Optimisation en dimension finie ($\mathbb{R}^n$, polynômes de degré inférieur à n, espaces d'éléments finis, série de Fourier tronquée...)
  - $\dim V = +\infty$: Optimisation en dimension infinie ($\mathcal{C}^1$,L^2, H^1, H^1_0...)
- Contraintes
  - $K = V$: Optimisation sans contraintes
  - $K \subsetneq V$: Optimisation sous contraintes (1, 2 infinité)
    - Égalité : $F(v) = 0$, $F : V \to W$,
    - Inégalité : $F(v) \leq 0$.

Plan du chapitre

Quelques références

- J. C. Culioli, CR Ecole des Mines
  Introduction à l'optimisation, Ellipses, 1994.
- M. Bergounioux, Prof. Univ. Orléans
  Optimisation et contrôle des systèmes linéaires, Dunod, 2001.
- G. Allaire, Prof. Polytechnique
  Numerical analysis and optimization, Oxford science publications. 2007.
  https ://www.editions.polytechnique.fr/files/pdf/EXT_1255_8.pdf
- O. Lafitte, Prof. Univ. Paris 13
  Optimisation et calcul des variations
  http ://lescribe83.free.fr/Cours_optimisation_lafitte.pdf

Théorème d'existence en dimension finie

Theorème : Soit V un espace de Hilbert de dimension finie et $K \subset V$ un ensemble fermé. Soit J une fonction continue de K dans $\mathbb{R}$. Sous une des deux hypothèses suivantes

- K est borné,
- *J infinie à l'infini,*

$$J(v) \underset{\|v\| \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$$

il existe au moins un point où J atteint son minimum sur K.

Preuve :

$$w \text{ choisi dans } K, \text{ on définit } \tilde{K} = \{v \in K, \ J(v) \leq J(w)\}.$$

Alors $\inf_K J(v) = \inf_{\tilde{K}} J(v)$.
Exemples $\|v\|$, $\|v\|^2$, $(Av, v), \cdots$.

Un exemple important en dimension finie, pour TD mardi

Moindres carrés :

$$\inf_{x \in \mathbb{R}^n} \|b - Ax\|$$

Un autre exemple important en dimension finie, pour TD mardi

On définit les polynômes de Chebyshev sur $[-1,1]$ par $C_k(t) = \cos(k \arccos t)$. Montrer la relation de récurrence

$$P_0 \equiv 1, P_1 \equiv t, \; P_{k+1}(t) = 2tP_k(t) - P_{k-1}(t)$$

Montrer que P_k a dans l'intervalle $[-1,1]$ la plus petite déviation de 0, parmi tous les polynômes de $\mathbf{P}_k$ de coefficient dominant 2^{k-1}. (on procédera dans l'absurde en introduisant les points extrémaux ξ_j de P_k).

Un contre exemple en dimension infinie, pour TD mardi

On se place dans $H^1(0,1)$ muni de la norme

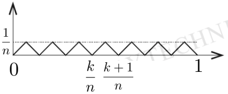
$$\|v\|^2 = \int_0^1 v^2(x)\,dx + \int_0^1 {v'}^2(x)\,dx.$$

On considère la fonctionnelle

$$J(v) = \int_0^1 \left((|v'(x)| - 1)^2 + v(x)^2\right)\,dx$$

Montrer que

- J est continue
- $\forall v \in H^1(0,1),\ J(v) > 0$
- $\forall v \in H^1(0,1),\ J(v) \geq \frac{1}{2}\|v\|^2 - 1$
- J tend vers l'infini à l'infini.
- Il existe cependant une suite $u_n \in H^1(0,1) \quad J(u_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$



- J n'admet pas de minimum.

Fonctions convexes

On se restreint au cas où K est un ensemble convexe. Définitions d'une fonction

- convexe $\forall t \in [0,1] \quad J(tu + (1-t)v) \leq tJ(u) + (1-t)J(v)$
- strictement convexe
  $\forall t \in]0,1[, \;\; u \neq v, \quad J(tu + (1-t)v) < tJ(u) + (1-t)J(v)$
- fortement convexe (on dit aussi α-convexe) : il existe un nombre $\alpha > 0$ tel que pour tout couple $(u,v) \in V^2$ on ait

$$\forall t \in [0,1] \quad J(tu+(1-t)v) \leq tJ(u)+(1-t)J(v) - \frac{\alpha}{2} t(1-t)\|v-u\|^2$$

Prop : Soient J_1 et J_2 deux fonctions convexes, ϕ une fonction convexe croissante, $p \in \mathbb{R}_+$. Alors $J_1 + J_2$, $max(J_1, J_2)$, pJ_1, $\phi o J_1$ sont convexes.

Remarque : Attention, une fonction de deux variables peut être convexe en chacune de ses variables mais pas convexe sur $\mathbb{R}^2$.

Minimum et fonctions convexes

Soit K un convexe fermé
Proposition : Si J est convexe, alors tout point de minimum local dans K est un point de minimum global.

Proposition : Si J est strictement convexe, il existe au plus un point de minimum global dans K .

Proposition : Si J est fortement convexe, il existe un unique point de minimum global dans K .

Proposition : Si J est fortement convexe et u est le point de minimum, alors on a l'estimation d'erreur

$$\forall v \in K \quad \|v - u\|^2 \leq \frac{4}{\alpha}(J(v) - J(u))$$

Exemple sur la fonction $J(x) = \frac{1}{2}(Ax, x) - (b, x)$ avec A matrice définie positive.

Différentiabilité

Définition : Une fonction J de V dans $\mathbb{R}$ est différentiable (ou Fréchet différentiable) en u si il existe une forme linéaire continue notée $J'(u)$ telle que

$$\forall w \in V, J(u+w) = J(u) + J'(u) \cdot w + \epsilon(w)\|w\|, \quad \lim_{w \to 0} \epsilon(w) = 0$$

Proposition : Toute fonction dérivable est continue.
Quand $V = \mathbb{R}^n$, on note souvent $J'(u) = \nabla J(u)$.

Exemples

- Fonction affine $J(v) = (b, v) - c$.
- Fonction quadratique $J(v) = \frac{1}{2}(Av, v) - (b, v)$
- Moindres carrés $u \mapsto \|Av - b\|^2$.
- Extension à la dimension infinie (v dans L^2 ou H^1)

$$J(v) = \frac{1}{2}\int_\Omega (\alpha\|\nabla v\|^2 + \beta v^2) - \int_\Omega fv$$

- La longueur d'un arc

$$J(v) = \int_0^A \sqrt{1 + v'(x)^2}\, dx$$

Différentielles, suite

- Dérivée directionnelle. On appelle dérivée de J en u dans la direction v la dérivée en 0 de la fonction d'une variable $t \mapsto J(u + tv)$. On peut alors noter

$$D_v J(u) = J'(u) \cdot v.$$

- Gradient et dérivées partielles. Dans $\mathbb{R}^n$, si J est différentiable en u, elle admet des dérivées partielles $\partial_j J(u) := \frac{\partial J}{\partial x_j}$, et $\nabla J(u) = (\partial_1 J(u), \cdots, \partial_n J(u))$, si bien que $J'(u).v = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial J}{\partial x_i}(u) v_i$.
- Dérivées secondes Si $J' : V \mapsto V$ admet une différentielle J'' application bilinéaire continue de $V \times V$ dans $\mathbb{R}$. On notera $J"(u) \cdot v \cdot w$. Si $V = \mathbb{R}^n$, alors la dérivée $J''(u)$ peut être identifiée avec une matrice appelée matrice Hessienne de J.

Exemples

- Fonction quadratique

$$J(x) = \frac{1}{2}(Ax, x) - (b, x)$$

- Moindres carrés $u \mapsto \|Au - b\|^2$.
- Extension à la dimension infinie (u dans L^2 ou H^1)

$$J(u) = \frac{1}{2}\int_\Omega (\alpha\|\nabla u\|^2 + \beta u^2) - \int_\Omega fu$$

- La longueur d'un arc

$$J(u) = \int_0^A \sqrt{1 + u'(x)^2}\, dx$$

Formules de Taylor

Taylor Mac-Laurin ordre 1 Si $J : V \mapsto \mathbb{R}$ est définie et continue sur $[u, v]$, différentiable sur $]u, v[$, il existe $\theta \in]0, 1[$ tel que

$$J(v) = J(u) + J'(u + \theta(v - u)) \cdot (v - u) \tag{3}$$

On l'appelle aussi la formule de la moyenne, et on peut la formuler ainsi il existe $w \in]u, v[$ tel que

$$J(v) = J(u) + J'(w) \cdot (v - u) \tag{4}$$

Taylor Mac-Laurin ordre 2 Si $J : V \mapsto \mathbb{R}$ est définie et continue sur $[u, v]$, 2 fois différentiable sur $]u, v[$, il existe $\theta \in]0, 1[$ tel que

$$J(v) = J(u) + J'(u) \cdot (v - u) + \frac{1}{2} J''(u + \theta(v - u)) \cdot (v - u) \cdot (v - u) \tag{5}$$

Taylor Young ordre 2 Si $J : V \mapsto \mathbb{R}^p$ est 2 fois différentiable en u, alors pour tout v

$$J(v) = J(u) + J'(u) \cdot (v - u) + J''(u) \cdot (v - u) \cdot (v - u) + \epsilon(v - u)\|v - u\|^2 \tag{6}$$

Convexité et différentiabilité

Théorème 1.5 : Les trois propositions sont équivalentes

1. J est convexe.
2. $\forall u, v \in V,\ J(v) \geq J(u) + (J'(u), v - u)$.
3. $\forall u, v \in V,\ (J'(v) - J'(u), v - u) \geq 0$.

Théorème 1.6 : Les trois propositions sont équivalentes

1. J est strictement convexe.
2. $\forall u, v \in V,\ u \neq v,\ J(v) > J(u) + (J'(u), v - u)$.
3. $\forall u, v \in V,\ u \neq v,\ (J'(v) - J'(u), v - u) > 0$.

Théorème 1.7 : Les trois propositions sont équivalentes

1. J est α-convexe.
2. $\forall u, v \in V,\ J(v) \geq J(u) + (J'(u), v - u) + \frac{\alpha}{2}\|v - u\|^2$.
3. $\forall u, v \in V,\ (J'(v) - J'(u), v - u) \geq \alpha\|v - u\|^2$.

Démonstration

$$(1) \iff (2) \iff (3)$$

Démonstration

$$(1) \iff (2) \iff (3)$$

(1) convexe $\Longrightarrow$ **(2)** $\forall u, v \in V,\; J(v) \geq J(u) + (J'(u), v-u).$

$$J(\theta v + (1-\theta)u) \leq \theta J(v) + (1-\theta)J(u).$$

$$J(\theta v + (1-\theta)u) - J(u) \leq \theta (J(v) - J(u)).$$

$$\frac{J(u+\theta(v-u)) - J(u)}{\theta} \leq J(v) - J(u).$$

$\theta \to 0$:

$$J'(u)\cdot(v-u) \leq J(v) - J(u).$$

Démonstration

$$(1) \iff (2) \iff (3)$$

(1) convexe $\implies$ **(2)** $\forall u, v \in V,\ J(v) \geq J(u) + (J'(u), v - u)$.

(2) $\forall u, v \in V,\ J(v) \geq J(u) + (J'(u), v - u) \implies$ **(1) convexe**.

Démonstration

$$(1) \iff (2) \iff (3)$$

$$\textbf{(1) convexe} \implies \textbf{(2)}\;\; \forall u, v \in V,\;\; J(v) \geq J(u) + (J'(u), v-u).$$
$$\textbf{(2)}\;\; \forall u, v \in V,\;\; J(v) \geq J(u) + (J'(u), v-u) \implies \textbf{(1) convexe}.$$

$$\begin{aligned} J(u) &\geq J(\theta u + (1-\theta)v) + J'(\theta u + (1-\theta)v)\cdot(1-\theta)(u-v) \\ J(v) &\geq J(\theta u + (1-\theta)v) + J'(\theta u + (1-\theta)v)\cdot\theta(v-u) \end{aligned}$$

Démonstration

$$(1) \iff (2) \iff (3)$$

(1) convexe $\implies$ **(2)** $\forall u, v \in V,\ J(v) \geq J(u) + (J'(u), v-u)$.
(2) $\forall u, v \in V,\ J(v) \geq J(u) + (J'(u), v-u)$ $\implies$ **(1) convexe**.

$$\begin{array}{rcl} J(u) & \geq & J(\theta u + (1-\theta)v) + J'(\theta u + (1-\theta)v) \cdot (1-\theta)(u-v) \\ J(v) & \geq & J(\theta u + (1-\theta)v) + J'(\theta u + (1-\theta)v) \cdot \theta(v-u) \end{array}$$

$$\begin{array}{lrcl} \times\theta & J(u) & \geq & J(\theta u + (1-\theta)v) + J'(\theta u + (1-\theta)v) \cdot (1-\theta)(u-v) \\ \times(1-\theta) & J(v) & \geq & J(\theta u + (1-\theta)v) + J'(\theta u + (1-\theta)v) \cdot \theta(v-u) \end{array}$$

Démonstration

$$(1) \iff (2) \iff (3)$$

(1) convexe $\implies$ **(2)** $\forall u, v \in V,\ J(v) \geq J(u) + (J'(u), v - u)$.

(2) $\forall u, v \in V,\ J(v) \geq J(u) + (J'(u), v - u)$ $\implies$ **(1) convexe**.

(2) $\implies$ **(3)**

Démonstration

$$(1) \iff (2) \iff (3)$$

(1) convexe $\Longrightarrow$ **(2)** $\forall u, v \in V,\ J(v) \geq J(u) + (J'(u), v - u)$.

(2) $\forall u, v \in V,\ J(v) \geq J(u) + (J'(u), v - u)$ $\Longrightarrow$ **(1) convexe**.

(2) $\Longrightarrow$ **(3)**

(3) $\Longrightarrow$ **(2)**

Convexité et différentiabilité

Supposons maintenant J deux fois différentiable

Théorèmes 1.5, 1.6 1.7 :

- J convexe $\iff \forall u, w \in V, J''(u)w.w \geq 0$
- J strictement convexe $\Leftarrow \forall u, w \in V, w \neq 0, \; J''(u)w.w > 0$
- J $\alpha-$ convexe $\iff \forall u, w \in V, J''(u)w.w \geq \alpha \parallel w \parallel^2$.

Convexité et différentiabilité

Supposons maintenant J deux fois différentiable
Théorèmes 1.5, 1.6 1.7 :

4 J convexe $\iff \forall u, w \in V, J''(u)w.w \geq 0$

4 J strictement convexe $\Leftarrow \forall u, w \in V, w \neq 0, \ J''(u)w.w > 0$

4 J $\alpha-$ convexe $\iff \forall u, w \in V, J''(u)w.w \geq \alpha \parallel w \parallel^2$.

Exemple : $J(u) = a(u, u)$ où a est une forme bilinéaire continue sur V. Cas de la dimension finie.

Démonstration

(3) $\implies$ **(4)**

$$(J'(u+\theta w)-J'(u))\cdot(\theta)w \;\geq\; 0,\; J'(u+\theta w)-J'(u) = \theta J''(u)w+\epsilon(\theta)\|\theta w\|.$$

(4) $\implies$ **(2)** : Taylor Mac Laurin

$$J(v) = J(u) + J'(u)\cdot(v-u) + \frac{1}{2}J''(u+\theta(v-u))\cdot(v-u)\cdot(v-u)$$

Cas sans contrainte. Condition nécessaire de minimum

V espace de Hilbert. $J : V \to \mathbb{R}$.
Théorème : (Equation d'Euler) Si $u \in V$ est un point de minimum de J différentiable, alors $J'(u) = 0$.

Théorème : (Condition nécessaire ordre 2) Si $u \in V$ est un point de minimum de J deux fois différentiable, alors on a de plus

$$\forall v \in V \quad (J''(u)v, v) \geq 0$$

Cas sans contrainte. Condition suffisante de minimum

Théorème : Soit J une fonction différentiable dans V et u un point de V tel que $J'(u) = 0$.

1. Si J est deux fois différentiable dans un voisinage de u et s'il existe un voisinage Ω de u tel que $\forall v \in \Omega, \forall w \in V, J''(v)w.w \geq 0$, alors u est minimum local de J.
2. Si J est deux fois différentiable,et s'il existe $\alpha > 0$ tel que

$$\forall w \in V, J''(u)w.w \geq \alpha \|w\|^2,$$

alors u est minimum local strict pour J.

Théorème : Si J est convexe et différentiable, alors l'équation d'Euler est nécessaire et suffisante (voir preuve plus loin).
$\rightsquigarrow$ Exemples : Fonctionnelle quadratique sur $\mathbb{R}^n$ et H^1 (liens avec les systèmes linéaires et les EDP), minimisation au sens des moindres carrés, calcul de la première valeur propre...

Optimisation sous contrainte : K convexe

$$\text{Trouver } u \in K \text{ tel que } J(u) = \inf_{v \in K} J(v).$$

Si u est solution, on dit que u est solution optimale. On suppose que K est un convexe fermé non vide et que J est différentiable.
Théorème : Soit $K \subset V$ convexe. Si $u \in K$ est un point de minimum sur K de J différentiable, alors

$$\text{Inéquation d'Euler : } u \in K,\ \forall v \in K \quad (J'(u), v - u) \geq 0$$

Réciproquement dans le cas ou J est convexe, si on a l'inéquation d'Euler et, alors u est solution optimale.
Exemple

- Distance d'un point à un ensemble convexe

$\rightsquigarrow$ Séparation d'un point et d'un convexe

Conséquence sur le cas sans contrainte

Théorème : Si J est convexe différentiable, alors u est solution optimale sur V si et seulement on a l'équation d'Euler $J'(u) = 0$. En particulier si J est α-convexe, il existe une unique solution optimale, caractérisée par $J'(u) = 0$.

Optimisation sous contrainte : K sous espace affine

Théorème : Soit $K \subset V$ sous espace affine de la forme $u_0 + E$ (E ss ev de V). Alors l'inéquation d'Euler est équivalente à

$$u \in K, \forall v \in E \quad (J'(u), v) = 0$$

Ou encore $J'(u) \in E^{\perp}$.
Exemple : contraintes égalité,
$E = \{v \in V, (a_i, v) = 0,\ 1 \leqslant i \leqslant m\}$, alors l'orthogonal de E est l'espace vectoriel engendré par les a_i, et donc

$$\text{Inéquation d'Euler} \quad \Longleftrightarrow \begin{cases} u \in K \\ \exists p_1, .., p_m \in \mathbb{R} \quad J'(u) + \sum_{i=1}^{m} p_i a_i = 0. \end{cases}$$

Les p_i sont les multiplicateurs de Lagrange.

Optimisation sous contrainte : K sous espace affine de $\mathbb{R}^n$

$$K = \{v,\ Bv = c\} = \{v,\ (a_i, v) = c_i,\ 1 \leqslant i \leqslant m\}.$$

$$K \neq \emptyset \iff c \in \operatorname{Im} B$$

B matrice $m \times n$. $K = u_0 + E,\ \ E = \operatorname{Ker} B,\ Bu_0 = c$. On définit par a_i les vecteurs ligne de B, alors

$$E = \{v \in V, (a_i, v) = 0,\ 1 \leqslant i \leqslant m\}$$

$$\exists p_1, .., p_m \in \mathbb{R} \quad J'(u) + \sum_{i=1}^{m} p_i a_i = 0 \iff \exists p \in \mathbb{R}^m \quad J'(u) + B^T p = 0.$$

$$F_i(v) = (a_i, v) - c_i,\ \ F_i'(v) = a_i,$$

$$J'(u) + \sum_{i=1}^{m} p_i a_i = 0 \iff J'(u) + \sum_{i=1}^{m} p_i F_i'(u) = 0 \iff J'(u) + B^T p = 0$$

Optimisation quadratique sous contrainte : K sous espace affine de $\mathbb{R}^n$

$$J(v) = \frac{1}{2}(Av, v) - (b, v), \quad K = \{v,\ Bv = c\}$$

A matrice $n \times n$, $c \in \mathbb{R}^m$, B matrice $m \times n$.

1. Existence et unicité th 1.1 et 1.2 ou corollaire 1.1
2. Caractérisation

$$\exists p_1, .., p_m \in \mathbb{R} \quad J'(u) + \sum_{i=1}^{m} p_i a_i = 0 \iff \exists p \in \mathbb{R}^m \quad Au - b + B^T p = 0.$$

$$u \text{ solution optimale} \iff \begin{cases} Bu = c, \\ \exists p \in \mathbb{R}^m, \quad Au - b + B^T p = 0. \end{cases}$$

Attention B est une matrice rectangulaire

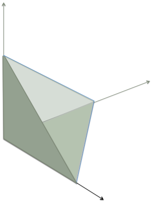
L'équation d'Euler

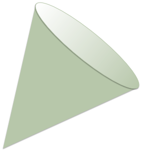
$$c \in \operatorname{Im} u, \quad Bu = c,\ Au - b + B^T p = 0.$$

$$BA^{-1}B^T p = BA^{-1}b - c.$$

- B^T injective (ou B de rang m full rank)
- sinon Comme pour les moindres carrés

Optimisation sous contrainte : K cône





$K = c + K_0$.

$$\begin{cases} u \in K \\ \forall v \in K, J'(u).(v-u) \geq 0 \end{cases} \iff \begin{cases} u \in K \\ J'(u).(c-u) = 0 \\ \forall w \in K_0,\ J'(u).w \geq 0. \end{cases}$$

Exemple de cône :

$$K_0 = \{v \in V, (a_i, v) \leq 0,\ 1 \leqslant i \leqslant m\}$$

$$K = \{v \in V, (a_i, v) \leq c_i,\ 1 \leqslant i \leqslant m\} = u_0 + K_0.$$

Optimisation sous contrainte : K cône

Pour M cône convexe fermé de sommet O, on définit le cône dual par

$$M^\star = \{c \in V, \forall v \in M, (c, v) \geq 0\}. \tag{7}$$

$$M = \{v \in V, \forall i \in \{1, .., m\}, (v, a_i) \leqslant 0\}$$

Théorème 2.5 [Lemme de Farkas].
Si $M = \{v \in V, \forall i \in \{1, .., m\}, (v, a_i) \leqslant 0\}$, alors $c \in M^\star$ si et seulement si $-c$ appartient au cône convexe engendré par les a_i, i.e. il existe $\{p_1, .., p_m\}$ tous ≥ 0 tels que $c = -\sum_{i=1}^{m} p_i a_i$.

$$\begin{cases} u \in K \\ J'(u).(c-u) = 0 \\ \forall w \in K_0,\ J'(u).w \geq 0 \end{cases}$$

$$J'(u).w \geq 0 \iff J'(u) \in K_0^\star \iff J'(u) = -\sum_{i=1}^{m} p_i a_i$$

Optimisation sous contraintes affines : Résumé

Contraintes égalité

$$K = \{Bv = c\} = \{(v, a_i) = c_i, i = 1 \cdots m\}$$

$$u \text{ solution optimale} \quad \Longleftrightarrow \begin{cases} Bu = c, \\ \exists p \in \mathbb{R}^m, \quad J'(u) + B^T p = 0. \end{cases}$$

Contraintes inégalité

$$K = \{Bv \leq c\} = \{(v, a_i) \leq c_i, i = 1 \cdots m\}$$

$$u \text{ solution optimale} \quad \Longleftrightarrow \begin{cases} Bu \leq c, \\ \exists p \in \mathbb{R}_+^m, \quad J'(u) + B^T p = 0. \end{cases}$$

Si J est convexe on a une CNS

Optimisation quadratique sous contraintes affines : Résumé

$$J(v) = \frac{1}{2}(Av, v) - (b, v)$$

Contraintes égalité

$$K = \{Bv = c\} = \{(v, a_i) = c_i, i = 1 \cdots m\}$$

$$u \text{ solution optimale} \quad \Longleftrightarrow \begin{cases} Bu = c, \\ \exists p \in \mathbb{R}^m, \quad Au - b + B^T p = 0. \end{cases}$$

Contraintes inégalité

$$K = \{Bv \leq c\} = \{(v, a_i) \leq c_i, i = 1 \cdots m\}$$

$$u \text{ solution optimale} \quad \Longleftrightarrow \begin{cases} Bu \leq c, \\ \exists p \in \mathbb{R}_+^m, \quad Au - b + B^T p = 0. \end{cases}$$

Optimisation sous contrainte : Directions admissibles

Définition : Soit $v \in K$. On appelle cône des directions admissibles l'ensemble

$$K(v) = \{0\} \cup \{w \in V,\\
\exists \{v_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset K \lim_{k\to+\infty} v_k = v, v_k \neq v \text{ pour tout } k,\\
\lim_{k\to+\infty} \frac{v_k - v}{||v_k - v||} = \frac{w}{||w||}\right\}$$

Optimisation sous contrainte : Directions admissibles

Définition : Soit $v \in K$. On appelle cône des directions admissibles l'ensemble

$$K(v) = \{0\} \cup \{w \in V,$$
$$\exists \{v_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset K \lim_{k\to+\infty} v_k = v, v_k \neq v \text{ pour tout } k,$$
$$\left. \lim_{k\to+\infty} \frac{v_k - v}{||v_k - v||} = \frac{w}{||w||} \right\}$$

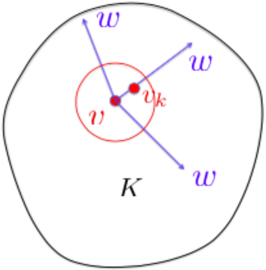


FIGURE 2.1 – Cas 1 : $v \in \mathring{K}$

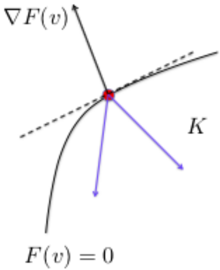


FIGURE 2.2 – Cas 2 : $v \in \mathrm{Fr}\, K$, $F(v) = 0$

Optimisation sous contrainte : Directions admissibles

Définition : Soit $v \in K$. On appelle cône des directions admissibles l'ensemble

$$K(v) = \{0\} \cup \{w \in V, \\ \exists \{v_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset K \lim_{k\to+\infty} v_k = v, v_k \neq v \text{ pour tout } k, \\ \lim_{k\to+\infty} \frac{v_k - v}{||v_k - v||} = \frac{w}{||w||}\}$$

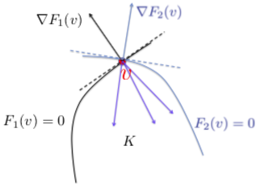


FIGURE 2.3 – Cas 3 : $v \in \mathrm{Fr}\, K$, $F_1(v) = F_2(v) = 0$, cas convexe

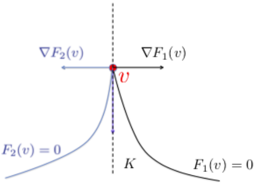


FIGURE 2.4 – Cas 4 : $v \in \mathrm{Fr}\, K$, $F_1(v) = F_2(v) = 0$, cas rebroussement

Optimisation sous contrainte : Directions admissibles

$$K(v) = \{0\} \cup \{w \in V,$$
$$\exists \{v_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset K \lim_{k\to+\infty} v_k = v, v_k \neq v \text{ pour tout } k,$$
$$\lim_{k\to+\infty} \frac{v_k - v}{||v_k - v||} = \frac{w}{||w||} \}$$

Théorème $K(v)$ est un cône fermé non vide.

Exemple :

$$F_1(v) = -v_1 - v - 2,$$
$$F_2(v) = v_1(v_1^2 + v_2^2) - 2(v_1^2 - v_2^2)$$
$$K = \{v, F_1(v) \leq 0, F_2(v) \leq 0\}$$

Optimisation sous contrainte : Directions admissibles

$$K(v) = \{0\} \cup \{w \in V,$$
$$\exists \{v_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subset K \lim_{k \to +\infty} v_k = v, v_k \neq v \text{ pour tout } k,$$
$$\lim_{k \to +\infty} \frac{v_k - v}{||v_k - v||} = \frac{w}{||w||} \}$$

Théorème $K(v)$ est un cône fermé non vide.

Exemple :

$$F_1(v) = -v_1 - v - 2,$$
$$F_2(v) = v_1(v_1^2 + v_2^2) - 2(v_1^2 - v_2^2)$$
$$K = \{v, F_1(v) \leq 0, F_2(v) \leq 0\}$$

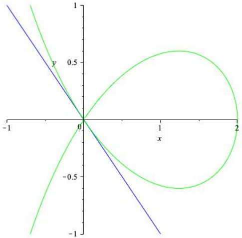
Optimisation sous contrainte : Directions admissibles

$$K(v) = \{0\} \cup \{w \in V,$$
$$\exists \{v_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subset K \lim_{k \to +\infty} v_k = v, v_k \neq v \text{ pour tout } k,$$
$$\left. \lim_{k \to +\infty} \frac{v_k - v}{||v_k - v||} = \frac{w}{||w||} \right\}$$

Théorème $K(v)$ est un cône fermé non vide.

Exemple :

$$F_1(v) = -v_1 - v - 2,$$
$$F_2(v) = v_1(v_1^2 + v_2^2) - 2(v_1^2 - v_2^2)$$
$$K = \{v, F_1(v) \leq 0, F_2(v) \leq 0\}$$



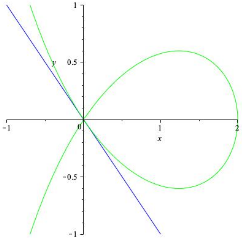
Optimisation sous contrainte : Directions admissibles

$$K(v) = \{0\} \cup \Big\{w \in V,\ \exists \{v_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset K\ \lim_{k\to+\infty} v_k = v, v_k \neq v \text{ pour tout } k,\ \lim_{k\to+\infty} \frac{v_k - v}{||v_k - v||} = \frac{w}{||w||}\Big\}$$

Théorème $K(v)$ est un cône fermé non vide.

Exemple :

$$F_1(v) = -v_1 - v - 2,$$
$$F_2(v) = v_1(v_1^2 + v_2^2) - 2(v_1^2 - v_2^2)$$
$$K = \{v, F_1(v) \leq 0, F_2(v) \leq 0\}$$



$$F_1(v) = 0, K(v) = \{w, w_1 + w_2 \geq 0\}$$
$$F_2(v) = 0, K(v) = \left\{w, w \cdot \begin{pmatrix} v_1(3v_1^2+v_2^2-2) \\ 2v_2(v_1+2) \end{pmatrix} \leq 0\right\}$$
$$K = \{v, F_1(v) \leq 0, F_2(v) \leq 0\}$$

Optimisation sous contrainte : Inéquation d'Euler générale

Théorème 2.7 : (inégalité d'Euler) Si u est un minimum local sur K de J différentiable, alors $J'(u) \in K(u)^\star$, c'est-à-dire

$$\forall w \in K(u) \quad (J'(u), w) \geq 0$$

Il faut identifier $K(u)$

Optimisation sous contrainte : Inéquation d'Euler générale

Théorème 2.7 : (inégalité d'Euler) Si u est un minimum local sur K de J différentiable, alors $J'(u) \in K(u)^\star$, c'est-à-dire

$$\forall w \in K(u) \quad (J'(u), w) \geq 0$$

Il faut identifier $K(u)$
Le lemme de Farkas va nous permettre de traiter maintenant le cas général : non convexe, non affine.
Théorème 2.5 [Lemme de Farkas].
Si $M = \{v \in V, \forall i \in \{1, .., m\}, (v, a_i) \leqslant 0\}$, alors $c \in M^\star$ si et seulement si $-c$ appartient au cône convexe engendré par les a_i,
i.e. il existe $\{p_1, .., p_m\}$ tous ≥ 0 tels que $c = -\sum_{i=1}^{m} p_i a_i$.

Optimisation sous contrainte : Contraintes égalités

J et $(F_j)_{j=1\ldots m}$ sont $m+1$ fonctions $\mathcal{C}^1$ de V dans $\mathbb{R}$, $F=(F_1,\cdots,F_m):V\to\mathbb{R}^m$, et l'ensemble des contraintes K défini par

$$K=\{w\in V,\forall j,1\leq j\leq m,\ F_j(w)=0\}=\{w\in V,\ F(w)=0\}$$

Définition Les contraintes sont régulières en $u\in K$ si les $F_i'(u)$ sont linéairement indépendantes. On dit alors que u est un point régulier.

$$\text{Exemple : } F_1(w)=(a_1,w)-c_1,\quad F_2(w)=(a_2,w)-c_2.$$

Optimisation sous contrainte : Contraintes égalités

J et $(F_j)_{j=1\dots m}$ sont $m+1$ fonctions $\mathcal{C}^1$ de V dans $\mathbb{R}$, $F = (F_1, \cdots, F_m) : V \to \mathbb{R}^m$, et l'ensemble des contraintes K défini par

$$K = \{w \in V, \forall j, 1 \leq j \leq m,\ F_j(w) = 0\} = \{w \in V,\ F(w) = 0\}$$

Définition Les contraintes sont régulières en $u \in K$ si les $F_i'(u)$ sont linéairement indépendantes. On dit alors que u est un point régulier.

$$\text{Exemple : } F_1(w) = (a_1, w) - c_1, \quad F_2(w) = (a_2, w) - c_2.$$

Optimisation sous contrainte : Contraintes égalités

J et $(F_j)_{j=1\dots m}$ sont $m+1$ fonctions $\mathcal{C}^1$ de V dans $\mathbb{R}$,
$F = (F_1, \cdots, F_m) : V \to \mathbb{R}^m$, et l'ensemble des contraintes K défini par

$$K = \{w \in V, \forall j, 1 \leq j \leq m,\ F_j(w) = 0\} = \{w \in V,\ F(w) = 0\}$$

Définition Les contraintes sont régulières en $u \in K$ si les $F_i'(u)$ sont linéairement indépendantes. On dit alors que u est un point régulier.

$$\text{Exemple : } F_1(w) = (a_1, w) - c_1, \quad F_2(w) = (a_2, w) - c_2.$$

Lemme Si les contraintes sont regulières en $u \in K$, alors

$$K(u) = \{w \in V, F_i'(u).w = 0, 1 \leq i \leq m\} = vec(F_1'(u), \cdots, F_m'(u))^{\perp}$$

Optimisation sous contrainte : Contraintes égalités

J et $(F_j)_{j=1\dots m}$ sont $m+1$ fonctions $\mathcal{C}^1$ de V dans $\mathbb{R}$, $F = (F_1, \cdots, F_m) : V \to \mathbb{R}^m$, et l'ensemble des contraintes K défini par

$$K = \{w \in V, \forall j, 1 \leq j \leq m,\ F_j(w) = 0\} = \{w \in V,\ F(w) = 0\}$$

Définition Les contraintes sont régulières en $u \in K$ si les $F_i'(u)$ sont linéairement indépendantes. On dit alors que u est un point régulier.

$$\text{Exemple : } F_1(w) = (a_1, w) - c_1, \quad F_2(w) = (a_2, w) - c_2.$$

Théorème Si u est un point de minimum local de J sur K, régulier, alors

$$\exists (p_1, \cdots, p_m) \in \mathbb{R} \quad J'(u) + \sum_j p_j F_j'(u) = 0$$

p_j multiplicateur de Lagrange associé à la contrainte $F_j(u) = 0$.

Optimisation sous contrainte : Contraintes égalités, cas convexe

Théorème Si u est un point de minimum local de J sur K, régulier, alors

$$\exists (p_1, \cdots, p_m) \in \mathbb{R} \quad J'(u) + \sum_j p_j F_j'(u) = 0$$

p_j multiplicateur de Lagrange associé à la contrainte $F_j(u) = 0$.
Corollaire Si K est convexe et J est convexe, alors on a une CNS : u régulier est un point de minimum local de J sur K si et seulement si

$$\exists (p_1, \cdots, p_m) \in \mathbb{R} \quad J'(u) + \sum_j p_j F_j'(u) = 0$$

Optimisation sous contrainte : Contraintes égalités

Prop : (Conditions d'ordre 2) Sous les hypothèses précédentes, si u est un point de minimum de J sur K alors

$$\forall w \in \cap F_j'(u)^\perp \quad (J''(u) + \sum_j p_j F_j''(u))(w,w) \geq 0$$

Optimisation sous contrainte : Contraintes inégalités

Théorème : Soit J et $(F_j)_{j=1\dots m}$ $m+1$ fonctions dérivables de V dans $\mathbb{R}$ et l'ensemble des contraintes K défini par

$$K = \{w \in V, \forall j, 1 \leq j \leq m,\ F_j(w) \leq 0\} = \{w \in V, \quad F(w) \leq 0\}.$$

Définition : Soit $u \in K$, l'ensemble $I(u)$ des contraintes actives ou saturées en u est défini par

$$I(u) = \{j, F_j(u) = 0\}$$

Les contraintes sont dites qualifiées en u si

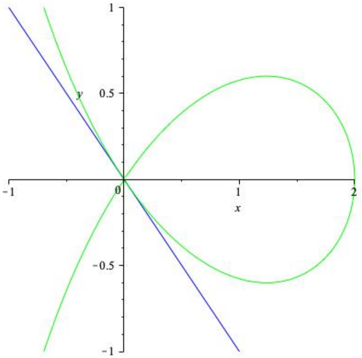
$$\exists \bar{w} \in V, \forall i \in I(u), (F_i'(u), \bar{w}) < 0 \ (\leq 0 \text{ si } F_i \text{ est affine}). \tag{8}$$

Remarque 1 : Une condition suffisante de qualification est que u est régulier pour les contraintes saturées, *i.e.* que les vecteurs $F_i'(u)$ pour $i \in I(u)$ sont indépendants.
Remarque 2 : Si les contraintes sont toutes affines, elles sont qualifiées en tout point.

Exemple

$$\exists \bar{w} \in V, \forall i \in I(u), (F_i'(u), \bar{w}) < 0 \ (\leq 0 \text{ si } F_i \text{ est affine}). \tag{9}$$

$$\begin{aligned}
&F_1(v) = -v_1 - v - 2, \\
&F_2(v) = v_1(v_1^2 + v_2^2) - 2(v_1^2 - v_2^2) \\
&K = \{v, F_1(v) \leq 0, F_2(v) \leq 0\}
\end{aligned}$$



Qualification ?

Optimisation sous contrainte : Contraintes inégalités

Théorème : Soit J et $(F_j)_{j=1\ldots m}$ $m+1$ fonctions dérivables de V dans $\mathbb{R}$. Si $u \in K$ où les contraintes sont qualifiées, est un point de minimum de J sur K, alors

$$\begin{cases} \exists (p_j)_j \in \mathbb{R}_+^m & J'(u) + \sum_j p_j F_j'(u) = 0 \\ \forall j = 1 \cdots m, & p_j F_j(u) = 0 \end{cases}$$

Remarque La dernière condition est équivalente à $(p, F'(u)) = 0$, ou encore $\forall j \notin I(u),\ p_j = 0$, ou encore $F_j(u) < 0 \implies p_j = 0$, ce qui réécrit la première comme

$$J'(u) + \sum_{j \notin I(u)} p_j F_j'(u) = 0$$

Optimisation sous contrainte : Conditions mêlées

Théorème : Soit J, $(F_j)_{j=1...m}$ et $(G_k)_{k=1...p}$ $m+p+1$ fonctions dérivables de V dans $\mathbb{R}$ et l'ensemble des contraintes K défini par

$$K = \{v \in V, \forall_j\, F_j(v) = 0, \forall k\, G_k(v) \leq 0\}.$$

Si u est un point de minimum de J sur K tel que les vecteurs $(F_j'(u))$ et $(G_k'(u))_{k \in I(u)}$ sont linéairement indépendants, alors

$$\exists((p_j)_j, (q_k)_k) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}_+^p \quad J'(u) + \sum_j p_j F_j'(u) + \sum_k q_k G_k'(u) = 0$$
$$\text{et} \quad \forall k \quad q_k G_k(u) = 0$$

Optimisation sous contrainte : Lagrangien

Motivation :

C.E $u \in K$ régulier minimum local $\Longrightarrow \exists p \in \mathbb{R}^m,\ J'(u) + \sum_j p_j F_j'(u) = 0$

C.I $u \in K$ qualifié minimum local $\Longrightarrow \exists p \in \mathbb{R}^m_+,\ J'(u) + \sum_j p_j F_j'(u) = 0.$

Cas convexe

C.E $u \in K$ régulier minimum local $\Longleftrightarrow \exists p \in \mathbb{R}^m,\ J'(u) + \sum_j p_j F_j'(u) = 0$

C.I $u \in K$ qualifié minimum local $\Longrightarrow \exists p \in \mathbb{R}^m_+,\ J'(u) + \sum_j p_j F_j'(u) = 0$

Optimisation sous contrainte : Lagrangien

Définition : Lagrangien associé au problème de minimisation

$$v \in V,\ \ q \in \mathbb{R}^m,\ \ \mathcal{L}(v,q) = J(v) + \sum_j q_j F_j(v)$$

$$\mathcal{L}'_v(v,q) = J'(v) + \sum_j q_j F'_j(v), \quad \mathcal{L}'_q(v,q) = F(v).$$

contraintes égalité $u \in K \iff \forall q \in \mathbb{R}^m,\ \mathcal{L}'_q(u,q) = 0$

C.E $\quad u$ régulier minimum local $\Longrightarrow$ $\begin{cases} \forall q \in \mathbb{R}^m,\ \mathcal{L}'_v(u,q) = 0 \\ \exists p \in \mathbb{R}^m,\ \mathcal{L}'_q(u,p) = 0 \end{cases}$

C.I $\quad u$ qualifié minimum local $\Longrightarrow$ $\begin{cases} \forall q \in \mathbb{R}^m,\ \mathcal{L}'_v(u,q) = 0 \\ \exists p \in \mathbb{R}^m_+,\ \mathcal{L}'_q(u,p).p = 0 \end{cases}$

Cas convexe

C.E $\quad u$ régulier minimum local $\Longleftrightarrow$

C.I $\quad u$ qualifié minimum local $\Longrightarrow$

Optimisation sous contrainte inégalité ; théorie de Kuhn et Tucker

V et M deux espaces de Hilbert, $U \subset V$, et $P \subset M$.
$\mathcal{L} : U \times P \to \mathbb{R}$.
Lemme : on a toujours

$$\sup_{q \in P} \inf_{v \in U} \mathcal{L}(v, q) \leq \inf_{v \in U} \sup_{q \in P} \mathcal{L}(v, q)$$

$\forall (u, p) \in U \times P$,

$$G(p) := \inf_{v \in U} \mathcal{L}(v, p) \;\leq\; \mathcal{L}(u, p) \;\leq\; \sup_{q \in P} \mathcal{L}(u, q) := J(u).$$

Optimisation sous contrainte : Lagrangien

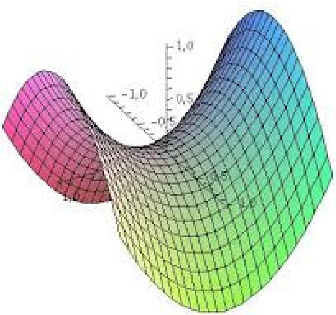
Réciproquement V et M deux espaces de Hilbert, $U \subset V$, et $P \subset M$. $\mathcal{L} : U \times P \to \mathbb{R}$.

Lemme : on a toujours

$$\sup_{q \in P} \inf_{v \in U} \mathcal{L}(v, q) \leq \inf_{v \in U} \sup_{q \in P} \mathcal{L}(v, q)$$

Définition : Un point selle (u, p) est défini par

$$\sup_{q \in P} \mathcal{L}(u, q) = \mathcal{L}(u, p) = \inf_{v \in U} \mathcal{L}(v, p)$$



Optimisation sous contrainte : Lagrangien

Réciproquement V et M deux espaces de Hilbert, $U \subset V$, et $P \subset M$. $\mathcal{L} : U \times P \to \mathbb{R}$.

Lemme : on a toujours

$$\sup_{q \in P} \inf_{v \in U} \mathcal{L}(v, q) \leq \inf_{v \in U} \sup_{q \in P} \mathcal{L}(v, q)$$

Définition : Un point selle (u, p) est défini par

$$\sup_{q \in P} \mathcal{L}(u, q) = \mathcal{L}(u, p) = \inf_{v \in U} \mathcal{L}(v, p)$$

Théorème : Si (u, p) est un point selle du Lagrangien, alors

$$\sup_{q \in P} \inf_{v \in U} \mathcal{L}(v, q) = \mathcal{L}(u, p) = \inf_{v \in U} \sup_{q \in P} \mathcal{L}(v, q)$$

Problèmes associés au Lagrangien

$U \subset V$, et $P \subset M$. $\mathcal{L} : U \times P \to \mathbb{R}$.

$$K := \{v \in U, \sup_{q \in P} \mathcal{L}(v,q) < +\infty\},$$

$$\text{pour } v \text{ dans } K,\ \mathcal{J}(v) := \sup_{q \in P} \mathcal{L}(v,q).$$

Le problème primal associé s'écrit :

$$(\mathcal{P}) : \text{Trouver } u \in K \text{ tel que } \mathcal{J}(u) = \inf_{v \in K} \mathcal{J}(v).$$

$K^* := \{q \in P, \inf_{v \in K} \mathcal{L}(v,q) > -\infty\}$, et

$$\text{pour } q \text{ dans } K^*,\ \mathcal{G}(q) := \inf_{v \in U} \mathcal{L}(v,q).$$

Le problème dual associé s'écrit :

$$(\mathcal{P}^*) : \text{Trouver } p \in K^* \text{ tel que } \mathcal{G}(p) = \sup_{q \in K^*} G(q)$$

Théorème : (u,p) est point selle du lagrangien si et seulement si u est solution de $(\mathcal{P})$, p est solution de $(\mathcal{P}^*)$, et $\mathcal{J}(u) = \mathcal{G}(p)$.

Contraintes inégalité, théorie de Kuhn et Tucker

$U = V$, $M = P = \mathbb{R}^m$, F, J convexes.

$$\mathcal{L}(v, q) = J(v) + \sum_j q_j F_j(v)$$

Définition Les contraintes sont qualifiées si

$$\exists \bar{v} \in V, \forall i, 1 \leq i \leq m, F_i(\bar{v}) < 0 \text{ (resp. } \leq 0 \text{ si } F_i \text{ est affine).}$$

Théorème : (Kuhn Tucker) Si les fonctions J et F_j sont convexes

différentiables, et si les contraintes sont qualifiées, u est point de minimum de J sur K si et seulement si il existe $p \in \mathbb{R}_+^m$ tel que

$$\begin{cases} J'(u) + \sum_{i=1}^{m} p_i F_i'(u) = 0 \\ \sum_{i=1}^{m} p_i F_i(u) = 0 \end{cases}$$

De plus p est solution du problème dual $(\mathcal{P}^*)$.

Applications

Application 1 : programme linéaire avec contraintes affines

$$V = \mathbb{R}^n, J(v) = (b, v), F(v) = Bv - c.$$

où B est une matrice $m \times n$.

Application 2 : programme quadratique avec contraintes affines

$$V = \mathbb{R}^n, J(v) = \frac{1}{2}(Av, v) - (b, v), F(v) = Bv - c.$$

où A est une matrice $n \times n$ symétrique définie positive.