Optimisation MACS 2 2019

Résumé Résultats théoriques

14 novembre 2019

Optimisation

$$\underset{\mathbf{u}\in\mathbf{K}}{\mathrm{Min}}\ \mathbf{J(u)}$$

- J fonction différentiable
- $K \subset V$ avec V espace de Hilbert.
- Dimension
  - $\dim V < +\infty$: Optimisation en dimension finie ($\mathbb{R}^n$, polynômes de degré inférieur à n, espaces d'éléments finis, série de Fourier tronquée...)
  - $\dim V = +\infty$: Optimisation en dimension infinie ($\mathcal{C}^1$,L^2, H^1, H^1_0...)
- Contraintes
  - $K = V$: Optimisation sans contraintes
  - $K \subsetneq V$: Optimisation sous contraintes (1, 2 infinité)
    - Égalité : $F(v) = 0$, $F : V \to W$,
    - Inégalité : $F(v) \leq 0$.

Théorème d'existence en dimension finie

Theorème : Soit V un espace de Hilbert de dimension finie et $K \subset V$ un ensemble fermé. Soit J une fonction continue de K dans $\mathbb{R}$. Sous une des deux hypothèses suivantes

- K est borné,
- *J infinie à l'infini*,

$$J(v) \underset{\|v\| \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$$

il existe au moins un point où J atteint son minimum sur K.

Exemples $\|v\|$, $\|v\|^2$, $\frac{1}{2}(Av, v) - (b, v), \cdots$.

Minimum et fonctions convexes

Soit K un convexe fermé
Proposition : Si J est convexe, alors tout point de minimum local dans K est un point de minimum global.

Proposition : Si J est strictement convexe, il existe au plus un point de minimum global dans K .

Proposition : Si J est fortement convexe, il existe un unique point de minimum global dans K .

Exemple sur la fonction $J(x) = \frac{1}{2}(Ax, x) - (b, x)$ avec A matrice définie positive.

Cas sans contrainte. Condition nécessaire de minimum

V espace de Hilbert. $J : V \to \mathbb{R}$.

Théorème : (Equation d'Euler) Si $u \in V$ est un point de minimum local de J différentiable, alors $J'(u) = 0$.

Théorème : (Condition nécessaire ordre 2) Si $u \in V$ est un point de minimum local de J deux fois différentiable, alors on a de plus

$$\forall v \in V \quad (J''(u)v, v) \geq 0$$

Optimisation sous contrainte : K convexe

$$\text{Trouver } u \in K \text{ tel que } J(u) = \inf_{v \in K} J(v).$$

Si u est solution, on dit que u est solution optimale. On suppose que K est un convexe fermé non vide et que J est différentiable.
Théorème : Soit $K \subset V$ convexe. Si $u \in K$ est un point de minimum sur K de J différentiable, alors

$$\text{Inéquation d'Euler : } u \in K,\ \forall v \in K \quad (J'(u), v - u) \geq 0$$

Corollaire : Si J est convexe et différentiable, $K = V$, alors u est solution optimale si et seulement si $J'(u) = 0$

Optimisation sous contraintes égalité

$$K = \{w \in V, \forall j, 1 \leq j \leq m,\ F_j(w) = 0\}.$$

Définition Les contraintes sont régulières en $u \in K$ si les $F_i'(u)$ sont linéairement indépendantes. On dit alors que u est un point régulier.

$$\text{Exemple : } F_1(w) = (a_1, w) - c_1, \quad F_2(w) = (a_2, w) - c_2.$$

Théorème Si u est un point de minimum local de J sur K régulier

$$\exists(\lambda_1, \cdots, \lambda_m) \in \mathbb{R} \quad J'(u) + \sum_j \lambda_j F_j'(u) = 0$$

λ_j multiplicateur de Lagrange associé à la contrainte $F_j(u) = 0$.
Corollaire Si K est convexe et J est convexe, u régulier est un point de minimum local de J sur K si et seulement si

$$\exists(\lambda_1, \cdots, \lambda_m) \in \mathbb{R} \quad J'(u) + \sum_j \lambda_j F_j'(u) = 0$$