Résumé du cours d'optimisation.

L. HALPERN

13 septembre 2005

Table des matières

Première partie

Résultats théoriques

Chapitre 1

Résultats d'existence

Sommaire

Soit V un espace de Hilbert (sur $\mathbb{R}$), K une partie de V , J une fonction définie sur V à valeurs dans $\mathbb{R}$. On dit que u est **minimum local** de J sur K si u appartient à K et s'il existe un voisinage U de u dans K tel que

$$\forall v \in U, J(u) \leq J(v) \tag{1.1}$$

Si la relation précédente est vraie pour tout v dans K, on dit que u est **minimum global** de J sur K. On définit un problème de minimisation sur K par

$$\begin{cases} u \in K, \\ J(u) = \inf\limits_{v \in K} J(v) \end{cases} \tag{1.2}$$

On dit alors que u est **solution optimale** du problème de minimisation sur K. Le problème de minimisation est dit **sans contrainte** si $V = K$, **avec contrainte**s si $V \neq K$.

Bien évidemment, on définit un problème de maximisation, en remplaçant $\leqslant$ par $\geqslant$ dans (1.1) et inf par sup dans (1.2). On parlera en général de problème d'optimisation. On passe de l'un à l'autre en définissant la fonctionnelle opposée. Dans ce cours tous les résultats sont établis sur les problèmes de minimisation.

1.1 Théorème de Weierstrass

Théorème 1.1 . *Si K est un compact non vide et si J est continue sur K, le problème de minimisation (1.2) admet une solution.*

Remarque 1.1 . *C'est un théorème d'existence, mais il ne donne pas de résultat d'unicité.*

Remarque 1.2 . *Dans les problèmes d'optimisation, les ensembles de contraintes sont en général fermés bornés, mais pas forcément compacts. Par contre ils sont souvent convexes.*

1.2 Cas convexe

On rappelle qu'une partie K de V est convexe si

$$\forall (x,y) \in K, \forall \theta \in [0,1], \theta x + (1-\theta)y \in K \tag{1.3}$$

Une fonction J définie sur un convexe K est dite

- convexe si

$$\forall (x,y) \in K, \forall \theta \in [0,1], J(\theta x + (1-\theta)y) \leqslant \theta J(x) + (1-\theta)J(y), \tag{1.4}$$

- strictement convexe si

$$\forall (x,y) \in K, x \neq y, \forall \theta \in]0,1[, J(\theta x + (1-\theta)y) \leqslant \theta J(x) + (1-\theta)J(y), \tag{1.5}$$

- α convexe si

$$\begin{aligned} \forall (x,y) \in K, \forall \theta \in [0,1], J(\theta x + (1-\theta)y) \leqslant\ & \theta J(x) + (1-\theta)J(y) - \\ & - \frac{\alpha}{2}\theta(1-\theta)||x-y||^2. \end{aligned} \tag{1.6}$$

Théorème 1.2 . *Si J est convexe, tout minimum local est global, et l'ensemble des solutions optimales est convexe.*

Théorème 1.3 . *Si J est strictement convexe, la solution optimale, si elle existe, est unique.*

Théorème 1.4 (Théorème fondamental) . *Soit K un convexe fermé non vide, J une fonction définie sur K à valeurs dans $\mathbb{R}$ convexe continue. On suppose que J est infinie à l'infini (i.e. $J(v) \to +\infty$ lorsque $||v|| \to +\infty$) ou que K est borné. A lors le problème de minimisation admet une solution.*

Corollaire 1.1 . *Soit K un convexe fermé non vide, J une fonction définie sur K à valeurs dans $\mathbb{R}$, α-convexe continue. Alors le problème de minimisation admet une solution et une seule. De plus toute suite minimisante converge vers u.*

1.3 Rappels de calcul différentiel

Soit J une fonctionnelle définie sur un Hilbert V à valeurs dans $\mathbb{R}$. On note V' le dual de V, *i.e.* l'espace vectoriel des applications linéaires continues sur V à valeurs dans $\mathbb{R}$.

1.3.1 Dérivées premières

Définition 1.1 (Différentiabilité) *J est différentiable (au sens de Fréchet) en $u \in V$ s'il existe l_u dans V' telle que,*

$$\forall w \in V, J(u+w) = J(u) + l_u(w) + \epsilon(w)\|w\|, \quad \lim_{\epsilon \to 0} \epsilon(w) = 0 \tag{1.7}$$

l_u est la dérivée de J et se note $J'(u)$. On écrira $J'(u) \cdot v = l_u(v)$.

Remarque 1.3 *Par le théorème de Riesz puisque $J'(u)$ est dans V', il existe un unique élément de V noté $\nabla J(u)$ tel que pour tout v dans V on ait*

$$J'(u) \cdot v = (\nabla J(u), v)$$

Exemples de base

1. Les formes linéaires $J(u) = (c, u)$, où c est un vecteur donné dans V. Alors $J'(u).v = (c, v)$, $\nabla J(u) = c$.
2. Les fonctions $J(u) = a(u, u)$, où a est une forme bilinéaire continue sur V. Alors $J'(u).v = a(u, v) + a(v, u)$, et si a est symétrique $J'(u).v = 2a(u, v)$.
3. Si $V = \mathbb{R}^n$, $J'(u) = (\frac{\partial J}{\partial x_1}(u), \cdots, \frac{\partial J}{\partial x_n}(u))$ et $J'(u).v = \sum_{i=1}^n \frac{\partial J}{\partial x_i}(u) v_i$.

1.3.2 Dérivées secondes

Si $J : V \mapsto \mathbb{R}$, $J' : V \mapsto V'$ admet une différentielle J'' et pour tout u, $J''(u) \in \mathcal{L}(V, V')$, espace des applications linéaires continues de V dans V'. Cet espace s'identifie à $\mathcal{L}_2(V)$, espace des applications bilinéaires continues de $V \times V$ dans $\mathbb{R}$. On notera $J"(u) \cdot v \cdot w$.

Exemples de base

1. $J(u) = (c, u)$, $J"(u) = 0$.
2. $J(u) = a(u, u)$, alors $J''(u).v.w = a(v, w) + a(w, v)$, et si a est symétrique $J''(u).v.w = 2a(v, w)$. Si $V = \mathbb{R}^n$, $J(u) = \frac{1}{2}(Au, u)$ où A est une matrice symétrique, alors $J"(u) = A$ pour tout u.
3. Si $V = \mathbb{R}^n$, $J''(u)$ est la matrice des dérivées partielles secondes $\frac{\partial^2 J}{\partial x_i \partial x_j}(u)$.

1.3.3 Formules de Taylor

Taylor Mac-Laurin ordre 1 Si $J : V \mapsto \mathbb{R}$ est définie et continue sur $[u, v]$, différentiable sur $]u, v[$, il existe $\theta \in]0, 1[$ tel que

$$J(v) = J(u) + J'(u + \theta(v - u)) \cdot (v - u)$$

Taylor Mac-Laurin ordre 2 Si $J : V \mapsto \mathbb{R}$ est définie et continue sur $[u, v]$, 2 fois différentiable sur $]u, v[$, il existe $\theta \in]0, 1[$ tel que

$$J(v) = J(u) + J'(u) \cdot (v - u) + \frac{1}{2} J''(u + \theta(v - u)) \cdot (v - u) \cdot (v - u)$$

Taylor Young Si $J : V \mapsto \mathbb{R}^p$ est définie et continue sur $[u, v]$, de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[u, v]$, 2 fois différentiable dans un voisinage de u,

$$J(v) = J(u) + J'(u) \cdot (v - u) + \epsilon(v - u)\|v - u\|, \quad \lim_{\epsilon \to 0} \epsilon(v - u) = 0$$

Théorème 1.5 (caractérisation des fonctions convexes) . *J est convexe si et seulement si l'une des conditions suivantes est vérifiée :*

1. *Si J est différentiable, le graphe de J est au-dessus de l'hyperplan tangent, i.e.*

$$\forall u, v \in V, J(v) \geqslant J(u) + J'(u) \cdot (v - u) \tag{1.8}$$

2. *Si J est différentiable, J' est un opérateur monotone, i.e.*

$$\forall u, v \in V, (J'(v) - J'(u)) \cdot (v - u) \geqslant 0 \tag{1.9}$$

3. *Si J est deux fois différentiable, J'' est un opérateur non négatif, i.e.*

$$\forall u, w \in V, J''(u)w.w \geqslant 0 \tag{1.10}$$

Pour une fonction α -convexe, on a :

Théorème 1.6 (caractérisation des fonctions α -convexes) . *J est α- convexe si et seulement si l'une des conditions suivantes est vérifiée :*

1. *Si J est différentiable,*

$$\forall u, v \in V, J(v) \geqslant J(u) + J'(u) \cdot (v-u) + \frac{\alpha}{2} \parallel v-u \parallel^2, \tag{1.11}$$

2. *Si J est différentiable,*

$$\forall u, v \in V, (J'(v) - J'(u)) \cdot (v-u) \geqslant \alpha \parallel v-u \parallel^2, \tag{1.12}$$

3. *Si J est deux fois différentiable,*

$$\forall u, w \in V, J''(u)w.w \geqslant \alpha \parallel w \parallel^2 . \tag{1.13}$$

En particulier les fonctionnelles de la forme $J(u) = a(u,u)$, où a est une forme bilinéaire symétrique continue sur V sont α-convexes si et seulement si

$$\forall u \in V, 2a(w,w) \geqslant \alpha \|w\|^2$$

Si l'on est dans $\mathbb{R}^n$, avec $J(u) = \frac{1}{2}(Au,u)$, ceci revient à

$$\forall u \in V, (Aw,w) \geqslant \alpha \|w\|^2$$

La matrice A étant symétrique, elle diagonalise en base orthonormée, $A = PDP^T$, où D est la matrice des valeurs propres d_i et P la matrice des vecteurs propres. On a alors

$$(Aw,w) = \sum_{i=1}^{n} d_i((Pw)_i)^2 \geqslant (min_{1\leq i\leq n} d_i) \sum_{i=1}^{n} ((Pw)_i)^2$$

$$(Aw,w) \geqslant (min_{1\leq i\leq n} d_i)\|Pw\|^2 = (min_{1\leq i\leq n} d_i)\|w\|^2$$

car, puisque P est orthogonale, $\|Pw\| = \|w\|$. Si A est définie positive, a fonctionnelle est $min_{1\leq i\leq n} d_i$-convexe.

Chapitre 2

Caractérisation des extrema

Sommaire

2.1 Equation d'Euler, cas général

Théorème 2.1 (condition nécessaire) . *Si u est minimum local de J dans V, alors*

1. *Si J est différentiable, $J'(u) = 0$,*
2. *Si J est deux fois différentiable, on a de plus $\forall w \in V, J''(u)w.w \geqslant 0$.*

Théorème 2.2 (condition suffisante) . *Soit J une fonction différentiable dans V et u un point de V tel que $J'(u) = 0$.*

1. *Si J est deux fois différentiable dans un voisinage de u et s'il existe un voisinage Ω de u tel que $\forall v \in \Omega, \forall w \in V, J''(v)w.w \geqslant 0$, alors u est minimum local de J.*
2. *Si J est deux fois différentiable,et s'il existe $\alpha > 0$ tel que*

$$\forall w \in V, J''(u)w.w \geqslant \alpha \parallel w \parallel^2,$$

alors u est minimum local strict pour J.

2.2 Inéquation d'Euler, cas convexe

Dans cette section on considère le problème de minimisation avec contraintes. On suppose que K est un convexe fermé non vide et que J est différentiable.

Théorème 2.3 . *Si u est solution optimale on a l'inéquation d'Euler*

$$\begin{cases} u \in K \\ \forall v \in K, J'(u).(v-u) \geqslant 0. \end{cases} \tag{2.1}$$

Réciproquement si on a l'inéquation d 'Euler en u et si de plus J est convexe, alors u est solution optimale.

Corollaire 2.1 *[Projection sur un convexe fermé]. Soit K une partie convexe fermée non vide d'un espace de Hilbert V, et w un point de V n'appartenant pas à K. alors il existe un unique point de K, noté $\mathbb{P}_K w$ tel que*

$$\begin{cases} \mathbb{P}_K w \in K, \\ \|w - \mathbb{P}_K w\| = \inf_{v \in K} \|w - v\| \end{cases} \tag{2.2}$$

Il est caractérisé par

$$\forall v \in K, (\mathbb{P}_K w - w, v - \mathbb{P}_K w) \geqslant 0 \tag{2.3}$$

Les cas particuliers sont très importants.

1. $K = V$ On a le

Théorème 2.4 . *Si J est convexe différentiable, alors u réalise le minimum de J sur V si et seulement si $J'(u) = 0$.*

Remarque 2.1 . *En particulier si J est α-convexe, il existe une unique solution optimale, caractérisée par $J'(u) = 0$.*

2. K **sous-espace affine** engendré par l'espace vectoriel fermé E, i.e. $K = \{u_0 + v, v \in E\}$, alors

$$(2.1) \Leftrightarrow \begin{cases} u \in K \\ \forall w \in K,\ J'(u).w = 0 \end{cases} \tag{2.4}$$

Si E est défini par m contraintes, $E = \{w \in V, (a_i, w) = 0, 1 \leqslant i \leqslant m\}$, alors

$$(2.1) \Leftrightarrow \begin{cases} u \in K \\ \exists \lambda_1, .., \lambda_m, \nabla J(u) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i a_i = 0 \end{cases} \tag{2.5}$$

Remarque 2.2 *Si l'on définit les fonctions affines $F_i(w) = (w - u_0, a_i)$, alors $K = \{w \in V, F_i(w) = 0\}$, et (2.5) se réécrit*

$$(2.1) \Leftrightarrow \begin{cases} u \in K \\ \exists \lambda_1, .., \lambda_m, \nabla J(u) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i F_i' = 0. \end{cases} \tag{2.6}$$

3. K **cône convexe fermé** de sommet u_0. On note K_0 le cône de sommet O qui lui est parallèle. Alors

$$(2.1) \Leftrightarrow \begin{cases} u \in K \\ J'(u).(u_0 - u) = 0 \\ \forall w \in K_0,\ J'(u).w \geqslant 0. \end{cases} \tag{2.7}$$

Pour M cône convexe fermé de sommet O, on définit le cône dual par

$$M^\star = \{c \in V, \forall v \in M, (c, v) \geqslant 0\} \tag{2.8}$$

Si M est engendré par un nombre fini de vecteurs, alors on peut décrire $M^\star$:

Théorème 2.5 (Lemme de Farkas) .
Si $M = \{c \in V, \forall i \in \{1, .., m\}, (c, a_i) \leqslant 0\}$, alors $c \in M^\star$ si et seulement si $-c$ appartient au cône convexe engendré par les a_i, i.e. il existe $\{\lambda_1, .., \lambda_m\}$ tous $\geqslant 0$ tels que $c = -\sum_{i=1}^{m} \lambda_i a_i$.

Intéressons nous maintenant au cas où K_0 est défini par m contraintes, $K_0 = \{w \in V, (a_i, w) \leq 0, 1 \leqslant i \leqslant m\}$. Alors la troisième ligne dans (2.7) exprime que $-J'(u)$ est dans $K_0^\star$, et donc (**??**) se réécrit

$$(2.1) \Leftrightarrow \begin{cases} u \in K \\ J'(u).(u_0 - u) = 0 \\ \exists(\lambda_1, \cdots, \lambda_m) \geqslant 0, \nabla J(u) + \sum_{i=1}^m \lambda_i a_i = 0 \end{cases} \tag{2.9}$$

Remarquons comme dans le cas précédent que K se définit ici comme $K = \{w \in V, F_i(w) \leq 0, 1 \leqslant i \leqslant m\}$, et (2.9) s'écrit

$$(2.1) \Leftrightarrow \begin{cases} u \in K \\ J'(u).(u_0 - u) = 0 \\ \exists(\lambda_1, \cdots, \lambda_m) \geqslant 0, \nabla J(u) + \sum_{i=1}^m \lambda_i F_i' = 0 \end{cases} \tag{2.10}$$

2.3 Multiplicateurs de Lagrange, cas général

Le lemme de Farkas va nous permettre de trouver des conditions nécessaires d'optimalité dans le cas général.
Pour K fermé non vide, pour tout v dans K, nous définissons le cône des directions admissibles $K(v)$. C'est un cône fermé de sommet O, défini par

$$\begin{aligned} &K(v) = \{0\} \cup \{w \in V, \\ &\exists \{v_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset K \lim_{k\to+\infty} v_k = v, v_k \neq v \text{ pour tout } k, \lim_{k\to+\infty} \frac{v_k - v}{||v_k - v||} = \frac{w}{||w||}\} \end{aligned} \tag{2.11}$$

Théorème 2.6 . *Si J a un minimum local en $u \in K$ et si J est différentiable en u, alors $J'(u) \in K(u)^\star$.*

Remarque 2.3 . *Si K et J sont convexes, alors c'est une condition nécessaire et suffisante.*

2.3.1 contraintes égalités

$$K = \{v \in V, F(v) = 0\} \tag{2.12}$$

où F est une fonction $\mathcal{C}^1$ de V dans $\mathbb{R}^m$, ses coordonnées sont $F_1, .., F_m$.

Définition 2.1 . *Les contraintes sont régulières en $u \in K$ si les $F_i'(u)$ sont linéairement indépendantes. On dit alors que u est un point régulier.*

On peut alors caractériser le cône des directions admissibles :

Lemme 2.1 . *Si les contraintes sont regulières en $u \in K$, alors*

$$K(u) = \{w \in V, F_i'(u).w = 0, 1 \leq i \leq m\} \tag{2.13}$$

et en déduire l'existence de **multiplicateurs de Lagrange** :

Théorème 2.7 . *Si $u \in K$, u régulier, est minimum local pour J, il existe m réels $p_1, .., p_m$ tels que*

$$J'(u) + \sum_{i=1}^m p_i F_i'(u) = 0. \tag{2.14}$$

Remarque 2.4 . *Si K et J sont convexes, alors c'est une condition nécessaire et suffisante.*

Remarque 2.5 . *Introduisons le lagrangien défini sur $V \times \mathbb{R}^m$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ par*

$$\mathcal{L}(v,q) \equiv J(v) + \sum_{i=1}^{m} q_i F_i(v), \tag{2.15}$$

alors

$$\begin{aligned} \mathcal{L}'_v(v,q) &\equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial v}(v,q) = J'(v) + \sum_{i=1}^{m} q_i F'_i(v) \\ \mathcal{L}'_q(v,q) &\equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q}(v,q) = F(v) \end{aligned} \tag{2.16}$$

et

$$\begin{aligned} u \in K &\Leftrightarrow \forall q \in \mathbb{R}^m, \mathcal{L}'_v(u,q) = 0 \\ u \text{ minimum local } &\Leftrightarrow \exists p \in \mathbb{R}^m, \mathcal{L}'_q(u,p) = 0 \end{aligned} \tag{2.17}$$

2.3.2 contraintes inégalités

$$K = \{v \in V, F(v) \leq 0\} \tag{2.18}$$

où F est une fonction C^1 de V dans $\mathbb{R}^m$, ses coordonnées sont $F_1,..,F_m$.

Définition 2.2 . *Pour $u \in K$, on appelle $I(u)$ l'ensemble des contraintes actives ou saturées, i.e.$F_i(u) = 0$ si $i \in I(u)$, $F_i(u) < 0$ sinon. Les contraintes sont dites qualifiées en u si*

$$\exists \bar{w} \in V, \forall i \in I(u), (F'_i(u), \bar{w}) < 0 \text{ (resp. } \leq 0 \text{ si } F_i \text{est affine}). \tag{2.19}$$

On peut encore caractériser le cône des directions admissibles :

Lemme 2.2 . *Si les contraintes sont qualifiées en $u \in K$, alors*

$$K(u) = \{w \in V, \forall i \in I(u), F'_i(u).w \leq 0\} \tag{2.20}$$

Le lemme de Farkas permet alors d'établir le

Théorème 2.8 . *Si $u \in K$, où les contraintes sont qualifiées, est minimum local pour J, il existe m réels $p_1,..,p_m \geqslant 0$ tels que*

$$\begin{aligned} J'(u) + \sum_{i=1}^{m} p_i F'_i(u) = 0 \\ \sum_{i=1}^{m} p_i F_i(u) = 0 \end{aligned} \tag{2.21}$$

Remarque 2.6 . *Le lagrangien est maintenant défini sur $V \times \mathbb{R}^m_+$, et l'on peut écrire*

$$\begin{aligned} u \in K \text{ solution optimale } \Rightarrow \exists p \in \mathbb{R}^m_+, \\ \mathcal{L}'_v(u,p) = \mathcal{L}'_q(u,p).p = 0. \end{aligned} \tag{2.22}$$

Attention, contrairement au cas des contraintes égalités, on n'a qu'une condition nécessaire.Le développement d'une condition nécéssaire et suffisante est l'objet du chapitre suivant.

Chapitre 3

Lagrangien et point selle

Sommaire

3.1 Point selle

Soient V et M deux espaces de Hilbert, U une partie de V et P une partie de M. On définit le lagrangien comme une application de $U \times P$ dans $\mathbb{R}$ et on le note $\mathcal{L}$.

Exemple 3.1 *au problème d'optimisation du chapitre précédent,*

$$\begin{cases} u \in K, \\ J(u) = \inf_{v \in K} J(v) \end{cases} \tag{3.1}$$

nous avons associé de façon naturelle un lagrangien dans les cas suivants :

$$\begin{array}{c} K = \{v, F(v) \leq 0\}\ ;\ \mathcal{L} : K \times \mathbb{R}^m_+ \to \mathbb{R} \\ K = \{v, F(v) = 0\}\ ;\ \mathcal{L} : K \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R} \end{array} \tag{3.2}$$

où $F : V \to \mathbb{R}^m$, et

$$\mathcal{L}(v, q) = J(v) + (F(v), q) \tag{3.3}$$

(.,.) désigne le produit scalaire dans $\mathbb{R}^m$.

Lemme 3.1 .

$$\sup_{q \in P} \inf_{v \in U} \mathcal{L}(v, q) \leq \inf_{v \in U} \sup_{q \in P} \mathcal{L}(v, q) \tag{3.4}$$

Remarquons que l'on n'interdit pas les valeurs $+\infty$ et $-\infty$.

Définition 3.1 .(u, p) *est point selle du lagrangien si*

$$\sup_{q \in P} \mathcal{L}(u, q) = \mathcal{L}(u, p) = \inf_{v \in U} \mathcal{L}(v, p) \tag{3.5}$$

Lemme 3.2 . *Si (u,p) est point selle du lagrangien, alors*

$$\sup_{q\in P}\inf_{v\in U}\mathcal{L}(v,q)=\mathcal{L}(u,p)=\inf_{v\in U}\sup_{q\in P}\mathcal{L}(v,q) \tag{3.6}$$

On associe maintenant au lagrangien un problème primal et un problème dual. On définit d'une part K et J par

$$K=\{v\in U, \sup_{q\in P}\mathcal{L}(v,q)<+\infty\},$$

et pour v dans K,

$$J(v)=\sup_{q\in P}\mathcal{L}(v,q).$$

Le problème primal associé s'écrit :

$$(\mathcal{P})\ \text{Trouver } u\in K \text{ tel que } J(u)=\inf_{v\in K}J(v)$$

On définit également K^* et G par $K^*=\{q\in P, \inf_{v\in U}\mathcal{L}(v,q)>-\infty\}$, et pour q dans K^*, $G(q)=\inf_{v\in U}\mathcal{L}(v,q)$. Le problème dual associé s'écrit :

$$(\mathcal{P}^*)\ \text{Trouver } p\in K^* \text{ tel que } G(p)=\sup_{q\in K^*}G(q)$$

Théorème 3.1 . *(u,p) est point selle du lagrangien si et seulement si u est solution de $(\mathcal{P})$, p est solution de $(\mathcal{P}^*)$, et $J(u)=G(p)$.*

3.2 Théorie de Kuhn et Tucker

On considère maintenant le problème de minimisation convexe avec contraintes inégalité :

$$K=\{v\in V, F(v)\leq 0\} \tag{3.7}$$

où F est une fonction convexe C^1 de V dans $\mathbb{R}^m$, ses coordonnées sont $F_1,..,F_m$. On suppose J convexe et on définit le lagrangien sur $V\times\mathbb{R}^m_+$ par

$$\mathcal{L}(v,q)=J(v)+(F(v),q) \tag{3.8}$$

On a vu au chapitre précédent une condition nécessaire de minimum local, au moyen des multiplicateurs de Lagrange. On va maintenant établir une réciproque.

Définition 3.2 . *Les contraintes sont qualifiées si*

$$\exists\bar{v}\in V,\forall i, 1\leq i\leq m, F_i(\bar{v})<0 \textit{ (resp. } \leq 0 \textit{ si } F_i \textit{ est affine).} \tag{3.9}$$

Remarque 3.1 .

1. *Si aucune des F_i n'est affine, la définition 3.2 se résume à $\overset{\circ}{K}\neq\emptyset$. Si toutes les F_i sont affines, elle signifie que $K\neq\emptyset$.*

2. *Si les contraintes sont qualifiées en ce sens, elles sont qualifiées en tout point au sens de la définition 2.2 du chapitre 2.*

Théorème 3.2 . *Sous les hypothèses de qualification de la définition 3.2, si u est solution de $(\mathcal{P})$, il existe p dans $\mathbb{R}_+^m$ tel que (u,p) soit point selle du lagrangien.*

Donc **dans le cas convexe**, avec l'hypothèse de **qualification des contraintes de la définition 3.2**, on a le schéma suivant :

$$u \text{ solution optimale de (1.2)} \overset{\text{(Th 2.8)}}{\Longrightarrow} \exists p \in \mathbb{R}_+^m \left\{ \begin{array}{c} J'(u) + \displaystyle\sum_{i=1}^m p_i F_i'(u) = 0 \\ \displaystyle\sum_{i=1}^m p_i F_i(u) = 0 \end{array} \right.$$

$$\overset{\text{(Th 3.1)}}{\Longrightarrow} (u,p) \text{ point selle du lagrangien } \overset{\text{(Th 3.2)}}{\Longrightarrow} u \text{ solution optimale de (1.2).}$$

Théorème 3.3 (Kuhn et Tucker) . *On suppose que les fonctions J et $\{F_i\}_{1\le i\le m}$ sont convexes différentiables et que (3.9) est vérifiée. Soit*

$$K = \{v, F_i(v) \le 0, 1 \le i \le m\}.$$

Alors u est minimum de J sur K si et seulement si il existe p dans $\mathbb{R}_+^m$ tel que

$$\left\{ \begin{array}{c} J'(u) + \displaystyle\sum_{i=1}^m p_i F_i'(u) = 0 \\ \displaystyle\sum_{i=1}^m p_i F_i(u) = 0 \end{array} \right. \tag{3.10}$$

De plus p est solution du problème dual $(\mathcal{P}^*)$.

Deuxième partie

Algorithmes

Chapitre 4

Méthodes de descente. Problèmes sans contraintes

Sommaire

4.1 Principe

On se place dans un espace de Hilbert V, et on cherche à calculer numériquement un x (qui n'est pas forcément unique) tel que

$$\forall y \in V, J(x) \leqslant J(y) \tag{4.1}$$

Le principe est de construire un algorithme itératif de la forme

$$x^{k+1} = x^k - \rho_k d^k \tag{4.2}$$

d^k est la **direction de descente**, ρ_k est le **pas**. Il est, soit fixé, éventuellement le même pour toutes les étapes (on parle alors de **méthode à pas variable**), soit calculé à chaque étape de façon à minimiser J dans la direction d^k (on parle alors de **méthode à pas optimal**).

4.2 Méthode de relaxation

On se place en dimension finie, *i.e.* $V = \mathbb{R}^n$. Pour passer de x^k à x^{k+1}, on minimise successivement dans les n directions de la base canonique.

1. $x^{k,1}$ est défini par

$$J(x^{k,1}) = \inf_{\rho \in \mathbb{R}} J(x^k - \rho e_1)$$

   ou encore

$$x^{k,1} = (x_1^k - \rho_1, x_2^k, .., x_n^k)$$

   On note $x_1^{k+1} = x_1^k - \rho_1$

2. à l'étape i on a

$$x^{k,i} = (x_1^{k+1}, .., x_i^{k+1}, x_i^k, .., x_n^k)$$

   $x^{k,i+1}$ est maintenant défini par

$$J(x^{k,i+1}) = \inf_{\rho} J(x^{k,i} - \rho e_{i+1})$$

3. $x^{k+1} = x^{k,n}$

Théorème 4.1 . *Si J est α-convexe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^n$, l'algorithme de relaxation est bien défini et converge vers la solution optimale.*

Remarque 4.1 . *Dans le cas où J est quadratique, i.e. $J(v) = \frac{1}{2}(Av, v) - (b, v)$, on retrouve l'algoritme de Gauss-Seidel ou S.O.R. pour la résolution du système linéaire $Ax = b$.*

4.3 Méthode du gradient

Ici on choisit à chaque étape $d^k = \nabla J(x^k)$.

4.3.1 Méthode à pas variable

On se donne le pas ρ_k, il peut être différent d'une étape à l'autre.

Théorème 4.2 . *Si J est α-convexe dérivable sur V, si ∇J est uniformément lipschitzien de constante de Lipschitz M, l'algorithme de gradient à pas variable converge vers la solution optimale pour $0 < a \leq \rho_k \leq b < \dfrac{2\alpha}{M^2}$.*

Remarque 4.2 . *Si J est 2 fois différentiable, l'hypothèse est*

$$\sup_{v \in V} ||D^2 J(v)|| \leq M$$

4.3.2 Méthode à pas optimal

Ici on choisit à chaque étape ρ_k de façon que

$$J(x^k - \rho_k \nabla J(x^k)) = \inf_{\rho \in \mathbb{R}} J(x^k - \rho \nabla J(x^k)) \tag{4.3}$$

Théorème 4.3 . *Si J est α-convexe dérivable sur V, si ∇J est uniformément lipschitzien de constante de Lipschitz M, l'algorithme de gradient à pas optimal est bien défini et converge vers la solution optimale.*

Remarque 4.3 . *Les directions de descente sont orthogonales, i.e.*

$$\nabla J(x^k).\nabla J(x^{k+1}) = 0.$$

4.4 Estimations et convergence dans le cas quadratique

Ici la fonctionnelle J est quadratique sur $\mathbb{R}^n$:

$$J(v) = \frac{1}{2}(Av, v) - (b, v)$$

où la matrice A est symétrique définie positive. La solution x du problème de minimisation vérifie $Ax = b$. On appellera **résidu** à l'étape k la quantité $r^k = Ax^k - b$

4.4.1 Méthode à pas optimal

On prend ici une direction de descente d^k quelconque dans $\mathbb{R}^n$, non orthogonale à r^k. A chaque étape, la valeur du paramètre optimal ρ_k est donnée par

$$\rho_k = \frac{(r^k, d^k)}{(Ad^k, d^k)} \tag{4.4}$$

et l'on a $(r^{k+1}, d^k) = 0$.

Notons $E(v) = \frac{1}{2}(A(v-u), v-u)$, on a alors

$$E(x^{k+1}) = (1 - \gamma_k)E(x^k) \tag{4.5}$$

avec

$$\gamma_k = \frac{1}{2}\frac{(r^k, d^k)^2}{(Ad^k, d^k)(A^{-1}r^k, r^k)}. \tag{4.6}$$

Puisque la quantité γ_k est par construction telle que $0 \leq \gamma_k \leq 1$, on a l'estimation suivante : si la direction de descente est telle que

$$(\frac{r^k}{||r^k||}, \frac{d^k}{||d^k||})^2 \geqslant \mu > 0 \tag{4.7}$$

alors $\gamma_k \geqslant \gamma = \dfrac{\mu}{K(A)}$ (où $K(A)$ est le conditionnement de A, c'est-à-dire le rapport de la plus grande à la plus petite valeur propre), et donc

$$E(x^{k+1}) \leq (1 - \gamma)E(x^k) \tag{4.8}$$

On dit que la méthode **converge linéairement**.

Dans le cas particulier de la méthode du gradient, grâce à **l'inégalité de Kantorovitch** on peut écrire

$$E(x^k) \leq \Big(\frac{K(A)-1}{K(A)+1}\Big)^{2k} E(x^0) \tag{4.9}$$

Remarque 4.4 . *Plus la matrice est bien conditionnée (i.e. $K(A)$ proche de 1), plus la convergence est rapide. Plus la matrice est mal conditionnée (i.e. $K(A)$ »1), plus la convergence est lente.*

4.4.2 Méthode de gradient à pas constant

On choisit à chaque étape $\rho_k = \rho$. On a alors l'estimation

$$||x^k - x||_2 \leq \big[\max_{1\leq i\leq n} |1-\rho\lambda_i|\big]^k ||x^0 - x||_2 \tag{4.10}$$

On en déduit que la méthode converge si et seulement si $\rho < \dfrac{2}{\lambda_n}$ où λ_n est la plus grande valeur propre de A. Ici encore, la convergence est linéaire.

Remarque 4.5 *Comparer avec le théorème général 4.2.*

4.5 Méthode du gradient conjugué

On se place ici dans le cas où la fonctionnelle J est quadratique sur $\mathbb{R}^N$: $J(v) = \frac{1}{2}(Av, v) - (b, v)$, la matrice A étant symétrique définie positive. La solution x du problème de minimisation vérifie $Ax = b$.

4.5.1 Principe de la méthode

Les $(k+1)$ premières itérées $x^0, .., x^k$ étant données, on cherche x^{k+1}, non plus dans la direction du gradient, mais dans l'espace vectoriel engendré par tous les gradients précédents. On note

$$\mathcal{L}_k = vect\{\nabla J(x^0), .., \nabla J(x^k)\} \tag{4.11}$$

et on définit x^{k+1} par :

$$J(x^{k+1}) = \inf_{\Delta \in L_k} J(x^k + \Delta) \tag{4.12}$$

Ceci définit x^{k+1} de manière unique (*cf* Corollaire 1.1, Partie I) et

Théorème 4.4 . *On a les propriétés suivantes :*

1. *Les $\nabla J(x^k)$ forment un système orthogonal (donc libre),*
2. *l'algorithme converge en au plus N itérations.*

La première propriété traduit l'équation d'Euler (2.4, Partie I). Ce théorème nous dit que la méthode du gradient conjugué est en fait une méthode directe. La forme (4.12) n'est pas pratique, aussi allons nous réécrire l'algorithme sous forme d'un algorithme de descente.

4.5.2 Ecriture comme algorithme de descente

Théorème 4.5 . *L'algorithme du gradient conjugué s'écrit sous la forme*

$$\begin{cases} x^{k+1} = x^k - \rho_k d^k \\ d^k = \nabla J(x^k) + \dfrac{||\nabla J(x^k)||^2}{||\nabla J(x^{k-1})||^2} d^{k-1} \\ \rho_k = \dfrac{||\nabla J(x^k)||^2}{(Ad^k, d^k)} \\ (r^{k+1}, d^k) = 0 \end{cases} \tag{4.13}$$

Il suffit de se donner $d^0 = \nabla J(x^0)$.
N peut être très grand, on peut alors compter le nombre d'opérations nécessaires pour réaliser l'algorithme : une itération nécessite $2cN$ opérations élémentaires, où c est le nombre moyen de coefficients non nuls par ligne de A. Si bien que pour une matrice pleine, le nombre d'opérations élémentaires pour N itérations est $2N^3$. Cela risquerait de disqualifier la méthode par rapport à Cholewski ($\frac{N^3}{3}$opérations élémentaires), si l'on ne faisait une

4.5.3 Analyse de convergence

On introduit l'espace de Krylov

$$\mathcal{K}_k = vect\{r^0, Ar^0, .., A^k r^0\} \tag{4.14}$$

et on a le

Théorème 4.6 . *Si $r^j \neq 0$ pour $j \leq k$, alors $\mathcal{K}_k \equiv \mathcal{L}_k$*

On en déduit une première estimation de l'erreur

Théorème 4.7

$$E(x^k) = \inf_{P \in \mathbb{P}_{k-1}} \max_{1 \leq i \leq N} [1 + \lambda_i P(\lambda_i)]^2 E(x^0) \tag{4.15}$$

où les λ_i sont les valeurs propres de A.

et par un calcul assez long sur les polynômes de Tchebycheff,

Corollaire 4.1 . *On a l'estimation d'erreur*

$$E(x^k) \leq 4\Big(\frac{\sqrt{K(A)} - 1}{\sqrt{K(A)} + 1}\Big)^{2k} E(x^0) \tag{4.16}$$

De nouveau, la convergence est linéaire. Cette estimation est à comparer avec l'estimation d'erreur (4.9) pour l'algorithme du gradient à pas optimal :

$$E(x^k) \leq \Big(\frac{K(A) - 1}{K(A) + 1}\Big)^{2k} E(x^0)$$

Par exemple, d'après ces estimations pour $K(A) = 100$, pour obtenir une erreur de 10^{-6}, il faudrait 340 itérations du gradient à pas optimal et seulement 34 itérations du gradient conjugué ! Comme les itérations sont comparables, ces performances font de cet algoritme le favori de tous les gens qui font des calculs de grande taille. De nombreuses extensions ont été proposées : BiCGSTAB, GMRES, etc, pour des problèmes non symétriques, à coefficients complexes, etc..

Chapitre 5

Méthodes pour les problèmes avec contraintes

Sommaire

5.1 Méthode de gradient projeté à pas variable

Soit le problème de minimisation avec contraintes

$$\begin{cases} u \in K, \\ J(u) = \inf_{v \in K} J(v) \end{cases} \tag{5.1}$$

où K est un convexe fermé non vide de l'espace de Hilbert V. On rappelle que si J est α convexe, il existe un minimum unique (corollaire 1.1, Partie I), caractérisé dans le cas différentiable par (2.1, Partie I) :

$$\begin{cases} u \in K \\ \forall v \in K, J'(u).(v-u) \geqslant 0. \end{cases} \tag{5.2}$$

On définit alors la suite des approximations u^k par la relation de récurrence

$$u^{k+1} = \mathbb{P}_K(u^k - \rho^k r^k) \tag{5.3}$$

où r^k est le résidu à l'étape k, *i.e.* $r^k = \nabla J(u^k)$, et $\mathbb{P}_K$ désigne la projection sur le convexe fermé K (Partie I,2.1).

Théorème 5.1 . *Si J est α-convexe dérivable sur V, si ∇J est uniformément lipschitzien de constante de Lipschitz M, l'algorithme de gradient projeté à pas variable converge vers la solution optimale pour $0 < a \leq \rho_k \leq b < \dfrac{2\alpha}{M^2}$. De plus il existe une constante $\beta < 1$ telle que*

$$\|u^k - u\| \leq \beta^k \|u^0 - u\| \tag{5.4}$$

En général, on ne peut pas expliciter la projection, sauf quand $V = \mathbb{R}^n$, et

$$K = \{v \in V, \forall i, 1 \leq i \leq n, v_i \geqslant 0\}, \tag{5.5}$$

auquel cas

$$(\mathbb{P}_K w)_i = max(w_i, 0), 1 \leq i \leq n. \tag{5.6}$$

Si K est le pavé $\prod_{i=1}^n [a_i, b_i]$, alors

$$(\mathbb{P}_K w)_i = \begin{cases} a_i & \text{si } w_i \leq a_i \\ w_i & \text{si } a_i \leq w_i \leq b_i \\ b_i & \text{si } w_i \geqslant b_i \end{cases} \tag{5.7}$$

5.2 Algorithme d'Uzawa

Soit un problème de minimisation avec contraintes inégalités

$$K = \{v, F(v) \leq 0\} \tag{5.8}$$

où $F : V \to \mathbb{R}^m$. On a défini un lagrangien

$$\mathcal{L}(v, q) = J(v) + (F(v), q); \quad \mathcal{L} : K \times \mathbb{R}_+^m \to \mathbb{R} \tag{5.9}$$

et le problème dual :

$$K^* = \{q \in P, \inf_{v \in U} \mathcal{L}(v, q) > -\infty\} \tag{5.10}$$

et pour q dans K^*, $G(q) = \inf_{v \in U} \mathcal{L}(v, q)$. Le problème dual associé s'écrit :

$$(\mathcal{P}^*) \text{ Trouver } p \in K^* \text{ tel que } G(p) = \sup_{q \in K^*} G(q)$$

L'idée est d'utiliser le problème dual : si $K^* = \mathbb{R}_+^m$ (ce qui est le cas pour des contraintes affines), on peut mettre en œuvre un algorithme de gradient projeté sur le multiplicateur de Lagrange p. Pour q dans K^*, on a défini u_q comme la solution du problème

$$\inf_{v \in V} \mathcal{L}(v, q) = \mathcal{L}(u_q, q) \tag{5.11}$$

L'algorithme se décrit alors comme suit :

$$p_k \to u_k = u_{p_k} \to p_{k+1} = \mathbb{P}_{K^*}(p_k + \rho \nabla G(p_k)) \tag{5.12}$$

Théorème 5.2 . *On suppose que $V = \mathbb{R}^n$ et $K = \{v \in V, Cv \leq d\}$. Alors $K^* = \mathbb{R}_+^m$ et $u_k \to u$, unique solution de $(\mathcal{P})$. De plus si $rgC = m$, p_k converge vers l'unique solution de $(\mathcal{P}^*)$.*