



UNIVERSITÉ PARIS-SUD

Faculté des sciences d'Orsay

École doctorale de mathématiques Hadamard (ED 574)

Institut des Hautes Études Scientifiques

Mémoire présenté pour l'obtention du

Diplôme d'habilitation à diriger les recherches

Discipline : Mathématiques

par

Yonatan HARPAZ

Des relations complémentaires entre homotopie, géométrie et arithmétique

Rapporteurs : FRÉDÉRIC DÉGLISE
BJORN POONEN
MICHAEL STOLL

Date de soutenance : 29/11/2016

Composition du jury : CHRISTIAN AUSONI
TIM BROWNING
ANTOINE CHAMBERT-LOIR
JEAN-LOUIS COLLIOT-THÉLÈNE
FRÉDÉRIC DÉGLISE
VINCENT FRANJOU
DAVID HARARI

Table des matières

Remerciements	3
Préambule	4
Travaux présentés pour l'habilitation	5
Chapitre 1. Les points rationnels sur les variétés algébriques	6
1.1. Contexte	6
1.2. Les obstructions homotopiques aux points rationnels ([1])	8
1.3. Contre-exemples à l'obstruction de Brauer-Manin étale ([2])	14
Chapitre 2. La méthode des fibrations	16
2.1. Contexte	16
2.2. Combinatoire additive et l'hypothèse de Schinzel ([3])	17
2.3. Contributions à la méthode des fibrations ([4])	18
2.4. La méthode des fibrations élargie et les surfaces de Kummer ([5])	23
Chapitre 3. Surfaces de type log K3 et points entiers	29
3.1. Contexte	29
3.2. Surfaces log K3 de nombre de Picard 0 ([6])	30
3.3. La méthode des fibrations élargie pour les points entiers ([7])	33
Chapitre 4. La théorie de l'homotopie et les catégories supérieures	40
4.1. Contexte	40
4.2. Fibrations de modèles et la correspondance de Grothendieck ([8],[9])	41
4.3. Les pro-catégories dans la théorie de l'homotopie ([10])	46
Références	54

Remerciements

Tout d'abord, je remercie infiniment mon directeur de thèse, Emmanuel Farjoun, pour m'avoir toujours guidé, soutenu et encouragé. Je remercie également Alexei Skorobogatov, Jean-Louis Colliot-Thélène, David Harari et Olivier Wittenberg pour leur soutien, leur écoute et leur aide inestimables.

Je suis très reconnaissant à Frédéric Déglise, Bjorn Poonen et Michael Stoll d'avoir accepté d'être rapporteurs de mon habilitation, et à Christian Ausoni, Tim Browning, Antoine Chambert-Loir, Jean-Louis Colliot-Thélène, Frédéric Déglise, Vincent Franjou et David Harari de me faire le grand honneur de participer à mon jury.

Mes remerciements vont aussi à mes co-auteurs Ilan Barnea, Jeffroy Horel, Joost Nuiten, Matan Prasma, Tomer Schlank, Alexei Skorobogatov et Olivier Wittenberg, pour nos collaborations enrichissantes et fructueuses.

Les travaux de recherche que je présente dans mon habilitation doivent aussi beaucoup aux excellentes conditions de travail des différents départements de mathématiques que j'ai pu fréquenter et à leur personnel dévoué. Je remercie ainsi grandement Ieke Moerdijk de m'avoir guidé pendant mes recherches postdoctorales à l'IMAPP, à l'université de Radboud, les collègues et le personnel du Centre Interfacultaire Bernoulli de l'École Polytechnique Fédérale de Lausanne, et le Département de Mathématique et Applications de l'ENS, où j'ai eu la chance de travailler et collaborer ces deux dernières années grâce au soutien de la Fondation Sciences Mathématiques de Paris.

Enfin, je remercie vivement l'Institut des Hautes Etudes Scientifiques et son Directeur, Emmanuel Ullmo, de m'inviter cette année dans un cadre de recherche exceptionnel, et pour l'honneur qu'ils me font d'accueillir la soutenance de mon habilitation.

Préambule

Les travaux présentés dans ce mémoire d'habilitation se situent le long de l'axe « homotopie-géométrie-arithmétique ». Les questions qui concernent l'arithmétique des variétés algébriques sur les corps de nombres, notamment, les questions qui concernent les points rationnels, les points entiers, ou les zéro-cycles, sont avant tout gouvernées par la géométrie. La géométrie, à son tour, est intimement liée aux propriétés homotopiques de l'espace des points complexes, ceux qui se sont déjà manifestés dans la structure homotopique du site étale de la variété. Pouvoir appliquer la théorie de l'homotopie dans un tel contexte nécessite d'avoir un cadre homotopique abstrait fort et flexible. Dans les dernières décennies, un tel cadre est apparu sous la forme de la théorie des catégories supérieures.

Ce mémoire convoque à plusieurs endroits la notion de **fibration**. Dans la géométrie algébrique, toute application surjective $\pi : Y \rightarrow X$ de variétés est une fibration. Pour les espaces topologiques, on demande normalement quelques propriétés de relèvement, résultant en des notions comme les fibrations de Serre et les fibrations de Hurewicz. Pour les ensembles simpliciaux on parle d'une fibration de Kan. Pour les catégories on parle d'une fibration de Grothendieck, et pour les catégories supérieures on parle d'une fibration cartésienne ou cocartésienne. Cette notion omniprésente décrit, au sens large, une situation dans laquelle on veut avoir un point de vue double. Étant donné un objet de base X , une fibration sur X sera un objet que l'on peut considérer soit comme un objet géométrique Y muni d'une application vers X , soit comme une famille d'objets paramétrés par X . Le fait que l'on puisse utiliser la même « meta-notion » soit pour trouver des points rationnels sur les variétés algébriques, soit pour calculer la lax-limite d'un diagramme d' ∞ -catégories, est à la fois déconcertant et profond.

Le mémoire est composé de quatre chapitres. Le premier expose les travaux qui sont directement liés aux obstructions de l'existence de points rationnels sur les variétés algébriques. Le deuxième concerne les travaux portant sur la méthode des fibrations et ses variantes. Le troisième est consacré aux articles qui concernent les surfaces log K3 et leurs points entiers. Finalement, le quatrième chapitre contient les travaux réalisés dans le domaine de la théorie de l'homotopie et les catégories supérieures.

Travaux présentés pour l'habilitation

- [1] Harpaz Y., Schlank T. M., Homotopy obstructions to rational points, In : Alexei Skorobogatov Ed., Torsors, Étale Homotopy and Applications to Rational Points, LMS Lecture Notes Series 405, Cambridge University Press, 2013, p. 280–413.
- [2] Harpaz Y., Skorobogatov A. N., Singular curves and the étale Brauer-Manin obstruction for surfaces, *Annales Scientifiques de l'École Normale Supérieure*, 47, 2014, p. 765–778
- [3] Harpaz Y., Skorobogatov A., Wittenberg, O., The Hardy-Littlewood conjecture and rational points, *Compositio Mathematica*, 150, 2014, p. 2095-2111
- [4] Harpaz Y., Wittenberg O., On the fibration method for zero-cycles and rational points, *Annals of Mathematics*, 183.1, 2015, p. 229-295.
- [5] Harpaz Y., Skorobogatov A., Hasse principle for Kummer varieties, *Algebra & Number Theory*, to appear.
- [6] Harpaz Y., Geometry and arithmetic of certain log K3 surfaces, preprint, submitted to publication (arXiv :1511.01285).
- [7] Harpaz Y., Integral points on conic log K3 surfaces, preprint, submitted to publication (arXiv :1511.04876).
- [8] Harpaz Y., Prasma M., The Grothendieck construction for model categories, *Advances in Mathematics*, 281, 2015, p. 1306-1363.
- [9] Harpaz Y., Prasma M., A global model structure and truncation theory for coherent group actions, *The Israel Journal of Mathematics*, to appear.
- [10] Barnea I., Harpaz Y., Horel G., Pro-categories in homotopy theory, *Algebraic and Geometric Topology*, to appear.

Les points rationnels sur les variétés algébriques

1.1. Contexte

Soit X une variété algébrique lisse et géométriquement intègre définie sur un corps de nombres. L'étude de l'ensemble $X(k)$ des points rationnels sur X est un objectif fondamental dans le domaine de la géométrie arithmétique. Les deux questions suivantes sont d'un intérêt particulier :

- (1) Étant donnée une variété X , a-t-elle un point rationnel ?
- (2) Si elle en a au moins un, en a-t-elle beaucoup ?

L'étude de la question (1) commence souvent par plonger $X(k)$ dans l'espace $X(\mathbb{A}_k)$ des points adéliques. Si $X(\mathbb{A}_k) = \emptyset$ (ce que l'on peut vérifier effectivement), on peut immédiatement en déduire que $X(k) = \emptyset$. On dit des variétés pour lesquelles l'implication réciproque vaut qu'elles satisfont le **principe de Hasse**, pour rappeler le théorème de Hasse-Minkowski, selon lequel l'implication $X(\mathbb{A}_k) \neq \emptyset \Rightarrow X(k) \neq \emptyset$ vaut pour les hypersurfaces quadratiques $X \subseteq \mathbb{P}^n$.

Malheureusement, le principe de Hasse ne vaut pas en général. Une façon d'accueillir cet échec a été conçue par Manin ([Ma70]) en utilisant le groupe de Brauer cohomologique $\text{Br}(X) = H_{\text{ét}}^2(X, \mathbb{G}_m)$. Manin a considéré l'accouplement naturel

$$(1) \quad \langle \cdot, \cdot \rangle : \text{Br}(X) \times X(\mathbb{A}_k) \longrightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$$

défini de la façon suivante : étant donné un point adélique $(x_v) \in X(\mathbb{A}_k)$ et une classe $B \in \text{Br}(X)$, on pose $\langle B, (x_v) \rangle = \sum_v \text{inv}_v B(x_v)$, où $\text{inv}_v : \text{Br}(k_v) \longrightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ est une application canonique fournie par la théorie du corps de classes local. En utilisant cet accouplement, Manin put définir **l'ensemble de Brauer** $X(\mathbb{A}_k)^{\text{Br}} \subseteq X(\mathbb{A}_k)$ comme le sous-ensemble des points adéliques qui sont orthogonaux à toutes les classes $B \in \text{Br}(X)$. La théorie du corps des classes global implique que $X(\mathbb{A}_k)^{\text{Br}}$ contient l'ensemble $X(k)$ des points rationnels. Quand $X(\mathbb{A}_k)^{\text{Br}} = \emptyset$ on peut alors déduire que $X(k) = \emptyset$. Dans ce cas-là, on dit qu'il y a **une obstruction de Brauer-Manin** à l'existence de points rationnels.

Il est bien connu que l'obstruction de Brauer-Manin n'est pas une obstruction complète en général. Lorsque X n'est pas simplement connexe, Skorobogatov a défini un ensemble intermédiaire $X(k) \subseteq X(\mathbb{A}_k)^{\text{ét, Br}} \subseteq X(\mathbb{A}_k)^{\text{Br}}$ en considérant l'ensemble de Brauer de tous les revêtements étales finis de X . Cette obstruction raffinée est connue sous le nom **d'obstruction de Brauer-Manin étale**. Skorobogatov a ensuite construit un exemple où $X(\mathbb{A}_k)^{\text{Br}} \neq \emptyset$ mais $X(\mathbb{A}_k)^{\text{ét, Br}} = \emptyset$, ce qui implique en particulier que $X(k) = \emptyset$ (voir [Sk99]). En 2010 Poonen ([Po10]) a construit le premier exemple d'une variété propre et lisse X pour laquelle $X(\mathbb{A}_k)^{\text{ét, Br}} \neq \emptyset$ mais $X(k) = \emptyset$.

Exposons brièvement la question (2) présentée plus haut : en supposant que les points rationnels existent, sont-ils en abondance ? Cette question a plusieurs variantes. Par exemple, on peut se demander si $X(k)$ est Zariski-dense. Par ailleurs, on peut se demander si $X(k)$ est dense dans $X(\mathbb{A}_k)$ par rapport à la topologie adélique. Quand X est propre, la topologie adélique coïncide avec la topologie produit sur $\prod_v X(k_v)$. Dans ce cas-là, si $X(k)$ est dense dans $X(\mathbb{A}_k)$, on dit que X satisfait **l'approximation faible**. Les obstructions décrites ci-dessus sont également pertinentes pour cette question. Comme $X(\mathbb{A}_k)^{\text{ét,Br}}$ et $X(\mathbb{A}_k)^{\text{Br}}$ sont fermés dans $X(\mathbb{A}_k)$ et contiennent $X(k)$, ils contiennent aussi l'adhérence $\overline{X(k)}$. Dans ce cas-là on peut se demander si $X(k)$ est au moins dense dans $X(\mathbb{A}_k)^{\text{Br}}$ ou $X(\mathbb{A}_k)^{\text{ét,Br}}$. Quand X est propre et $X(k)$ est dense dans $X(\mathbb{A}_k)^{\text{Br}}$ (resp. $X(\mathbb{A}_k)^{\text{ét,Br}}$) on dit que X satisfait l'approximation faible avec obstruction de Brauer-Manin (resp. Brauer-Manin étale).

Un paradigme fondamental dans le domaine de la géométrie diophantienne, attribué à Weil, indique que le comportement des points rationnels, par rapport à toutes les questions ci-dessus, devrait être fortement contrôlé par la géométrie de X . En concentrant l'attention sur les variétés propres, lisses, géométriquement intègres et simplement connexes (pour lesquelles, en particulier, l'obstruction de Brauer-Manin et l'obstruction de Brauer-Manin étale coïncident), trois classes de types géométriques pertinentes ont été bien examinées :

- (1) Les variétés rationnellement connexes. Pour cette classe une conjecture de Colliot-Thélène ([CT03, p. 174]) prédit que :

CONJECTURE 1.1. *Si X est une variété propre, lisse, géométriquement intègre et rationnellement connexe sur un corps de nombres k , alors l'ensemble $X(k)$ est dense dans $X(\mathbb{A}_k)^{\text{Br}}$.*

L'énoncé de cette conjecture est connu, par exemple, pour les modèles lisses et propres des espaces homogènes sous les groupes linéaires connexes avec des stabilisateurs connexes ([Bo96]), pour des surfaces fibrées en coniques avec au plus 5 fibres dégénérées ([CTSSD87a], [CTSSD87b], [CT88]), pour des intersections de deux quadriques sous certaines hypothèses ([CTSSD87a], [CTSSD87b], [Wi07]), pour des hypersurfaces cubiques sous certaines hypothèses ([SD01], [BP14]), et pour les variétés qui admettent un plongement projectif de petit degré par rapport à leur dimension ([Bi62], [BHB14]). On remarque que l'énoncé de la conjecture 1.1 pour une variété X implique, en particulier, que $X(k)$ est Zariski-dense aussitôt que $X(\mathbb{A}_k)^{\text{Br}} \neq \emptyset$.

- (2) Les variétés simplement connexes de type général. Des exemples conditionnels montrent que l'obstruction de Brauer-Manin ne devrait pas être la seule obstruction (voir [SW95], [Sm14]), et l'on croit qu'elle donne peu d'information concernant le comportement des points rationnels en général. Même si les points rationnels existent, la conjecture de Lang prédit qu'ils ne sont pas Zariski-dense.
- (3) Les variétés (simplement connexes) de Calabi-Yau. Il s'agit d'une classe intermédiaire dont l'arithmétique est très subtile et largement inconnue. En dimension 2, elles sont également connues sous le nom de **surfaces K3**, et sont alors mieux connues. Certains auteurs conjecturent que $X(k) \neq \emptyset$ aussitôt que $X(\mathbb{A}_k)^{\text{Br}} \neq \emptyset$ quand X est une surface K3 (voir [Sk99, p. 77]). Cet énoncé est connu conditionnellement pour certaines surfaces de Kummer ([SDS05],[2]) et

certaines surfaces K3 elliptiques ([SD00], [CTSSD98b]). Toutefois, pour le moment, rien ne vient appuyer l'idée que $X(k)$ serait dense dans $X(\mathbb{A}_k)^{\text{Br}}$.

REMARQUE 1.2. Comme mentionné ci-dessus, la construction d'exemples de variétés de type général simplement connexes, pour lesquelles $X(\mathbb{A}_k)^{\text{Br}} \neq \emptyset$ mais $X(k) = \emptyset$, n'est que conditionnelle ([SW95], [Sm14]). Il est assez surprenant que nous ne sachions pas comment construire un seul exemple inconditionnel d'une variété simplement connexe (de type général ou non), pour laquelle l'obstruction de Brauer-Manin ne rend pas compte de l'absence de points rationnels.

Zéro-cycles de degré 1. Quand X est propre, la question des points rationnels a un analogue « abélien » en géométrie diophantienne, où on remplace l'ensemble $X(k)$ des points rationnels par le groupe de Chow $\text{CH}_0(X)$ des 0-cycles définis sur k , à équivalence rationnelle près. On a un homomorphisme naturel $\text{CH}_0(X) \rightarrow \mathbb{Z}$ qui associe à chaque 0-cycle son degré. On remarque que $\text{CH}_0(X)$ contient toujours des éléments de degré positif. Toutefois, une question pertinente d'un point de vue diophantien est de savoir s'il existe ou non un 0-cycle rationnel $z \in \text{CH}_0(X)$ de **degré 1**.

Comme dans le cas des points rationnels, on peut considérer une version adélique appropriée $\text{CH}_{0,\mathbb{A}}(X)$ du groupe de Chow. L'accouplement (1) induit un accouplement de groupes abéliens

$$(2) \quad \text{CH}_{0,\mathbb{A}}(X) \times \text{Br}(X) \rightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$$

et l'image de $\text{CH}_0(X)$ dans $\text{CH}_{0,\mathbb{A}}(X)$ est contenue dans le noyau à gauche de cet accouplement. S'il n'existe pas de 0-cycle adélique $(z_v) \in \text{CH}_{0,\mathbb{A}}(X)$ de degré 1 orthogonal à $\text{Br}(X)$, alors on peut en déduire que les 0-cycles rationnels de degré 1 n'existent pas non plus. Dans ce cas-là on dit qu'il y a une obstruction de Brauer-Manin à l'existence d'un 0-cycle de degré 1.

Comme ci-dessus, on peut également considérer la question de la densité, en un sens approprié, de $\text{CH}_0(X)$ dans le noyau à gauche de (2). En notant $\widehat{M} = \varinjlim_n M/n$ pour un groupe abélien M on obtient une suite

$$(3) \quad \widehat{\text{CH}}_0(X) \rightarrow \widehat{\text{CH}}_{0,\mathbb{A}}(X) \rightarrow \text{Hom}(\text{Br}(X), \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$$

Une conjecture proposée par Colliot-Thélène, Sansuc, Kato et Saito, reformulée plus tard par van Hamel ([vH03]), décrit ce qui suit

CONJECTURE 1.3 ([CTS81], [KS86, §7], [CT95, §1], [CT99]; voir aussi [Wi12, §1.1]). *Pour toute variété propre, lisse et géométriquement intègre X sur un corps de nombres k , la suite (3) est exacte.*

Soulignons que la conjecture 1.3 ne suppose que des conditions assez faibles sur X . En particulier, elle ne suppose pas la condition de connectivité rationnelle. On remarque finalement que l'énoncé de conjecture 1.3 pour une variété X implique, en particulier, que l'obstruction de Brauer-Manin est la seule obstruction à l'existence de 0-cycles rationnels de degré 1 sur X (voir [Wi12, Remarques 1.1(iii)]).

1.2. Les obstructions homotopiques aux points rationnels ([1])

Outre l'obstruction de Brauer-Manin et l'obstruction de Brauer-Manin étale, plusieurs autres obstructions à l'existence de points rationnels ou au principe de Hasse ont été construites, y compris l'obstruction élémentaire (voir [CTS87]), les obstructions de descente par rapport aux toseurs sous les groupes algébriques

(voir [CTS87],[Ha02]), et les obstructions associées aux variétés d'Albanese (voir [Wi08]). Toutefois, pour une variété X , la trivialité de l'obstruction de Brauer-Manin étale pour X implique la trivialité de toute obstruction de descente (voir [De09],[Sk09]), ainsi que l'obstruction élémentaire et les obstructions associées aux variétés d'Albanese, au moins sous l'hypothèse de Tate-Shafarevich ([Wi08]). On se demande alors naturellement si l'obstruction de Brauer-Manin étale admet une caractérisation universelle quelconque, ce qui en ferait une obstruction dominante sur les autres. En l'absence d'une telle caractérisation on est amené à s'interroger sur l'existence d'obstructions plus fortes encore.

Motivé par les questions ci-dessus, le but du projet [1], effectué avec T. Schlank, a été de construire une obstruction au principe de Hasse canoniquement associée au **type d'homotopie étale** de X , et de la comparer avec l'obstruction de Brauer-Manin étale. Rappelons que le type d'homotopie étale $\text{Ét}(X)$ d'une variété algébrique X , défini par Artin et Mazur dans [AM69], est un système inverse $\text{Ét}(X) = \{X_\alpha\}_{\alpha \in I}$ de types d'homotopie (ou un **pro-objet** dans la catégorie d'homotopie des espaces, voir §4.3), qui ne dépend que du site étale de X . La construction dans [AM69] est fondée sur la construction de la **forme** d'un espace topologique X , qui est un système inverse de types d'homotopie construit de façon similaire au site de sous-ensembles ouverts de X . Plus généralement, la construction de Artin et Mazur s'applique à tout site de Grothendieck localement connexe.

La première étape du projet [1] consiste à formuler une variante relative $\text{Ét}/_k(X)$ du type d'homotopie étale par rapport au corps de base k . Il s'agit d'un système inverse $\{X_\alpha\}_{\alpha \in I}$ de types d'homotopie Γ_k -**équivariant**, où $\Gamma_k = \text{Gal}(\bar{k}/k)$ désigne le groupe de Galois absolu de k . En particulier, chaque X_α est un espace (ou plus précisément, un ensemble simplicial) muni d'une action de Γ_k . Le système inverse de types d'homotopie obtenu en oubliant l'action de Galois est équivalent à $\text{Ét}(\bar{X})$, où $\bar{X} = X \otimes_k \bar{k}$ désigne le changement de base à \bar{k} . On peut alors considérer $\text{Ét}/_k(X)$ comme une façon d'encoder l'action de Galois induite sur le type d'homotopie étale de \bar{X} . On définit maintenant l'ensemble

$$X(hk) \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{\alpha \in I} \pi_0(X_\alpha^{h\Gamma_k})$$

où $X_\alpha^{h\Gamma_k}$ désigne l'espace des **points fixes homotopiques** associé à l'action de Γ_k sur X_α . Chaque point rationnel $p \in X(k)$ détermine une collection compatible de composantes de points fixes homotopiques $h_\alpha(p) \in \pi_0(X_\alpha^{h\Gamma_k})$, et on obtient une application naturelle

$$h : X(k) \longrightarrow X(hk).$$

On peut considérer $X(hk)$ comme une approximation homotopique de l'ensemble $X(k)$. En particulier, si $X(hk) = \emptyset$ on peut en déduire que $X(k) = \emptyset$. Cela nous donne déjà une obstruction à l'existence de points k -rationnels pour un corps arbitraire k . La question de la vacuité de $X(hk)$ peut être traitée avec une adaptation de la théorie classique de l'obstruction à l'existence de points fixes homotopiques sur un espace X muni d'une action d'un groupe G . La théorie classique nous invite à considérer la tour de Postnikov $X = \text{holim}_n P_n(X)$. Ici, $P_n(X)$ est un espace dont les groupes d'homotopie coïncident avec ceux de X en degré $\leq n$ et s'annulent en degré $> n$, et holim désigne la limite homotopique associée. On note que chaque $P_n(X)$ hérite d'une action de G , et on a

$$X^{hG} = \text{holim}_i P_i(X)^{hG}.$$

Si on suppose que X est connexe, alors $P_0(X) = *$ a un point fixe homotopique canonique $p \in P_0(X)^{hG}$, et on peut essayer de construire un point fixe homotopique de X en enlevant p , étape par étape, le long de la tour $\{P_n(X)^{hG}\}$. Si on réussit à relever p à $p_{n-1} \in P_{n-1}(X)^{hG}$ pour un $n \geq 1$, on obtient un élément d'obstruction associé $o_{p_{n-1}} \in H^{n+1}(X, \pi_n(X))$ qui s'annule si et seulement si on peut relever p_{n-1} à un point fixe homotopique $p_n \in P_n(X)^{hG}$ (notons que pour $n = 2$ on parle d'une cohomologie non-abélienne). Finalement, on remarque que quand G et les groupes d'homotopie de X sont assez simples, et quand G a une dimension cohomologique finie (ou X a un nombre fini de groupes d'homotopie non nuls), cette théorie de l'obstruction fournit, en principe, une procédure finie pour tester si un point fixe homotopique existe ou non.

Revenons au cas où k est un corps de nombres : notre intérêt principal n'est pas de construire une obstruction absolue à l'existence de points rationnels, mais de construire une obstruction à l'existence de points rationnels en supposant que des points locaux existent pour toutes les places de k . Autrement dit, de construire une obstruction au principe de Hasse. Pour cela on construit, dans [1], une variante adélique $X(h\mathbb{A}_k)$ de $X(hk)$, que l'on appelle l'ensemble des **points fixes homotopiques adéliques**. La naturalité de la construction fournit un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} X(k) & \longrightarrow & X(hk) \\ \downarrow & & \downarrow \\ X(\mathbb{A}_k) & \longrightarrow & X(h\mathbb{A}_k) \end{array}$$

et on définit

$$X(\mathbb{A}_k)^h \subseteq X(\mathbb{A}_k)$$

comme le sous-ensemble des points adéliques $(x_v) \in X(\mathbb{A}_k)$ dont l'image dans $X(h\mathbb{A}_k)$ vient de $X(hk)$. On peut considérer les points adéliques $(x_v) \in X(\mathbb{A}_k)^h$ comme des points adéliques qui sont « rationnels à homotopie près ». La commutativité du diagramme ci-dessus implique que $X(\mathbb{A}_k)^h$ contient l'image de $X(k)$, et donc si $X(\mathbb{A}_k)^h = \emptyset$ on peut en déduire que $X(k) = \emptyset$. Dans ce cas-là on dit qu'il y a une **obstruction homotopique** au principe de Hasse.

Soit M un module de Galois, considéré comme un faisceau localement constant sur X pour la topologie étale. Si $\alpha \in H^i(X, M)$ est une classe de cohomologie, on peut définir $X(\mathbb{A}_k)^{M, \alpha} \subseteq X(\mathbb{A}_k)$ comme le sous-ensemble des points adéliques $(x_v) \in X(\mathbb{A}_k)$ tels que la classe $\alpha|_{(x_v)} \in H^i(\mathbb{A}_k, M)$ vienne d'une classe dans $H^i(k, M)$. L'ensemble $X(\mathbb{A}_k)^{M, \alpha}$ contient toujours $X(k)$ et peut nous servir comme une obstruction au principe de Hasse. Remarquons que le type d'homotopie étale relatif $\mathring{\text{Et}}_k(X)$ contient toute l'information concernant les groupes de cohomologie étale de X avec des coefficients localement constants. On peut alors vérifier formellement que $X(\mathbb{A}_k)^h \subseteq X(\mathbb{A}_k)^{M, \alpha}$ pour tous M et α , et alors l'obstruction homotopique est plus forte que l'obstruction associée à M, α . Cela est suffisant pour déduire que l'obstruction homotopique est plus forte que l'obstruction de Brauer-Manin pour une variété lisse X . En effet, quand X est lisse le groupe $H^2(X, \mathbb{G}_m)$ est un groupe de torsion et l'application naturelle $H^2(X, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(1)) \rightarrow H^2(X, \mathbb{G}_m)$ est surjective. Dans ce cas-là on peut identifier $X(\mathbb{A}_k)^{\text{Br}}$ avec l'intersection de $X(\mathbb{A}_k)^{\mathbb{Q}/\mathbb{Z}(1), \alpha}$ pour tous les $\alpha \in H^2(X, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(1))$. Un argument similaire montre

que l'obstruction homotopique est plus forte que l'obstruction de descente associée aux toiseurs sous un groupe algébrique connexe G . Pour cela il faut remplacer M ci-dessus par un **complexe** de modules de Galois, et plus précisément par le complexe dual du complexe de Picard étendu de G (voir [Bo09]).

Le résultat principal de l'article [1] consiste à identifier l'obstruction homotopique avec l'obstruction de Brauer-Manin étale :

THÉORÈME 1.4 ([1]). *Pour toute variété lisse et géométriquement intègre X sur un corps de nombres k on a*

$$X(\mathbb{A}_k)^h = X(\mathbb{A}_k)^{\text{ét, Br}}.$$

En particulier, l'obstruction homotopique au principe de Hasse est équivalente à l'obstruction de Brauer-Manin étale.

Décrivons maintenant les idées principales du théorème 1.4. Soit X une variété lisse et géométriquement intègre sur un corps de nombres k et soit $\acute{\text{E}}t/k(X) = \{X_\alpha\}_{\alpha \in I}$ son type d'homotopie étale relatif. Supposons pour faire simple que $\pi_1^{\acute{\text{E}}t}(\overline{X})$ est fini et soit $\overline{Y} \rightarrow \overline{X}$ un revêtement universel. On note que dans ce cas-là le système inverse $\{P_1(X_\alpha)\}_{\alpha \in I}$ obtenu en oubliant les groupes d'homotopie supérieurs est équivalent à un seul espace $\{P_1(X_\alpha)\}_{\alpha \in I} \simeq \{Z\}$ tel que $\pi_1(Z) = \pi_1^{\acute{\text{E}}t}(\overline{X})$ et $\pi_n(Z) = 0$ pour $n > 1$. En utilisant la théorie de la descente on peut montrer que le revêtement universel admet une k -forme $Y \rightarrow X$ si et seulement si l'espace Z admet un point fixe homotopique par rapport à l'action de Γ_k . De plus, dans ce cas-là l'ensemble $\pi_0(Z^{h\Gamma_k})$ classe naturellement les k -formes possibles du revêtement universel, à k -isomorphisme près. En particulier, si $X(\mathbb{A}_k)^h \neq \emptyset$ alors $X(hk) \neq \emptyset$ et donc $\pi_0(Z^{h\Gamma_k}) \neq \emptyset$, impliquant que \overline{Y} a une k -forme. Si $q \in X(hk)$ est un point fixe homotopique alors l'image $[q] \in \pi_0(Z^{h\Gamma_k})$ de q détermine une k -forme $Y^{[q]} \rightarrow X$ de \overline{Y} et on peut montrer dans ce cas que q vient d'un point fixe homotopique $q' \in Y^{[q]}(hk)$. Même mieux, si $(x_v) \in X(\mathbb{A}_k)$ est un point adélique, on peut vérifier que si $h(x_v) \in X(h\mathbb{A}_k)$ coïncide avec l'image de q , alors on peut relever (x_v) à un point adélique bien choisi $(y_v) \in Y^{[q]}(\mathbb{A}_k)$ tel que $h(y_v) \in Y^{[q]}(h\mathbb{A}_k)$ vienne d'un point fixe rationnel $q' \in Y^{[q]}(hk)$ (ce qui implique en particulier que q' est envoyé sur q dans $X(hk)$). On peut alors établir la formule

$$X(\mathbb{A}_k)^h = \bigcup_{\beta \in \pi_0(Z^{h\Gamma_k})} Y^\beta(\mathbb{A}_k)^h.$$

D'autre part, il est connu (voir, par exemple [St07, Lemma 5.7]) que si $X(\mathbb{A}_k)^{\text{ét, Br}} \neq \emptyset$ alors il existe une k -forme $Y \rightarrow X$ du revêtement universel, et on a la formule analogue

$$X(\mathbb{A}_k)^{\text{ét, Br}} = \bigcup_{\beta \in H^1(k, \pi_1(X))} Y^\beta(\mathbb{A}_k)^{\text{Br}}.$$

Notons que on peut identifier $H^1(k, \pi_1(X))$ avec $\pi_0(Z^{h\Gamma_k})$ aussitôt que l'on choisit un point de base pour ce dernier. En remplaçant X par Y^β on peut alors réduire (au moins le cas où $\pi_1(\overline{X})$ est fini) au cas où \overline{X} est simplement connexe, où il faut démontrer que $X(\mathbb{A}_k)^h = X(\mathbb{A}_k)^{\text{Br}}$. Comme on considère les points fixes homotopiques de Γ_k relativement aux points fixes adéliques, la dimension cohomologique effective de Γ_k pour notre besoin est 2. En utilisant la théorie de l'obstruction pour les points fixes homotopiques décrite ci-dessus ainsi qu'une suite spectrale étroitement liée, on peut établir que quand X est simplement connexe et $X(\mathbb{A}_k) \neq \emptyset$ alors $X(hk) \neq \emptyset$ et porte une structure de toiseur sous le groupe $H^2(k, \pi_2(\overline{X}))$

(où ce dernier est une variante appropriée de la cohomologie galoisienne avec des coefficients profinis). Ignorant pour l'instant les places réelles (qui nécessitent un argument adapté), l'ensemble $X(\mathbb{A}_k)$ est un tore sous $H^2(\mathbb{A}_k, \pi_2(\overline{X}))$, et l'application naturelle

$$X(hk) \longrightarrow X(h\mathbb{A}_k)$$

est compatible avec l'application naturelle $H^2(k, \pi_2(\overline{X})) \longrightarrow H^2(\mathbb{A}_k, \pi_2(\overline{X}))$. En choisissant un point fixe homotopique $q \in X(hk)$ comme point de base (ce qui nous sert également de point de base pour $X(h\mathbb{A}_k)$), on obtient une application $h_q : X(\mathbb{A}_k) \longrightarrow H^2(\mathbb{A}_k, \pi_2(\overline{X}))$, et on a $(x_v) \in X(\mathbb{A}_k)^h$ si et seulement si la classe de cohomologie adélique (avec coefficients profinis) $h_q(x_v) \in H^2(\mathbb{A}_k, \pi_2(\overline{X}))$ est rationnelle. En utilisant une variante adaptée de la théorie de dualité arithmétique on peut considérer un accouplement naturel

$$H^2(\mathbb{A}_k, \pi_2(\overline{X})) \times H^0(k, \pi_2(\overline{X})^*) \longrightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$$

où $\pi_2(\overline{X})^* = \text{Hom}(\pi_2(\overline{X}), \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(1))$ désigne le module de Galois dual. On note que $\pi_2(\overline{X})$ est un module de Galois profini dont le groupe abélien profini sous-jacent est isomorphe à $\widehat{\mathbb{Z}}^n \times A$, où A est un groupe abélien fini, et $\pi_2(\overline{X})^*$ est un module de Galois ordinaire dont le groupe abélien sous-jacent est isomorphe à $(\mathbb{Q}/\mathbb{Z})^n \times A^*$. Invoquant une variante adaptée de la suite de Poitou-Tate, on peut en déduire que $h_q(x_v)$ est rationnel si et seulement si $\langle h_q(x_v), \gamma \rangle = 0$ pour tous les $\gamma \in H^0(k, \pi_2(\overline{X})^*)$. Comme X est simplement connexe on peut identifier le module dual comme $\pi_2(\overline{X})^* \cong H^2(\overline{X}, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(1))$ et on a

$$H^0(k, \pi_2(\overline{X})^*) \cong H^2(\overline{X}, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(1))^{\Gamma_k} \cong H^2(X, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(1))/H^2(k, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(1)).$$

Pour finir la preuve, il suffit de noter que si on représente γ par un élément de $H^2(X, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(1))$ alors on a la formule $\langle h_q(x_v), \gamma \rangle = \sum_v \text{inv}_v \gamma|_{(x_v)}$. Comme $H^2(X, \mathbb{G}_m)$ est un groupe de torsion, l'application naturelle $H^2(X, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(1)) \longrightarrow H^2(X, \mathbb{G}_m)$ est surjective, et on obtient que $h_q(x_v)$ est rationnel si et seulement si $x_v \in X(\mathbb{A}_k)^{\text{Br}}$.

On considère le théorème 1.4 comme une interprétation étale homotopique de l'obstruction de Brauer-Manin étale. Plus précisément, ce théorème stipule qu'un point adélique $(x_v) \in X(\mathbb{A}_k)$ appartient à $X(\mathbb{A}_k)^{\text{ét, Br}}$ si et seulement s'il devient rationnel quand on remplace X par son avatar étale homotopique $\acute{\text{E}}t_{/k}(X)$. De cette façon, on peut considérer l'obstruction de Brauer-Manin étale comme l'obstruction canonique associée à l'invariant $\acute{\text{E}}t_{/k}(X)$. Notons que la construction de $\acute{\text{E}}t_{/k}(X)$ n'a rien à voir avec le fait que k est un corps de nombres. Plus précisément, la définition de $X(\mathbb{A}_k)^h$ n'utilise que la functorialité des constructions en jeu, et ne repose pas, par exemple, sur la théorie de la réciprocité ou la théorie du corps de classes global. En particulier, la méthode de construction de l'obstruction homotopique peut être également appliquée si on remplace les foncteurs $\acute{\text{E}}t_{/k'}(-)$ (considéré pour tout k'/k) par d'autres types de familles compatibles de foncteurs

$$\mathcal{F}_{k'} : \text{Var}_{/k'} \longrightarrow \mathcal{C},$$

où $\text{Var}_{/k'}$ désigne la catégorie des variétés sur k' et \mathcal{C} est une catégorie quelconque. Plus $\mathcal{F}_{k'}(X)$ retiendrait d'information sur X , plus l'obstruction obtenue serait forte, mais probablement plus difficile à calculer. Par exemple, on peut **affaiblir** l'obstruction homotopique en remplaçant $\acute{\text{E}}t_{/k'}(X)$ par un invariant qui se factorise le long de ce dernier : on peut remplacer $\acute{\text{E}}t_{/k'}(X) = \{X_\alpha\}_{\alpha \in I}$ par l'invariant $\mathbb{Z}\acute{\text{E}}t_{/k'}(X) = \{\mathbb{Z}X_\alpha\}_{\alpha \in I}$, où $\mathbb{Z}X_\alpha$ désigne le groupe abélien simplicial libre engendré

par X_α (qui porte une action de $\Gamma_{k'}$). Si on utilise ce foncteur au lieu de $\acute{E}t_{/k'}(X)$, on obtient une obstruction équivalente à l'obstruction de **Brauer-Manin** (voir [1, Theorem. 116]). Dans une autre direction, on peut remplacer $\acute{E}t_{/k'}(X) = \{X_\alpha\}_{\alpha \in I}$ par $P_1 \acute{E}t_{/k'}(X) = \{P_1(X_\alpha)\}_{\alpha \in I}$, ce qui nous fournit une obstruction équivalente à l'obstruction de **descente finie** (voir [1, Theorem. 103]). Cette discussion conduit à plusieurs directions intéressantes à poursuivre :

- (1) On peut remplacer $\acute{E}t_{/k'}(X) = \{X_\alpha\}_{\alpha \in I}$ par l'invariant $\Sigma_+^\infty \acute{E}t_{/k'}(X) = \{\Sigma_+^\infty X_\alpha\}_{\alpha \in I}$, où $\Sigma_+^\infty X_\alpha$ désigne le **spectre de suspension infini** de X_α . Cela nous donne une obstruction intermédiaire entre l'obstruction de Brauer-Manin et l'obstruction de Brauer-Manin étale. Quand X est propre, cette obstruction est également définie pour les **0-cycles**. Dans ce cas, on ne sait pas si l'obstruction homotopique qui en résulte pour l'existence de 0-cycle de degré 1 est effectivement plus forte que l'obstruction de Brauer-Manin.
- (2) On peut remplacer $\text{Spec}(k)$ par un schéma de base arbitraire S . Dans ce cas-là, on peut utiliser une version appropriée $\acute{E}t_{/S}(X)$ du type d'homotopie étale sur S , qui est un système inverse de faisceaux simpliciaux sur S par rapport à la topologie étale. Prenons $S = \text{Spec}(\mathcal{O}_k)$ où \mathcal{O}_k est l'anneau des entiers d'un corps de nombres k , on peut construire des obstructions homotopiques pour l'existence de points entiers sur les schémas sur \mathcal{O}_k , ainsi que pour l'analogie entier du principe de Hasse. On ne sait cependant pas si l'obstruction homotopique construite de cette façon est équivalente ou non à une variante entière appropriée de l'obstruction de Brauer-Manin étale.
- (3) On peut remplacer k par un corps de dimension cohomologique plus grande. Par exemple, on peut prendre le corps de fonctions $k = K(C)$ où C est une courbe sur K , et K est un corps local, et utiliser la même construction pour construire des obstructions à l'existence de points k -rationnels sur une variété X sur k , en supposant qu'il existe un point local défini sur les complétions k_m pour chaque point fermé $m \in C$. L'analogie de l'obstruction de Brauer-Manin dans cet cas a été développée en utilisant la théorie de réciprocity supérieure (voir [HS13],[CTPV]).

On termine cette partie par la description de quelques corollaires du théorème 1.4 et de ses variantes.

COROLLAIRE 1.5. *Soit X une variété lisse et géométriquement intègre sur un corps de nombres k telle que $\pi_1^{\acute{e}t}(X)$ soit abélien et l'application de Hurewicz $\pi_2^{\acute{e}t}(X) \rightarrow H_2^{\acute{e}t}(X)$ soit un isomorphisme. Alors l'obstruction de Brauer-Manin étale est équivalente à l'obstruction de Brauer-Manin.*

COROLLAIRE 1.6. *Soit X une variété lisse et géométriquement intègre sur un corps de nombres k telle que $\pi_2^{\acute{e}t}(X) = 0$ (par exemple, une courbe de genre ≥ 1). Alors l'obstruction de Brauer-Manin étale est équivalente à l'obstruction de descente finie.*

COROLLAIRE 1.7. *Soient X, Y deux variétés lisses et géométriquement intègres sur un corps de nombres k . Alors*

$$(X \times Y)(\mathbb{A}_k)^{\acute{e}t, \text{Br}} = X(\mathbb{A}_k)^{\acute{e}t, \text{Br}} \times Y(\mathbb{A}_k)^{\acute{e}t, \text{Br}}$$

Remarquons que la variante du corollaire 1.7 pour l'ensemble de Brauer-Manin a été établie dans [SZ11] dans le cas où X et Y sont propres.

1.3. Contre-exemples à l'obstruction de Brauer-Manin étale ([2])

Comme indiqué ci-dessus, Poonen ([**Po10**]) a été le premier à trouver un exemple d'une variété propre, lisse et géométriquement intègre X pour laquelle $X(\mathbb{A}_k)^{\text{ét, Br}} \neq \emptyset$ mais $X(k) = \emptyset$. Dans son exemple, X est une variété de dimension 3 munie d'une application surjective $p : X \rightarrow C$, où C est une courbe propre et lisse et la fibre générique de p est une surface de Châtelet. La courbe C est choisie pour n'avoir qu'un seul point rationnel $P \in C(k)$ pour lequel la fibre X_p est une surface de Châtelet lisse qui satisfait $X_p(\mathbb{A}_k) \neq \emptyset$ mais $X_p(\mathbb{A}_k)^{\text{Br}} = \emptyset$. Il s'ensuit que $X_p(k) = \emptyset$ et par conséquent $X(k) = \emptyset$. Toutefois, on peut montrer que l'application $p^* : \text{Br}(C) \rightarrow \text{Br}(X)$ est un isomorphisme, et en conséquence que $X_p(\mathbb{A}_k) \subseteq X(\mathbb{A}_k)^{\text{Br}}$. En montrant que tout revêtement étale de X est une image réciproque d'un revêtement étale de C , on peut même en déduire que $X_p(\mathbb{A}_k) \subseteq X(\mathbb{A}_k)^{\text{ét, Br}}$, impliquant que ce dernier n'est pas vide.

Conjecturalement, si X est une courbe propre, lisse et géométriquement intègre pour lequel $X(\mathbb{A}_k)^{\text{ét, Br}} \neq \emptyset$, on s'attend à ce que $X(k) \neq \emptyset$. En particulier, on ne s'attend pas à avoir un exemple comme ci-dessus avec X étant une courbe. On se demande alors assez naturellement s'il existe ou non un tel exemple avec X une **surface**? Autrement dit, existe-il une surface propre, lisse et géométriquement intègre pour laquelle $X(\mathbb{A}_k)^{\text{ét, Br}} \neq \emptyset$ mais $X(k) = \emptyset$?

La contribution principale de l'article [2], effectué en commun avec A. Skorobogatov, a justement été de construire, de façon élémentaire, une telle surface. Décrivons maintenant la construction plus en détail. Soit k un corps de nombres et soit $f(x, y)$ un polynôme homogène séparable de degré $d = \deg(f) \geq 5$ tel que le schéma $Z^f \subseteq \mathbb{P}_k^1$ défini par $f(x, y) = 0$ est un schéma de dimension 0 mettant en défaut le principe de Hasse. On remarque qu'un tel polynôme existe sur tout corps de nombres. Par exemple, quand $k = \mathbb{Q}$ on peut choisir

$$f(x, y) = (x^2 - 2y^2)(x^2 - 17y^2)(x - 34y^2).$$

On écrit $Z^f = \coprod_i \text{Spec}(K_i)$ où K_i est une extension finie de k . Choisissons maintenant des extensions finies L/k et F/k telles que $L \otimes_k K_i$ et $F \otimes_k K_i$ soient des corps pour chaque $i = 1, \dots, n$, et telles que $[L : k] = \frac{d}{2} - 1$, $[F : k] = \frac{d}{2}$ si d est pair, et $[L : k] = \frac{d-1}{2}$, $[F : k] = \frac{d+1}{2}$ si d est impair. Fixons un plongement

$$\text{Spec}(L) \coprod \text{Spec}(F) \hookrightarrow \mathbb{P}_k^1$$

et soit $D \subseteq \mathbb{P}_k^1 \times \mathbb{P}_k^1$ la courbe

$$D = (Z^f \times \mathbb{P}_k^1) \cup (\mathbb{P}_k^1 \times \text{Spec}(L)) \cup (\mathbb{P}_k^1 \times \text{Spec}(F)).$$

La classe de D dans $\text{Pic}(\mathbb{P}_k^1 \times \mathbb{P}_k^1) \cong \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ est $(d, d-1)$ si d est pair et (d, d) si d est impair. On remarque que par construction $D(\mathbb{A}_k) \neq \emptyset$ mais $D(k) = \emptyset$. La propriété principale rendant D utile est la suivante :

LEMME 1.8. *L'application naturelle $\text{Br}(k) \rightarrow \text{Br}(D)$ est un isomorphisme.*

Comme $D(\mathbb{A}_k) \neq \emptyset$, l'application $\text{Br}(k) \rightarrow \text{Br}(D)$ est injective. La preuve du lemme 1.8 repose alors sur une identification de $\text{Br}(D)/\text{Br}(k)$ avec l'homologie au milieu du complexe naturel

$$(4) \quad \text{Br}(k) \rightarrow \text{Br}(L) \oplus \text{Br}(F) \oplus \bigoplus_{i=1}^n \text{Br}(K_i) \rightarrow \bigoplus_{i=1}^n \text{Br}(L \otimes_k K_i) \oplus \bigoplus_{i=1}^n \text{Br}(F \otimes_k K_i).$$

En utilisant le fait que $\gcd([L : k], [F : k], d) = 1$ par construction, et plusieurs arguments de restriction-corestriction, on peut calculer que le complexe (4) est en effet exact.

COROLLAIRE 1.9. *On a $D(\mathbb{A}_k)^{\text{Br}} = D(\mathbb{A}_k)$.*

Nous allons maintenant construire une courbe $C \subseteq \mathbb{P}_k^1 \times \mathbb{P}_k^1$ avec un seul point singulier tel que C et D sont linéairement équivalents. Soit $P = (P_1, P_2)$ un point rationnel de $\mathbb{P}_k^1 \times \mathbb{P}_k^1$ qui ne se trouve pas sur D . Choisissons une droite l dans l'espace tangent de $\mathbb{P}_k^1 \times \mathbb{P}_k^1$ à P telle que l ne soit pas tangente à $\mathbb{P}_k^1 \times \{P_1\}$ ni à $\{P_2\} \times \mathbb{P}_k^1$. Considérons premièrement le cas où d est impair et $[D] = (d, d)$. Soient $C_1, \dots, C_d \subseteq \mathbb{P}_k^1 \times \mathbb{P}_k^1$ des courbes de degré $(1, 1)$, deux à deux distinctes, passant par P , et tangentes à l . Soit $C = \cup_i C_i$. Comme $[C_i] \cdot [C_i] = 2$ et toutes les C_i sont tangentes à l , il s'ensuit que $C_i \cap C_j = \{P\}$ pour chaque $i \neq j$. Si d est pair, on définit C comme l'union de C_i pour $i = 1, \dots, d-1$ et $\{P_1\} \times \mathbb{P}_k^1$. On a que les composantes irréductibles de C sont des courbes rationnelles, propres et lisses, et que chaque pair de composantes s'intersecte seulement à P . En particulier, P est le seul point singulier de C . Par construction, on a $[C] = [D]$ dans $\text{Pic}(\mathbb{P}_k^1 \times \mathbb{P}_k^1)$ et on peut alors choisir un pinceau de courbes $q : Y \rightarrow \mathbb{P}^1$ tel que $q^{-1}(0) = C$ et $q^{-1}(\infty) = D$. De plus, on peut assurer que Y est lisse et que la fibre générique de q est géométriquement intègre.

Finalement, on choisit une courbe propre, lisse et géométriquement intègre E avec un seul point rationnel $Q \in E(k)$ et un morphisme dominant $\varphi : E \rightarrow \mathbb{P}_k^1$ tel que $\varphi(A) = \infty$ et φ ne soit pas ramifié au-dessus des points de \mathbb{P}_k^1 où Y a une fibre singulière (y compris 0 et ∞). On définit X par

$$X = E \times_{\mathbb{P}_k^1} Y.$$

X est alors une surface propre, lisse et géométriquement intègre munie d'une application dominante $p : X \rightarrow E$. Comme E a un seul point rationnel Q et $p^{-1}(Q) = D$ n'a pas de points rationnels, on peut en déduire que $X(k) \neq \emptyset$. D'un autre côté, on a $D(\mathbb{A}_k)^{\text{Br}} \subset X(\mathbb{A}_k)^{\text{Br}}$ et par le corollaire 1.9, on peut en déduire que $X(\mathbb{A}_k)^{\text{Br}} \neq \emptyset$. Pour démontrer que $X(\mathbb{A}_k)^{\text{ét, Br}} \neq \emptyset$, on utilise en fait un argument similaire à celui de Poonen, et on vérifie que tout revêtement étale de X vient d'un revêtement approprié de E , ce qui implique en particulier que $D(\mathbb{A}_k)^{\text{Br}} \subseteq X(\mathbb{A}_k)^{\text{ét, Br}}$ et donc $X(\mathbb{A}_k)^{\text{ét, Br}} \neq \emptyset$.

La méthode des fibrations

2.1. Contexte

La méthode des fibrations est un terme collectif pour plusieurs outils et techniques utilisés pour aborder des problèmes comme la conjecture 1.1 et la conjecture 1.3 pour des variétés propres et lisses X munies d'une **fibration** $\pi : X \rightarrow \mathbb{P}^1$, dont la fibre générique est géométriquement intègre. Pour le cas de la conjecture 1.1, le problème qu'on examine avec la méthode des fibrations est le suivant :

QUESTION 2.1. *Étant donné un point adélique $(x_v) \in X(\mathbb{A}_k)^{\text{Br}(X)}$, peut-il être approché par un point de $X_c(\mathbb{A}_k)^{\text{Br}(X_c)}$ pour un $c \in \mathbb{P}^1(k)$ bien choisi ?*

Dans ce contexte, la situation la plus simple est celle où toutes les fibres de π sont **scindées**, c'est-à-dire qu'elles contiennent un ouvert géométriquement intègre. En remplaçant X par un sous-ensemble ouvert on peut supposer que les fibres de π sont en fait géométriquement intègres, et que π est lisse. Les bornes de Lang–Weil–Nisnevich montrent que, dans ce cas, l'application induite $X(\mathbb{A}_k) \rightarrow \mathbb{P}_k^1(\mathbb{A}_k)$ est **ouverte** par rapport aux topologies adéliques correspondantes. On peut alors utiliser la propriété d'approximation faible sur \mathbb{P}^1 pour approcher $(x_v) \in X(\mathbb{A}_k)$ par un point adélique $(x'_v) \in X_c(\mathbb{A}_k)$ avec $c \in \mathbb{P}^1(k)$. Si, en plus, les fibres lisses ont un groupe de Brauer réduit aux classes constantes, alors on peut obtenir une réponse positive à la question 2.1.

Quand π a exactement une fibre non scindée, et que cette fibre est définie sur k (auquel cas on peut supposer que c'est la fibre au-dessus de $\infty \in \mathbb{P}_k^1$), on peut toujours formuler un argument similaire, si on choisit une place appropriée v , et utiliser la propriété d'approximation forte hors v sur $\mathbb{A}_k^1 = \mathbb{P}_k^1 \setminus \{\infty\}$. Dans ce cas, on peut même autoriser un groupe de Brauer non trivial dans les fibres lisses de π , selon le théorème d'Harari :

THÉORÈME 2.2 ([Ha10]). *Soit X une variété propre, lisse et géométriquement intègre sur un corps de nombres k , munie d'un morphisme dominant $\pi : X \rightarrow \mathbb{P}_k^1$ de fibre générique rationnellement connexe. Supposons que les fibres de π au-dessus de \mathbb{A}_k^1 sont scindées. Si la conjecture 1.1 vaut pour toutes les fibres lisses de π alors elle vaut pour X .*

On remarque que la preuve du théorème 2.2 nécessite des arguments de réciprocity assez délicats. Un résultat analogue au théorème 2.2 pour les 0-cycles et la conjecture 1.3 a été établi par Liang ([Li12a]).

Quand plus d'une fibre est non scindée la situation devient plus complexe. Le premier argument de fibrations autorisant une telle situation est celui apparaissant dans la preuve de Hasse du théorème de Hasse–Minkowski pour les hypersurfaces quadriques. La fibration pertinente de ce cas contient deux fibres non scindées, et Hasse parvint à se servir du théorème de Dirichlet sur les nombres premiers dans les

progressions arithmétiques, combiné à la loi de réciprocité quadratique. L'argument de Hasse fut généralisé dans une série de travaux réalisés par Colliot-Thélène, San-suc, Serre, Salberger, Skorobogatov et Swinnerton-Dyer concernant les fibrations possédant un nombre arbitraire de fibres non scindées (en conservant l'hypothèse que le groupe de Brauer des fibres lisses est réduit aux classes constantes). Les travaux ci-dessus ont abouti au théorème suivant :

THÉORÈME 2.3 ([CTSSD98a]). *Soit X une variété propre, lisse et géométriquement intègre sur un corps de nombres k , munie d'un morphisme dominant $\pi : X \rightarrow \mathbb{P}^1$ de fibre générique rationnellement connexe. Supposons les deux conditions suivantes satisfaites :*

- (1) *Pour tout point fermé $m \in \mathbb{P}^1$ la fibre X_m possède une composante irréductible de multiplicité 1 dans le corps des fonctions de laquelle la fermeture algébrique de $k(m)$ est une extension abélienne de $k(m)$.*
- (2) *Le groupe de Brauer des fibres lisses de π est réduit aux classes constantes.*

Alors :

- (1) *Si la conjecture 1.3 vaut pour les fibres lisses de π , elle vaut pour X .*
- (2) *Supposant l'hypothèse de Schinzel, si la conjecture 1.1 vaut pour les fibres lisses de π , elle vaut pour X .*

Rappelons que l'hypothèse de Schinzel est une généralisation conjecturale et largement ouverte du théorème de Dirichlet, concernant l'existence d'entiers en lesquels un nombre fini de polynômes sur \mathbb{Z} prennent simultanément une valeur première. Le théorème de Dirichlet alors correspond au cas où on considère un seul polynôme de degré 1.

2.2. Combinatoire additive et l'hypothèse de Schinzel ([3])

Dans la dernière décennie, des progrès remarquables ont été accomplis dans le domaine de la combinatoire additive, notamment dans les travaux de Green et Tao sur les progressions arithmétiques dans les nombres premiers ([GT08]), et la preuve du cas de complexité finie de la conjecture de Hardy-Littlewood par Green, Tao et Ziegler ([GT10],[GT12],[GTZ12]).

Récemment, L. Matthiesen a appliqué le vaste dispositif développé dans les articles ci-dessus pour étudier les corrélations entre les fonctions de comptage des représentations de nombres par des formes quadratiques. Dans leur article [BMS14], Skorobogatov, Browning et Matthiesen ont appliqué cette technique pour la première fois à l'étude des points rationnels sur les pinceaux de coniques et pinceaux de quadriques définis sur \mathbb{Q} , dont les fibres dégénérées se trouvent toutes au-dessus de points rationnels. Des résultats de cette forme n'étaient connus que conditionnellement par le théorème 2.3, en supposant l'hypothèse de Schinzel. L'article [BMS14] marque le premier résultat de ce type concernant les points rationnels sur les variétés fibrées avec beaucoup de fibres non scindées.

Le travail effectué dans l'article [3] a utilisé les résultats de Green-Tao-Ziegler dans un contexte plus large, ce qui a permis d'avoir des résultats de la forme obtenue dans [BMS14] pour les fibrations beaucoup plus générales. Comme [4] reprend et généralise tous les résultats contenus dans [3], nous nous contenterons de formuler

le théorème principal de [3]. Rappelons que pour un morphisme $\pi : X \rightarrow Y$, le groupe de Brauer **vertical** $\text{Br}_{\text{vert}}(X)$ de X sur Y est défini comme

$$\text{Br}_{\text{vert}}(X) = \text{Br}(X) \cap \pi^* \text{Br}(k(Y)) \subseteq \text{Br}(k(X)),$$

c'est-à-dire, le sous-ensemble de $\text{Br}(X)$ dont l'image dans $\text{Br}(k(X))$ vient de $\text{Br}(k(Y))$.

THÉORÈME 2.4 ([3]). *Soit X une variété lisse, propre et géométriquement intègre sur \mathbb{Q} , munie d'une application surjective $\pi : X \rightarrow \mathbb{P}^1$ telle que :*

- (1) *À l'exception d'un nombre fini de fibres X_{b_1}, \dots, X_{b_n} avec $b_i \in \mathbb{P}^1(\mathbb{Q})$, chaque fibre de π contient une composante irréductible géométriquement intègre de multiplicité 1.*
- (2) *Pour chaque $i = 1, \dots, n$, la fibre X_{b_i} possède une composante irréductible de multiplicité 1 dans le corps des fonctions de laquelle la fermeture algébrique de $k(m)$ est une extension abélienne.*

Alors $\mathbb{P}^1(\mathbb{Q}) \cap \pi(X(\mathbb{A}_{\mathbb{Q}}))$ est dense dans $\pi(X(\mathbb{A}_{\mathbb{Q}})^{\text{Br}_{\text{vert}}}) \subseteq \mathbb{P}^1(\mathbb{A}_{\mathbb{Q}})$. Si, en plus, la fibre X_b satisfait le principe de Hasse et l'approximation faible pour tout point rationnel $b \in \mathbb{P}^1(\mathbb{Q})$ en-dehors d'un ensemble fini, alors $X(\mathbb{Q})$ est dense dans $X(\mathbb{A}_{\mathbb{Q}})^{\text{Br}_{\text{vert}}}$.

2.3. Contributions à la méthode des fibrations ([4])

Le théorème 2.3 ci-dessus, bien qu'applicable à des fibrations assez générales, est limité. La première restriction vient de la condition d'abélianité des fibres non scindées. Cette condition, qui pourrait être difficile à vérifier en pratique, conduit à une deuxième contrainte, en forçant la condition que les fibres lisses de π n'auraient pas d'éléments de Brauer non constants. En particulier, la conclusion du théorème 2.3 pour X est plus faible que l'hypothèse qu'on a besoin de faire pour les fibres lisses. Cela implique que l'on ne peut pas appliquer le théorème 2.3 de manière inductive. Finalement, pour avoir des résultats concernant les points rationnels, on a besoin de supposer l'hypothèse de Schinzel, une conjecture actuellement complètement ouverte et avec très peu de cas connus.

La contribution principale de l'article [4], en commun avec O. Wittenberg, est d'enlever toutes les restrictions ci-dessus inconditionnellement pour le cas des 0-cycles, et conditionnellement pour le cas des points rationnels. Le premier résultat de [4] est le suivant :

THÉORÈME 2.5 ([4]). *Soit X une variété lisse, propre et géométriquement intègre sur un corps de nombres k . Soit Y une variété sur k , birationnellement équivalente sur k à \mathbb{P}_k^n , C , ou à un produit $\mathbb{P}_k^n \times C$ pour quelque $n \geq 1$ et quelque courbe lisse, propre, et géométriquement intègre C qui satisfait la conjecture 1.3. Soit $\pi : X \rightarrow Y$ un morphisme dominant dont la fibre générique est rationnellement connexe. Si la conjecture 1.3 vaut pour les fibres lisses de π alors elle vaut pour X .*

Dans le cas des points rationnels, on peut aussi obtenir des résultats inconditionnels dans certains cas, y compris dans les cas suivants :

THÉORÈME 2.6 ([4]). *Soit X une variété lisse, propre et géométriquement intègre sur k , munie d'un morphisme dominant $\pi : X \rightarrow \mathbb{P}_k^1$ dont la fibre générique est rationnellement connexe. Supposons que **l'une** des hypothèses suivantes vaut :*

(1) $k = \mathbb{Q}$ et toutes les fibres non scindées se trouvent au-dessus des points rationnels.

(2) Le lieu non scindé de π est contenu dans un sous-schéma de \mathbb{P}_k^1 de degré 2.

Si la conjecture 1.1 vaut pour les fibres lisses de π alors elle vaut pour X .

Une des idées utilisés dans [4] concerne un type spécial de fibration, dont le comportement est en un sens **universel** par rapport au « problème des fibrations ». Soient $m \geq 2, n \geq 2$ des nombres entiers, et pour chaque $i = 1, \dots, n$, soient k_i/k et L_i/k des extensions finies des corps. Pour chaque $i = 1, \dots, n$ et $j = 1, \dots, m$, soit $a_{i,j} \in k_i$ un élément. On suppose l'hypothèse suivante :

HYPOTHÈSE 2.7. La transformation k -linéaire $k^m \rightarrow \bigoplus_{i=1}^n k_i$ donnée par

$$(x_1, \dots, x_m) \mapsto \left(\sum_j a_{1,j} x_j, \dots, \sum_j a_{n,j} x_j \right)$$

est non dégénérée (c'est-à-dire que la dimension de son image est la plus grande possible).

À ces données on associe une variété quasi-affine W munie d'un morphisme lisse $p : W \rightarrow \mathbb{P}_k^{m-1}$ dont la fibre générique est géométriquement intègre. La variété W est définie de la façon suivante. Soit \bar{k} une clôture algébrique de k . On va identifier la restriction de scalaires $\mathbb{R}_{L_i/k} \mathbb{A}_{L_i}^1$ avec l'espace affine dont les coordonnées sont indexées par les plongements k -linéaires de L_i dans \bar{k} . On peut grouper ces coordonnées en lots correspondant aux plongements de k_i dans \bar{k} induits par leur indices. Dans ces termes, on peut considérer l'ensemble fermé $F_i \subseteq \mathbb{R}_{L_i/k} \mathbb{A}_{L_i}^1$ défini par la condition qu'au moins deux coordonnées dans le même lot s'annulent simultanément. Soit

$$(5) \quad W \subseteq (\mathbb{A}_k^m \setminus \{(0, \dots, 0)\}) \times \prod_{i=1}^n (\mathbb{R}_{L_i/k}(\mathbb{A}_{L_i}^1) \setminus F_i)$$

la sous-variété donnée par les équations

$$\sum_{j=1}^m a_{i,j} x_j = N_{L_i/k_i}(y_i)$$

pour $i = 1, \dots, n$, où x_1, \dots, x_m sont les coordonnées de \mathbb{A}_k^m et y_i est une coordonnée sur $\mathbb{R}_{L_i/k}(\mathbb{A}_{L_i}^1)$. Finalement, on note $p : W \rightarrow \mathbb{P}_k^{m-1}$ la composition de la projection $W \rightarrow (\mathbb{A}_k^m \setminus \{(0, \dots, 0)\})$ et l'application naturelle $(\mathbb{A}_k^m \setminus \{(0, \dots, 0)\}) \rightarrow \mathbb{P}_k^{m-1}$. On remarque que grâce à l'absence des F_i , le morphisme p est lisse.

Soit $S \subseteq \Omega_k$ un ensemble fini de places de k tel que chaque extension L_i est non ramifiée hors de S , et tel que pour chaque $v \notin S$ et chaque place $w \in \Omega_{k_i}$ au-dessus de v , on a que tous les $a_{i,j}$ sont w -entiers et au moins un des $a_{i,j}$ est une w -unité. Soit S_i l'ensemble fini des places de k_i qui se trouvent au-dessus de S , et soit T_i l'ensemble des places de L_i qui se trouvent au-dessus de S_i . On peut alors considérer le morphisme de \mathcal{O}_S -schémas

$$N_{\mathcal{O}_{T_i}/\mathcal{O}_{S_i}} : \mathbb{R}_{\mathcal{O}_{T_i}/\mathcal{O}_S} \mathbb{A}_{\mathcal{O}_{T_i}}^1 \rightarrow \mathbb{R}_{\mathcal{O}_{S_i}/\mathcal{O}_S} \mathbb{A}_{\mathcal{O}_{S_i}}^1$$

donné par la norme. Comme L_i est non ramifié hors S , on a un modèle S -entier naturel \mathcal{F}_i de F_i . On peut finalement définir le sous-schéma

$$(6) \quad \mathcal{W} \subseteq (\mathbb{A}_{\mathcal{O}_S}^m \setminus \{(0, \dots, 0)\}) \times \prod_{i=1}^n (\mathbb{R}_{\mathcal{O}_{T_i}/\mathcal{O}_S}(\mathbb{A}_{\mathcal{O}_{T_i}}^1) \setminus \mathcal{F}_i)$$

par les équations

$$\sum_{i=1}^m a_{i,j} x_j = N_{\mathcal{O}_{T_i}/\mathcal{O}_{S_i}}(y_i)$$

où x_1, \dots, x_m sont maintenant des coordonnées sur $\mathbb{A}_{\mathcal{O}_S}^m$ et y_i est une coordonnée sur $R_{\mathcal{O}_{T_i}/\mathcal{O}_S}(\mathbb{A}_{\mathcal{O}_{T_i}}^1)$. L'application correspondant aux \mathcal{O}_S -schémas $p : W \rightarrow \mathbb{P}_{\mathcal{O}_S}^{m-1}$ est lisse.

LEMME 2.8. *Si $v \notin S$ est une place de k et $x_j \in k_v, y_i \in (L_i) \otimes_k k_v$ sont des éléments considérés comme les coordonnées d'un point local $P = (x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_n) \in W(k_v)$, alors P provient de $W(\mathcal{O}_v)$ si et seulement si les conditions suivantes valent :*

- (1) *Chaque x_j est v -entier et au moins un x_j est une v -unité.*
- (2) *Chaque y_i est v -entier, c'est-à-dire, provient de $\mathcal{O}_{L_i, v} = \mathcal{O}_{T_i} \otimes_{\mathcal{O}_S} \mathcal{O}_v$.*
- (3) *Pour chaque $i = 1, \dots, n$ et chaque place w de k_i , il y a au plus une place $u \in \Omega_{L_i}$ au-dessus de w telle que $\text{val}_u(y_i) > 0$. De plus, si une telle place existe alors elle est de degré 1 sur w .*

On propose, dans [4], la conjecture suivante, dont l'énoncé constitue une réponse positive à la question 2.1 pour la fibration $p : W \rightarrow \mathbb{P}_k^1$.

CONJECTURE 2.9 (Conjecture (F)). *Supposons que les données utilisées pour définir W satisfont l'hypothèse 2.7. Alors l'inclusion*

$$\bigcup_{t_0 \in \mathbb{P}_k^{m-1}(k)} W_{t_0}(\mathbb{A}_k) \subseteq W(\mathbb{A}_k)$$

est dense dans la topologie adélique.

L'énoncé de la conjecture (F) est connu, en particulier, dans les cas suivants :

- (1) Si W satisfait l'approximation forte en dehors de n'importe quelle place. Cela vaut, par exemple, si $\sum_i [k_i : k] \leq m$ (voir [4, Thm 9.11] pour le cas $m = 2$).
- (2) Si $k = k_1 = \dots = k_n = \mathbb{Q}$. Cela a été établi par Matthiessen ([Ma14]) en utilisant ses travaux antérieurs avec Browning et la technologie de la combinatoire additive de Green, Tao et Ziegler.
- (3) Si chaque L_i/k est abélienne et que l'on suppose l'hypothèse de Schinzel (cela est un cas particulier de Théorème 2.3).

Le théorème suivant, établi dans [4], réduit essentiellement tous les problèmes de fibration au-dessus de \mathbb{P}_k^1 à des problèmes de fibration pour les variétés W définies ci-dessus.

THÉORÈME 2.10 ([4, Thm. 9.17]). *Supposons la conjecture 2.9 pour $m = 2$. Soit X une variété lisse et géométriquement intègre sur k munie d'un morphisme lisse surjective $\pi : X \rightarrow \mathbb{P}_k^1$ dont la fibre générique est géométriquement intègre. Soit $V \subseteq \mathbb{P}_k^1$ un ouvert tel que les fibres de π au-dessus de chaque point fermé de V sont scindées. Soit $U = \pi^{-1}(V) \subseteq X$ et $B \subseteq \text{Br}(U)/\text{Br}(k)$ un sous-ensemble fini contenant $\text{Br}(U)_{\text{vert}}/\text{Br}(k)$. Alors l'inclusion*

$$\bigcup_{t_0 \in V(k)} U_{t_0}(\mathbb{A}_k)^B \subseteq X(\mathbb{A}_k)^{B'}$$

est dense dans la topologie adélique de X , où $B' = B \cap [\text{Br}(X)/\text{Br}(k)]$.

La preuve du théorème 2.10 comporte plusieurs étapes. Soient m_1, \dots, m_n les points fermés de $M = \mathbb{P}_k^1 \setminus V$. Pour chaque i , soit $k_i = k(m_i)$ le corps de définition de m_i et soit $a_i \in k_i$ la coordonnée de m_i (où on suppose, pour simplifier, que $\infty \in V$ et donc $\mathbb{P}_k^1 \setminus V$ considéré comme un sous-ensemble de \mathbb{A}_k^1). Étant donné un point adélique $(x_v) \in X$ orthogonal à B' , soit $t_v \in k_v$ la coordonnée de x_v (où on peut supposer encore que x_v ne se trouve pas au-dessus de ∞). En utilisant le « lemme formel » d'Harari on peut approcher (x_v) par un point adélique qui est orthogonal à B . On peut alors supposer sans perte de généralité que (x_v) lui-même est orthogonal à B . Soit L_i/k_i une extension finie assez grande pour que la fibre X_{m_i} contienne une composante irréductible géométriquement intègre $Y_i \subseteq X_{m_i} \otimes L$ définie sur L_i (automatiquement de multiplicité 1, comme on a supposé que π est lisse et surjective). En choisissant L_i assez grande, on peut également supposer que Y_i admet un revêtement abélien ramifié $E_i \rightarrow Y_i$, défini sur L_i , tel que pour chaque $\beta \in B$, le résidu $\beta|_{Y_i} \in H^1(k(Y_i), \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ s'annule quand on l'envoie dans $H^1(k(E_i), \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$. En utilisant l'orthogonalité de (x_v) à $\text{Br}_{\text{vert}}(U)$, ainsi que la théorie de la dualité arithmétique pour les tores algébriques, on peut trouver des éléments $b_i \in k_i$ tels que $b_i(t_v - a_i) \in k_i \otimes_k k_v$ est une norme d'un élément $y_{i,v} \in L_i \otimes_k k_v$ pour chaque $v \in \Omega_k$. Soit W la variété définie ci-dessus pour les données $a_{i,1} = b_i a_i, a_{i,2} = -a_i$. Les t_v et les $y_{i,v}$ déterminent alors un point adélique $(z_v) \in W(\mathbb{A}_k)$. Soit S un ensemble fini de places tel que le modèle \mathcal{W} décrit ci-dessus est défini sur \mathcal{O}_S et tel que (z_v) est entier hors S . Invoquant la conjecture 2.9, on peut approcher (z_v) par un point adélique (z'_v) qui se trouve au-dessus d'un point rationnel $c_0 \in \mathbb{P}_k^1(k)$. Comme on a supposé que (x_v) ne se trouve pas au-dessus de $\infty \in \mathbb{P}_k^1$ on peut supposer que $c_0 \neq \infty$. Soit $t_0 \in k$ la coordonnée de c_0 . On peut alors supposer que (z'_v) est arbitrairement proche de z_v pour chaque $v \in S$, et par conséquent, utiliser le théorème des fonctions implicites pour construire un point local $y_v \in X(\mathbb{A}_k)$ arbitrairement proche de x_v . Pour $v \notin S$ on peut supposer que z'_v est v -entier, auquel cas le lemme 2.8 implique que s'il existe une place w au-dessus de v où la réduction de $c_0 \bmod w$ coïncide avec m_i , alors il existe une place u de L_i de degré 1 au-dessus de w . En choisissant S assez grand, on peut supposer que dans ce cas-là la réduction de $E_i \bmod w$ contient un \mathbb{F}_w -point lisse. On peut donc relever ce point en un \mathcal{O}_v -point de E_i et l'envoyer sur un \mathcal{O}_v -point y_v de Y_i . Le point adélique résultant $(y_v) \in X_{c_0}(\mathbb{A}_k)$ approche alors (x_v) et on peut vérifier par un calcul de résidus que (y_v) est orthogonale à B si on a choisi S assez grand au début de l'argument.

Observons que le théorème 2.10 (ou bien, sa preuve) n'est pas assez fort pour impliquer le théorème 2.6, en utilisant que les cas connus de la conjecture (F) décrits ci-dessus. En effet, pour appliquer le théorème 2.10 à une fibration $\pi : X \rightarrow \mathbb{P}_k^1$, on doit supposer l'énoncé de la conjecture 2.9 pour les fibrations $p : W \rightarrow \mathbb{P}_k^1$ dont le lieu non scindé $M \subseteq \mathbb{P}_k^1$ contient le lieu non scindé de p ainsi que les points fermes au-dessus duquel B est ramifié. Ni la nature exacte, ni le degré total de ce lieu ne peuvent être contrôlés efficacement.

Notons que si on ne suppose l'énoncé de la conjecture 2.9 que pour les fibrations $p : W \rightarrow \mathbb{P}_k^1$ dont le lieu non scindé $M \subseteq \mathbb{P}_k^1$ coïncide avec celui de π , alors on peut toujours approcher un point adélique $(x_v) \in X(\mathbb{A}_k)^B$ par un point adélique $(y_v) \in X_{c_0}(\mathbb{A}_k)$ avec un $c_0 \in \mathbb{P}_k^1(k)$ choisi comme ci-dessus. Toutefois, pour un élément $\beta \in B$ on n'a pas de garantie que la contribution de $\text{inv}_v \beta(y_v)$ pour $v \notin S$ soit nulle. En effet, si on note $M' \subseteq M$ le lieu non scindé de π , alors $\beta \in \text{Br}(U)$ peut

avoir un résidu non trivial le long d'une fibre X_m pour $m \in M \setminus M'$, auquel cas $\text{inv}_v \beta(y_v)$ peut être non nul quand l'image de c_0 dans $\mathbb{P}^1(\mathbb{F}_v)$ coïncide avec l'image de m . Quand $m \notin M'$ on ne peut pas a-priori contrôler les places v en lesquelles la réduction de c_0 coïncide avec m . La façon dont nous surmontons cette difficulté dans [4] repose sur un argument utilisé par Harari dans la preuve du théorème 2.2. L'idée générale consiste à choisir pour chaque $m \in M \setminus M'$ une place appropriée v_m de k et l'ajouter à notre ensemble des places S . Avec construit notre collection de points locaux (y_v) pour $v \notin \{v_m\}_{m \in M \setminus M'}$, on invoque une variante de l'argument de réciprocité d'Harari, montrant qu'il est possible de choisir $y_{v_m} \in X_{c_0}(\mathcal{O}_{v_m})$ pour $m \in M \setminus M'$ tel que le point adélique (y_v) soit orthogonal à B .

Dans un travail en cours avec Olivier Wittenberg nous considérons une approche un peu différente pour l'étape décrite ci-dessus. En particulier, nous formulons une variante de la conjecture (F), que l'on peut appeler la conjecture (F+). Étant donnée une variété W comme ci-dessus, la conjecture (F+) considère un certain sous-groupe fini $B \subseteq \text{Br}(k(W))$, et affirme que on peut approcher un point adélique $(x_v) \in W(\mathbb{A}_k)$ par un point adélique $(x'_v) \in W_c(\mathbb{A}_k)$ dans une fibre rationnelle, tel que (x'_v) est en outre orthogonal à B . En particulier, pour chaque W l'énoncé de la conjecture (F+) implique celle de la conjecture (F). D'autre part, quand $m = 2$ on peut montrer que l'énoncé de la conjecture (F) pour tous les W implique l'énoncé de la conjecture (F+) pour tous les W . En utilisant un argument fondé sur l'argument de la réciprocité d'Harari mentionné ci-dessus, on peut prouver l'énoncé du théorème 2.10 en supposant la conjecture (F+) pour les fibrations $W \rightarrow \mathbb{P}_k^1$ dont le lieu non scindé n'est pas plus grand que celui de $\pi : X \rightarrow \mathbb{P}^1$. Heureusement, les énoncés suivants nous disent que effectivement, dans les cas typiques où on sait que la conjecture (F) vaille, on sait également que la conjecture (F+) vaut :

- (1) Si W satisfait l'approximation forte en dehors de n'importe quelle place, alors la conjecture (F+) vaut pour W .
- (2) Si $k_i = k$ pour au moins un $i = 1, \dots, n$, alors la conjecture (F) pour W implique la conjecture (F+) pour W .
- (3) Si chaque L_i/k est abélienne et que l'hypothèse de Schinzel est supposé, alors la conjecture (F+) vaut pour W .

Les cas (1) et (2) ci-dessus peuvent être utilisés, par exemple, pour démontrer respectivement les cas (1) et (2) du théorème 2.6.

Nous allons maintenant discuter brièvement la preuve du théorème 2.5 ci-dessus, qui se rapporte au cas des 0-cycles. Une grande partie des outils et techniques utilisés dans la preuve de 2.5 a été développée dans [Wi12], y compris

- (1) Un argument général qui nous permet de réduire le problème au cas de 0-cycles **effectifs**.
- (2) Un théorème de dualité arithmétique concernant certaines variantes $\text{Pic}_+(C)$ et $\text{Br}_+(C)$ des groupes de Picard et Brauer respectivement, associées à une courbe C dont module de III est fini, une collection de points fermés $m_1, \dots, m_n \in C$, et une collection d'extensions finies $L_i/k(m_i)$. Quand $C = \mathbb{P}_k^1$ cette dualité est réduite au théorème de Poitou-Tate pour les tores algébriques (ce qui a été utilisé dans la démonstration du théorème 2.10 ci-dessus).

Soit maintenant C une courbe propre, lisse et géométriquement intègre, qui satisfait la conjecture 1.3. Cela implique, en effet, que le module de III de C est fini, voir [Wi12]. Pour chaque n on peut considérer le produit symétrique $\text{Sym}^n(C)$.

Les points rationnels sur $\mathrm{Sym}^n(C)$ correspondent aux 0-cycles **effectifs** de degré n . On a une application naturelle $\mathrm{Sym}^n(C) \rightarrow \mathrm{Pic}^n(C)$, où $\mathrm{Pic}^n(C) \subseteq \mathrm{Pic}(C)$ est le sous-schéma des classes de diviseurs de degré n . Il s'agit d'un espace homogène principal de la variété abélienne $\mathrm{Jac}(C) = \mathrm{Pic}^0(C)$. Pour une classe de diviseurs $\alpha \in \mathrm{Pic}^n(C)$, la fibre $\mathrm{Sym}^n(C)_\alpha$ au-dessus de α peut être identifiée avec l'espace projectif $\mathbb{P}(L(\alpha))$, où $L(\alpha)$ est l'espace de Riemann-Roch de α . Étant donné un 0-cycle effectif adélique (z_v) de degré n sur X , orthogonal à $\mathrm{Br}(X)$, on peut utiliser les théorèmes de dualité arithmétique évoqués dans (2) ci-dessus, et démontrer que $\pi(z_n)$ est envoyé sur un point rationnel $\alpha \in \mathrm{Pic}^n(C)$. Soit $X_\alpha \subseteq \mathrm{Sym}^n(X)$ la fibre de l'application composée $\mathrm{Sym}^n(X) \rightarrow \mathrm{Sym}^n(C) \rightarrow \mathrm{Pic}^n(C)$ au-dessus de α . Alors X_α admet une fibration sur $\mathrm{Sym}(C)_\alpha \cong \mathbb{P}(L(\alpha))$ dont les fibres non scindées se trouvent au-dessus de hypersurfaces linéaires, et deviennent scindées sur des extensions finies de k . On peut donc essayer de traiter ce problème de fibration en utilisant la conjecture (F) pour $m = \dim(L(\alpha))$. Si m est suffisamment grand (ce qui arrive quand n est suffisamment grand) on aura une variété W qui satisfait la propriété d'approximation forte hors de n'importe quelle place, ce qui rend ce problème de fibration faisable.

2.4. La méthode des fibrations élargie et les surfaces de Kummer ([5])

La méthode des fibrations discutée ci-dessus est utile, pour la plupart, quand on considère des fibrations $X \rightarrow \mathbb{P}_k^1$ dont la fibre générique est rationnellement connexe. Notons que pour des fibres génériques plus générales on peut toujours utiliser la méthode pour essayer d'approcher un point adélique $(x_v) \in X(\mathbb{A}_k)$ par un point adélique $(x'_v) \in X_c(\mathbb{A}_k)$ qui se trouve dans une fibre rationnelle. Toutefois, quand la fibre générique est plus compliquée, on ne peut pas garantir, avec ces techniques, que (x'_v) soit orthogonal à $\mathrm{Br}(X_c)$.

Dans un article remarquable [SD95], Swinnerton-Dyer a réussi pour la première fois à obtenir des résultats (conditionnels) pour les points rationnels sur certaines surfaces de del Pezzo X de degré 4, en considérant une fibration $X \rightarrow \mathbb{P}_k^1$ dont la fibre générique est une courbe de genre 1 (et donc n'est pas, en particulier, rationnellement connexe). Ces idées ont été généralisées et établies comme une méthode pour des fibrations en courbes de genre 1 dans [CTSSD98b]. Des applications additionnelles ont suivi, y compris à des surfaces de del Pezzo de degré 4 plus générales ([BSD01],[CT01],[Wi07]), aux surfaces cubiques diagonales ([SD01]), aux surfaces quartiques diagonales ([SD00]), à des surfaces de Kummer ([SDS05]), et à des fibrations en courbes de genre 1 plus générales ([CT01],[Wi07]).

Dans les cas typiques, l'application de cette méthode, que nous appellerons ici la méthode des fibrations élargie, nécessite de supposer deux grandes conjectures : l'hypothèse de Schinzel mentionnée ci-dessus (sauf dans [SD01] et [SDS05]), et la conjecture de Tate-Shafarevich concernant la finitude du groupe de Tate-Shafarevich pour les courbes elliptiques (ou, dans certains cas, la version qui concerne les variétés abéliennes). Cette méthode est actuellement la seule méthode assez forte pour établir l'existence de points rationnels (même si souvent conditionnellement) pour des classes de variétés qui incluent des surfaces K3. En particulier, c'est la seule source qui indique si l'obstruction de Brauer-Manin est la seule pour ces surfaces.

Rappelons que quand on a un pinceau $Z \rightarrow \mathbb{P}_k^1$ de courbes de genre 1, on peut considérer le pinceau associé des Jacobiennes $E \rightarrow \mathbb{P}_k^1$, qui est une surface elliptique

avec une section. Pour presque tout $t \in \mathbb{P}_k^1$, la courbe Z_t est un espace principal homogène de E_t correspondant à une classe $\alpha_t \in H^1(k, E_t)$. Le but de la méthode est alors de trouver un $t \in \mathbb{P}_k^1(k)$ pour lequel $\alpha_t = 0$. Dans les applications à des surfaces de Kummer on a une situation un peu plus générale. Au lieu d'un pinceau de courbes elliptiques $E \rightarrow \mathbb{P}_k^1$ on a un pinceau de surfaces abéliennes $A \rightarrow \mathbb{P}_k^1$ (plus précisément, un pinceau de tordus quadratiques d'une surface abélienne fixe), et notre $Z \rightarrow \mathbb{P}_k^1$ va être un pinceau de toseurs sous A . On va donc utiliser la notation A au lieu de E , en rappelant, si nécessaire, que dans la plupart des applications A est une famille de variétés abéliennes de dimension 1.

En général, la méthode des fibrations élargie consiste en deux parties. Dans la première partie on utilise la méthode des fibrations ordinaire pour trouver un $t_0 \in \mathbb{P}_k^1(k)$ tel que la fibre Z_{t_0} a un point adélique. Notons que cette partie ne peut en général être accomplie que conditionnellement (en supposant, typiquement, l'hypothèse de Schinzel). Toutefois, dans certaines applications ([SD01], [SDS05]), le seul cas de l'hypothèse de Schinzel nécessaire est le cas connu d'un polynôme linéaire, incorporé dans le théorème de Dirichlet (alternativement, c'est le cas quand il n'y a que deux fibres non scindées, toutes les deux définies sur k , et on peut également invoquer le cas (2) du théorème 2.6). La deuxième partie consiste à remplacer t_0 par un point très proche t_1 , tel que Z_{t_1} a toujours un point adélique, et tel que, en outre, un certain sous-groupe pertinent de $\text{III}^1(A_{t_1})$ (qui contient α_{t_1}) s'annule. Cela implique que $\alpha_{t_1} = 0$ et alors $Y_{t_1}(k) \neq \emptyset$. Cette deuxième partie nécessite de supposer que $\text{III}^1(A_t)$ (ou bien un sous-groupe pertinent) est fini, et repose sur les propriétés de l'accouplement de Cassels-Tate. Elle nécessite également souvent une analyse délicate des groupes de Selmer de E_t , ce qui contrôle effectivement les sous-groupes pertinents de $\text{III}^1(A_t)$.

Nous allons maintenant porter notre attention sur le cas des surfaces de Kummer. Rappelons qu'une surface de Kummer X est une surface obtenue en prenant le quotient d'une surface abélienne A par l'action de $\{1, -1\}$, et en résolvant les points singuliers (qui correspondent aux points de 2-torsion $A[2]$) par un éclatement. Une telle X est un exemple de **surface K3**.

Par construction une telle surface contient des points rationnels qui se trouvent sur la courbe exceptionnelle au-dessus de $0 \in A[2]$. Toutefois, on peut également considérer un cas « tordu », dans lequel on ne prend pas une surface abélienne A , mais un **torseur** Y sous A , correspondant à une classe $\alpha \in H^1(k, A)$ d'ordre 2. Dans ce cas-là, l'action de $\{1, -1\}$ sur A induit une action naturelle sur Y , et on peut prendre le quotient $Y/\{1, -1\}$ et résoudre les points singuliers comme ci-dessus. On peut appeler une surface X obtenue de cette façon une surface de Kummer **tordue**.

La première application de la méthode des fibrations élargie aux surfaces de Kummer se trouve dans l'article [SDS05]. Dans cet article Swinnerton-Dyer et Skorobogatov considèrent des surfaces de Kummer tordues associées à des surfaces abéliennes de la forme $A = E_0 \times E_1$ où E_0 et E_1 sont des courbes elliptiques. Le toseur Y est alors obtenu comme un produit $Y = D_0 \times D_1$, où D_i est un toseur sous E_i correspondant à une classe $\alpha_i \in H^1(k, E_i)$ d'ordre 2. On peut décrire D_i explicitement comme une courbe (hyper)elliptique de la forme

$$y^2 = g_i(x)$$

où g_i est un polynôme de degré 4. La surface de Kummer tordue X associée à ces torseurs est alors un modèle propre et lisse de la surface affine

$$(7) \quad y^2 = g_1(x)g_2(z).$$

Trois types de conditions sur X apparaissent dans [SDS05].

- (1) Les courbes elliptiques E_0 et E_1 ont tous leur 2-torsion définie sur le corps de base k . De manière équivalente, l'extension L_i/k qui scinde g_i est au pire biquadratique.
- (2) Une certaine condition appelée la condition (E) dans loc.cit., qui concerne les groupes de 2-Selmer de E_0 et E_1 . Cette condition implique, en particulier, que l'obstruction de Brauer-Manin algébrique s'évanouisse.
- (3) Une condition qui affirme l'existence, pour chaque $i \in \{0, 1\}$, de places multiplicatives appropriées v_i, w_i de E_i , en lesquels E_{1-i} a bonne réduction et α_0, α_1 sont non ramifiés. Cette condition, appelée la condition (Z_i) , implique, en particulier, que l'obstruction de Brauer-Manin associée à des éléments de Brauer transcendants d'ordre 2 s'évanouisse.

Le résultat principal de [SDS05] est le suivant :

THÉORÈME 2.11 ([SDS05]). *Supposons que (7) est localement soluble et que les conditions (1)-(3) ci-dessus valent. Si tous les groupes de Tate-Shafarevich pertinents sont finis alors (7) est soluble dans k .*

La variante de la méthode des fibrations élargie employée dans [SDS05] utilise, comme d'applications antérieures de cette méthode, une construction algébrique linéaire plutôt compliquée visant à représenter le groupe de Selmer comme le noyau d'une forme symétrique bilinéaire. La difficulté d'exploiter ce dispositif rend l'application de cette méthode une tâche délicate.

Dans l'article [5] on considère aussi le problème de l'existence de points rationnels sur les surfaces de Kummer tordues. Comme dans [SDS05] on utilise une variante de la méthode des fibrations élargie, sans toutefois utiliser l'approche algébrique linéaire mentionnée ci-dessus. Au lieu de cela, on utilise une approche inspirée des travaux de Mazur et Rubin ([MR07],[MR10]) sur la variation des groupes de Selmer dans les familles de twists quadratiques. Cela rend notre méthode plus souple, et nous permet même de nous occuper de généralisations de dimension plus grande, connues sur le nom de **variétés de Kummer**. Notons toutefois que les familles de surfaces de Kummer couvertes par notre méthode ne contiennent pas les cas considérés dans [SDS05], et en conséquent les résultats de [5] ne sont pas des généralisations directes de ceux de [SDS05].

Le résultat principal de l'article [5] est le suivant :

THÉORÈME 2.12. *Pour $i = 1, \dots, r$ soit $f_i \in k[t]$ un polynôme de degré impair n_i tel que le groupe de Galois de f_i est le groupe symétrique S_{n_i} . Supposons qu'il existe des places $w_i \in \Omega_k$ telles que pour tout $i, j = 1, \dots, n$ on a que f_i est w_j -intègre et $\text{val}_{w_i}(\text{disc}(f_j)) = \delta_{i,j}$. Soit A_i la variété Jacobienne de la courbe hyperelliptique $y^2 = f_i(x)$ et supposons que le groupe de Tate-Shafarevich de tout twist quadratique de A_i soit fini. Soit $A = \prod_i A_i$ et $\alpha \in H^1(k, A)$ un élément d'ordre 2 qui est non ramifié en w_1, \dots, w_n . Si la variété de Kummer tordue $X = \text{Kum}^\alpha(A)$ a un point adélique, alors elle a un point rationnel.*

Les cas où X ci-dessus est une surface sont les suivants :

- (1) Le cas où $n = 2$ et f_1, f_2 sont de degré 3. Dans ce cas-là A_1 et A_2 sont des courbes elliptiques et X est un modèle propre et lisse de (7), où g_1, g_2 sont des polynômes dont le groupe de Galois est S_4 et dont les résultants cubiques sont f_1 et f_2 respectivement. Le théorème 2.12 dit que s'il existe des places w_1, w_2 tel que g_i est w_j -intègre et $\text{val}_{w_i}(\text{disc}(g_j)) = \delta_{i,j}$ pour $i, j = 1, 2$, alors (7) satisfait le principe de Hasse.
- (2) Le cas où $n = 1$ et $f = f_1$ est de degré 5. Maintenant A est une surface abélienne simple et X admet une description explicite en termes d'intersection complète lisse de trois quadriques dans \mathbb{P}^5 . On remarque que dans ce cas-là l'existence d'une place w tel que f est w -intègre et $\text{val}_w(\text{disc}(f)) = 1$ implique que le groupe de Galois de f_i est S_5 aussitôt que f est irréductible.

Nous allons maintenant décrire brièvement les idées principales contenues dans la preuve du théorème 2.12. Pour simplifier, nous allons considérer le cas dans lequel $n = 1$ et f est un polynôme de degré 5. Supposons que notre surface de Kummer tordue est $X = \text{Kum}^\alpha(A) = \text{Kum}(Y)$, où Y est le torseur sous A classifié par $\alpha \in H^1(k, A)$. Comme α est de l'ordre 2 il vient d'une classe $H^1(k, A[2])$ qu'on va noter également α . Ici, $A[2]$ note le module de Galois des points de 2-torsion de $A(\bar{k})$. On peut alors voir que $X(k) \neq \emptyset$ si et seulement si il existe un $c \in k^*$ tel que $\alpha \in H^1(k, A[2])$ est envoyé sur 0 par l'application

$$H^1(k, A[2]) = H^1(k, A^c[2]) \longrightarrow H^1(k, A^c).$$

Ici, on a noté A^c le twist quadratique de A par la classe $[c] \in H^1(k, \mu_2)$. En effet, $X = \text{Kum}(Y^c)$ pour tout $c \in k^*$. D'autre part, chaque $P \in X(k)$ vient d'un point rationnel de Y^c pour un $c \in k^*$ approprié (qui dépend de P).

LEMME 2.13. *Soit S un ensemble fini assez grand de places de k . Alors il existe un $c \in k^*$ tel que c est un carré dans k_w pour chaque $w \in S$ et tel que*

$$\alpha \in \text{Sel}_2(A^c) \stackrel{\text{def}}{=} \cap_v \text{Ker}[H^1(k, A[2]) \longrightarrow H^1(k_v, A^c)]$$

Le lemme 2.13 est essentiellement une instance de la méthode des fibrations, appliquée à une fibration $\mathcal{Y} \longrightarrow \mathbb{P}_k^1$ dont les fibres sont les twists quadratiques de Y . Les fibres non scindées de cette fibration ne se trouvent qu'au-dessus de 0 et ∞ , et on peut donc utiliser le cas connu de l'hypothèse de Schinzel, c'est-à-dire le théorème de Dirichlet.

En remplaçant A par A^c on peut supposer sans perte de généralité que $\alpha \in \text{Sel}_2(A)$. Soit S un ensemble fini assez grand de places de k qui contient, en particulier, toutes les places archimèdes, toutes les places au-dessus de 2, et toutes les places de mauvaise réduction de A, Y ou X . Soit $K = k(A[2])$ le corps minimal qui scinde $A[2]$ et soit $G = \text{Gal}(K/k) = S_5$ le groupe de Galois correspondant. Pour une place v de k on va noter

$$\text{loc}_v : H^1(k, A[2]) \longrightarrow H^1(k_v, A[2])$$

l'application de localisation. Notons que si k_v^{un} est l'extension maximale non ramifiée de k_v , et A a bonne réduction en v , alors la cohomologie non ramifiée $H^1(k_v^{\text{un}}, A[2])$ est canoniquement isomorphe au quotient $A[2]/(1 - \text{Fr}_v(K))$, où $\text{Fr}_v(K) \in G$ est l'élément de Frobenius de v . Rappelons que on suppose l'existence d'une place w telle que f est w -intègre et $\text{val}_w(\text{disc}(f)) = 1$.

LEMME 2.14. *Soit $g \in S_5$ un élément tel que le quotient $A[2]/(1-g)$ est non nul et soit $S' = S \setminus \{w\}$. Soit $\beta \neq \alpha \in \text{Sel}_2(A)$ un élément non nul. Alors il existe un $q \in k^*$ tel que $\mathfrak{q} = (q)$ est un idéal premier de k avec les propriétés suivantes :*

- (1) *Toute place de S' scinde dans $F = k(\sqrt{q})$.*
- (2) *A a bonne réduction en \mathfrak{q} .*
- (3) *L'élément de Frobenius $\text{Fr}_{\mathfrak{q}}(K)$ agit sur $A[2]$ comme g .*
- (4) *$\text{loc}_{\mathfrak{q}}(\alpha) = 0$ mais $\text{loc}_{\mathfrak{q}}(\beta) \neq 0$.*

DÉMONSTRATION. Soit K_{α}/K la plus petite extension telle que α s'annule dans $H^1(K_{\alpha}, A[2])$, et soit K_{β}/K l'extension analogue par rapport à β . Soit $K_{\alpha, \beta} = K_{\alpha}K_{\beta}$ et $G_{\alpha, \beta} = \text{Gal}(K_{\alpha, \beta}/K)$. En utilisant l'argument de restriction-inflation on peut voir que les classes α et β appartiennent à $H^1(G_{\alpha, \beta}, A[2]) \subseteq H^1(K, A[2])$. En analysant l'extension K_{α} et K_{β} , on peut vérifier que $K_{\alpha} \cap K_{\beta} = K$ et $G_{\alpha, \beta} \cong A[2]^2 \rtimes G$. On peut alors relever $g \in G$ à un élément $g_{\alpha, \beta} \in G_{\alpha, \beta}$ tel que l'image de α et β dans $H^1(\langle g_{\alpha, \beta} \rangle, A[2]) \cong A[2]/(1-g)$ soit nulle et non nulle respectivement.

Invoquant le théorème de densité de Chabotarev on peut trouver un idéal premier \mathfrak{q} tel que l'élément de Frobenius $\text{Fr}_{\mathfrak{q}}(K_{\alpha, \beta}) \in G_{\alpha, \beta}$ est $g_{\alpha, \beta}$. De plus, on peut montrer que l'abélianisation de $K_{\alpha, \beta}$ est purement ramifiée en w , ce qui nous permet de choisir \mathfrak{q} principal, c'est-à-dire $\mathfrak{q} = (q)$ pour un élément premier $q \in k$. Soit v une place de K au-dessus de \mathfrak{q} et w une place de $K_{\alpha, \beta}$ au-dessus de v . Comme $K_{\alpha, \beta}$ est non ramifiée en \mathfrak{q} et $\text{Fr}_{\mathfrak{q}}(K_{\alpha, \beta}) = g_{\alpha, \beta}$, il s'ensuit que $\text{Gal}(K_v/k_{\mathfrak{q}}) = \langle g \rangle \subseteq G$ et $\text{Gal}((K_{\alpha, \beta})_w/k_{\mathfrak{q}}) = \langle g_{\alpha, \beta} \rangle \subseteq G_{\alpha, \beta}$. On a donc que

$$\text{loc}_{\mathfrak{q}}(\alpha), \text{loc}_{\mathfrak{q}}(\beta) \in H^1(\langle g_{\alpha, \beta} \rangle, A[2]) \subseteq H^1(k_{\mathfrak{q}}, A[2])$$

et alors $\text{loc}_{\mathfrak{q}}(\alpha) = 0$ et $\text{loc}_{\mathfrak{q}}(\beta) \neq 0$ par notre choix de $g_{\alpha, \beta}$. \square

Soit $g = (1\ 2\ 3\ 4) \in G = S_5$ un cycle de longueur 4. En analysant l'action de S_5 sur $A[2]$, on peut vérifier que $A[2]/(1-g) \cong \mathbb{Z}/2$.

PROPOSITION 2.15. *Soit $\beta \in \text{Sel}_2(A)$, $\beta \neq 0$, α et soit $\mathfrak{q} = (q)$ un idéal premier satisfaisant les conditions du lemme 2.14 par rapport à $g = (1\ 2\ \dots\ 4)$. Alors*

$$\text{Sel}_2(A^{\mathfrak{q}}) \subseteq \text{Sel}_2(A)$$

et

$$\alpha \in \text{Sel}_2(A^{\mathfrak{q}}), \beta \notin \text{Sel}_2(A^{\mathfrak{q}})$$

DÉMONSTRATION. Soit $F = k(\sqrt{q})$. Si $v \in S' = S \setminus \{w\}$ alors v est scindé dans F . Dans ce cas, on a $A^{\mathfrak{q}} \times_k k_v \cong A \times_k k_v$ et alors les conditions locales qui déterminent le groupe de Selmer sont les mêmes en v pour A et $A^{\mathfrak{q}}$. Cela vaut aussi pour tout v où A et $A^{\mathfrak{q}}$ ont bonne réduction, ainsi que pour w . Cela implique déjà que $\alpha \in \text{Sel}_2(A^{\mathfrak{q}})$. D'autre part, un calcul local montre que les conditions locales de Selmer de A et $A^{\mathfrak{q}}$ ont une intersection triviale en \mathfrak{q} (voir, e.g., [5, Lemma 4.3]), impliquant que $\beta \notin \text{Sel}_2(A^{\mathfrak{q}})$.

Pour finir la preuve il faut montrer que $\text{Sel}_2(A^{\mathfrak{q}}) \subseteq \text{Sel}_2(A)$. Soit $\gamma \in \text{Sel}_2(A^{\mathfrak{q}})$ un élément. La théorie de la réciprocité globale implique que

$$\sum_v \text{inv}_v(\beta \cup \gamma) = 0.$$

Pour $v \neq \mathfrak{q}$ les conditions locales de Selmer de A et $A^{\mathfrak{q}}$ sont les mêmes. La théorie de la dualité locale pour A implique alors que $\text{inv}_v(\beta \cup \gamma) = 0$. Par réciprocité arithmétique on peut en déduire que $\text{inv}_{\mathfrak{q}}(\beta \cup \gamma) = 0$. Comme $A[2]/(1 - \text{Fr}_{\mathfrak{q}}(K)) =$

$A[2]/(1-g) \cong \mathbb{Z}/2$ il s'ensuit que $\text{loc}_q(\beta)$ engendre $H_{\text{nr}}^1(k_v, A[2])$. La condition $\text{inv}_q(\beta \cup \gamma) = 0$ et la dualité locale implique maintenant que $\text{loc}_q(\gamma) \in H_{\text{nr}}^1(k_v, A[2])$ et par conséquent que $\gamma \in \text{Sel}_2(A)$. \square

Finalemnt, on peut finir la preuve du théorème 2.10. En appliquant la proposition 2.15 un nombre suffisant de fois on peut trouver un $c \in k^*$ tel que $\text{Sel}_2(A^c) \cong \mathbb{Z}/2$. Comme A est la Jacobienne d'une courbe hyperelliptique avec un point de Weierstrass rationnel, l'accouplement de Cassels-Tate sur $\text{III}^1(A)$ est alterné (voir [PS99],[PR11]). Comme on a supposé que $\text{III}^1(A)$ est fini on peut en déduire que la dimension de $\text{III}^1(A)[2]$ sur \mathbb{F}_2 est pair. Comme $\text{III}^1(A)[2]$ est un quotient de $\text{Sel}_2(A^c) \cong \mathbb{Z}/2$, il s'ensuit que $\text{III}^1(A)[2] = 0$. Cela implique que l'image de α dans $H^1(k, A^c)$ est nulle, et alors $Y^c(k) \neq \emptyset$ et par conséquent $X(k) \neq \emptyset$.

Surfaces de type log K3 et points entiers

3.1. Contexte

Une généralisation naturelle de l'étude des points rationnels sur les variétés lisses et propres est l'étude des points entiers sur les schémas lisses mais pas nécessairement propres. Soit k un corps de nombres, S un ensemble fini de places de k , et \mathcal{O}_S l'anneau des S -entiers de k . Étant donné un \mathcal{O}_S -schéma \mathcal{X} , on voudrait comprendre l'ensemble $\mathcal{X}(\mathcal{O}_S)$ des points S -entiers de \mathcal{X} .

Soit $X = \mathcal{X} \otimes_{\mathcal{O}_S} k$ le changement de base à k . On peut considérer l'espace des points adéliques S -entiers

$$\mathcal{X}(\mathbb{A}_{k,S}) \stackrel{\text{def}}{=} \prod_{v \in S} X(k_v) \times \prod_{v \notin S} \mathcal{X}(\mathcal{O}_v).$$

L'analogie S -entier de l'obstruction de Brauer-Manin a été introduit dans [CTX09] en considérant l'ensemble

$$\mathcal{X}(\mathbb{A}_{k,S})^{\text{Br}(X)} \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{X}(\mathbb{A}_{k,S}) \cap X(\mathbb{A}_k)^{\text{Br}}$$

obtenu en recoupant l'ensemble des points adéliques S -entiers avec l'ensemble de Brauer de X . Quand $\mathcal{X}(\mathbb{A}_{k,S})^{\text{Br}(X)} = \emptyset$ on dit qu'il y a une obstruction de Brauer-Manin à l'existence de points S -entiers. Comme dans le cas des points rationnels, on peut raffiner l'obstruction quand X n'est pas simplement connexe (cela a été observé pour la première fois dans [CTW12]). On va maintenant fixer l'hypothèse que X est simplement connexe.

Si \mathcal{X} est projectif alors l'ensemble $\mathcal{X}(\mathcal{O}_S)$ des points S -entiers coïncide avec l'ensemble $X(k)$ des points rationnels de X . Comme discuté dans §1.1, dans ce cas-là, la géométrie de $X_{\bar{k}} = X \otimes_k \bar{k}$ influence fortement l'arithmétique. Quand \mathcal{X} n'est pas projectif la situation devient plus subtile. Dans ce cas-là c'est souvent utile de choisir une compactification lisse $\iota : X \hookrightarrow \bar{X}$ telle que le complément $D = \bar{X} \setminus X$ est (géométriquement) un diviseur à croisements normaux simples. En ayant le couple (\bar{X}, D) , on peut accéder à plusieurs propriétés qui jouent un rôle dans le comportement des points entiers. Premièrement, on peut étudier (\bar{X}, D) dans le cadre de la **log géométrie**. Cela nous donne des analogues pour les classes de types géométriques examinés dans 1.1, à savoir les variétés log rationnellement connexes (voir [Zh14]), les variétés de log type général, et les variétés log Calabi-Yau.

Une deuxième type d'information pertinente est la configuration des points locaux sur D pour $v \in S$. Par exemple, si $D(k_v) = \emptyset$ pour toutes les $v \in S$, il s'ensuit que $\mathcal{X}(\mathbb{A}_{k,S})$ est compact. Si, en plus, \mathcal{X} est affine, alors $\mathcal{X}(\mathcal{O}_S)$ est fini, peu importe que la géométrie soit favorable ou non. Cela est le cas, par exemple, pour la surface affine sur \mathbb{Z} donnée par

$$(8) \quad 2x^2 + 3y^2 + 4z^2 = 1,$$

voir [CTW12, Exemple 5.9]. Pour cette surface Colliot-Thélène et Wittenberg montrent que l'obstruction de Brauer-Manin est triviale, mais les points entiers clairement n'existent pas. Remarquons que (8) est une surface log rationnellement connexe et simplement connexe, alors la géométrie ne pourrait pas être plus favorable. En général, on peut dire que le comportement des points S -entiers sur un schéma X comme ci-dessus peut dépendre subtilement de la configuration exacte des points S -locaux sur D .

3.2. Surfaces log K3 de nombre de Picard 0 ([6])

Motivé par les questions des points entiers, l'article [6] est consacré à l'étude des surfaces du type suivant :

DÉFINITION 3.1. Soit X une surface lisse et géométriquement intègre sur k . Une **structure log K3** sur X est une compactification lisse $(\overline{X}, D, \iota : X \hookrightarrow \overline{X})$ telle que $D = \overline{X} \setminus \iota(X)$ est (géométriquement) un diviseur à croisements normaux simples et $K_{\overline{X}} + [D] = 0$. Une **surface log K3** est une surface lisse, géométriquement intègre et simplement connexe, munie d'une structure log K3.

Soit X une surface log K3. Comme $X_{\overline{k}}$ est simplement connexe, il s'ensuit que $\overline{k}^*[X] = \overline{k}^*$ et $\text{Pic}(X_{\overline{k}})$ est sans torsion, donc isomorphe à \mathbb{Z}^r pour quelque $r \in \mathbb{N}$. On appelle r le **nombre de Picard géométrique** de X . Si (\overline{X}, D, ι) est une structure log K3 sur X , alors il existe une suite exacte

$$(9) \quad 0 \longrightarrow \mathbb{Z}|D| \longrightarrow \text{Pic}(\overline{X}_{\overline{k}}) \longrightarrow \text{Pic}(X_{\overline{k}}) \longrightarrow 0$$

où $\mathbb{Z}|D|$ désigne le groupe abélien libre engendré par les composantes irréductibles de $D_{\overline{k}} = D \otimes_k \overline{k}$. En particulier, le nombre de Picard géométrique de X est égal à $\text{rang}(\text{Pic}(\overline{X}_{\overline{k}})) - \#|D|$, où $\#|D|$ désigne le nombre de composantes irréductibles de $D_{\overline{k}}$. On peut démontrer que si (\overline{X}, D, ι) est une structure log K3 sur X , alors soit $D = \emptyset$ et $X = \overline{X}$ est une surface K3 propre, soit $D \neq \emptyset$ et $\overline{X}_{\overline{k}}$ est une surface rationnelle. De plus, si D n'est pas vide alors soit D est une courbe lisse, propre et géométriquement irréductible de genre 1, soit D est un lacet de courbes propres et lisses de genre 0. Ce dernier type de surfaces a été étudié profondément par Looijenga dans son article fondateur [Lo81].

DÉFINITION 3.2. Soit X une surface log K3. On dit que X est **ample** s'il admet une structure log K3 telle que \overline{X} est une surface de del Pezzo, c'est-à-dire, si $-K_{\overline{X}} \in \text{Pic}(\overline{X}_{\overline{k}})$ est ample.

La première contribution de l'article [6] consiste à un résultat de classification des surfaces log K3 amples dont le nombre de Picard géométrique est 0. La première étape dans cette direction est la suivante :

PROPOSITION 3.3 ([6]). *Soit k un corps de caractéristique 0 et soit X une surface log K3 ample dont le nombre de Picard géométrique est 0. Alors X admet une structure log K3 (\overline{X}, D, ι) telle que \overline{X} est une surface de del Pezzo de degré 5 et $D_{\overline{k}}$ est un lacet de cinq courbes de genre 0.*

Commentons la preuve de la proposition 3.3. En inspectant les possibilités pour la suite exacte (9) sur notre hypothèses on peut voir que si (\overline{X}, D, ι) est une structure log K3 sur une surface X pour laquelle $\text{Pic}(X_{\overline{k}}) = 0$, alors $D_{\overline{k}}$ a nécessairement au moins deux composantes, et donc D est un lacet de courbes

de genre 0. Si D_1, \dots, D_n sont les composantes irréductibles de $D_{\bar{k}}$ (dans leur ordre cyclique), on va noter $a_i = [D_i] \cdot [D_i]$ le nombre d'intersections de D_i avec lui-même. On va appeler (a_1, \dots, a_n) la **séquence d'intersection** de D .

En général X peut admettre plusieurs structures log K3. Par exemple, si P est un point d'intersection de D défini sur k , on peut éclater P , puis ajouter la courbe exceptionnelle qui en résulte à D . Si on a commencé avec une séquence d'intersection (a_1, \dots, a_n) et $\{P\} = D_i \cap D_{i+1}$ alors on va obtenir une nouvelle structure log K3 avec une séquence d'intersection $(a_1, \dots, a_i - 1, -1, a_{i+1} - 1, \dots, a_n)$. D'après [Fr15] on va appeler cette opération un **éclatement de coin**. D'autre part, si $a_i = -1$ pour une composante irréductible D_i défini sur k , alors on peut contracter cette composante et obtenir une nouvelle structure log K3 avec une séquence d'intersection $(a_1, \dots, a_{i-1} + 1, a_{i+1} + 1, \dots, a_n)$. De façon similaire on va appeler cette opération une **contraction de coin**.

LEMME 3.4 ([6]). *Soit k un corps de caractéristique 0 et soit X une surface log K3. Alors toute pair des structures log K3 peut-être connecté en une suite d'éclatements de coin et contractions de coin. En particulier, si X admet une structure log K3 (\bar{X}, D, ι) dans laquelle D est vide ou une courbe lisse de genre 1, alors cette structure log K3 est unique.*

Le lemme 3.4 réduit les problèmes du type appartenant dans la proposition 3.3 à des questions combinatoires concernant les séquences d'intersection. En utilisant la formule d'adjonction on peut facilement établir la formule

$$\sum_i a_i = 3d + 2r - 20$$

où $d = [D] \cdot [D]$ est le degré de $[D] = -K_{\bar{X}}$ et r est le nombre de Picard géométrique de X . De plus, quand on considère une structure log K3 (\bar{X}, D, ι) avec \bar{X} une surface de del Pezzo on sait également que $a_i \geq -1$ pour chaque i . Ça nous donne assez de rigidité pour prouver que quand on commence avec n'importe quelle structure log K3 (\bar{X}, D, ι) sur X tel que \bar{X} est une surface de del Pezzo et X a un nombre de Picard 0, alors on peut toujours trouver un système d'éclatements de coin et de contractions de coin pour arriver à une structure log K3 avec une séquence d'intersection $(-1, -1, -1, -1, -1)$, signifiant, en particulier, que \bar{X} est une surface de del Pezzo de degré 5, et que D est un lacet de cinq (-1) -courbes.

Étant donnée une structure log K3 (\bar{X}, D, ι) telle que D est un lacet de cinq (-1) -courbes, on peut considérer l'action du groupe de Galois sur le graphe dual de D , c'est-à-dire, le graphe dont les nœuds sont les composantes irréductibles de $D_{\bar{k}}$ et dont les arêtes sont les points d'intersection. En identifiant le groupe d'automorphismes d'un lacet de longueur cinq avec le groupe diédral \mathbb{D}_5 d'ordre 10, on obtient un invariant $\alpha_X \in H^1(k, \mathbb{D}_5)$. On utilisant le lemme 3.4, on peut démontrer que α_X ne dépend que de X . On peut maintenant décrire le théorème de classification obtenu dans [6] :

THÉORÈME 3.5 ([6]). *Soit k un corps de caractéristique 0. L'association $X \mapsto \alpha_X$ détermine une bijection entre l'ensemble des classes d'isomorphisme de surfaces log K3 amples sur k de nombre de Picard géométrique 0 et l'ensemble de cohomologie Galoisienne $H^1(k, \mathbb{D}_5)$.*

Quand l'invariant $\alpha_X \in H^1(k, \mathbb{D}_5)$ est suffisamment simple on peut décrire la surface log K3 associée explicitement :

EXEMPLES 3.6. Si $\alpha_X = 0$ alors X est isomorphe sur k à la surface affine cubique

$$(10) \quad (xy - 1)t = x - 1.$$

Si α_X est l'image d'une classe $[a] \in H^1(k, \mathbb{Z}/2)$ par l'application induite par une inclusion $\mathbb{Z}/2 \subseteq \mathbb{D}_5$, alors X est isomorphe sur k à la surface affine

$$(11) \quad (x^2 - ay^2)t = y - 1.$$

On peut tirer partie des équations explicites ci-dessus pour étudier les points entiers. Dans l'article [6], le premier résultat dans cette direction est le suivant :

PROPOSITION 3.7. *Soit \mathcal{X} un schéma sur \mathbb{Z} tel que $\mathcal{X} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ est \mathbb{Q} -isomorphe à la surface log K3 donnée par (10). Alors $\mathcal{X}(\mathbb{Z})$ n'est pas Zariski-dense.*

La preuve de la proposition 3.7 consiste à trouver un constant C tel que chaque solution (x, y, t) de (10) dans \mathbb{R}^3 , et donc en particulier un (x, y, t) qui vient de $\mathcal{X}(\mathbb{Z})$, satisfasse $\min(|x|, |y|, |t|) \leq C$. En procédant ainsi, on peut directement trouver une collection finie de courbes sur \mathcal{X} qui doit contenir tous les points entiers.

En considérant maintenant la surface (11), le comportement des points entiers dépend de la question si $a < 0$ ou $a > 0$. Si $a < 0$ on peut utiliser un argument similaire à celui mentionné plus haut pour démontrer que les points entiers ne sont pas Zariski-denses (pour n'importe quel modèle de (11) sur \mathbb{Z}). Par contre, si $a > 0$ on peut trouver des exemples pour lesquels l'ensemble des points entiers est effectivement Zariski-dense, ce qui on va décrire maintenant.

Il est conjecturé que si K/\mathbb{Q} est une extension quadratique réelle, alors il existe un nombre infini d'idéaux premiers $\mathfrak{p} \subseteq \mathcal{O}_K$ de degré 1 sur \mathbb{Q} tel que l'application de réduction $\mathcal{O}_K^* \rightarrow (\mathcal{O}_K/\mathfrak{p})^*$ est surjective. Le théorème I de [Na88] affirme que cette conjecture vaut pour toutes les extensions quadratiques réelles K/\mathbb{Q} sauf au plus deux extensions (non spécifiées). En particulier, il s'ensuit qu'il existe une extension quadratique réelle $K = \mathbb{Q}(a)$ satisfaisant la conjecture et telle que

- (1) K a un groupe de classes trivial.
- (2) Le premier $2 \in \mathbb{Q}$ est ramifié dans K .

On peut en outre supposer que a est entier et sans facteur carré, et considérer la surface \mathcal{X} sur \mathbb{Z} donnée par (11).

PROPOSITION 3.8. *L'ensemble des points entiers $\mathcal{X}(\mathbb{Z})$ est Zariski-dense.*

La preuve de la proposition 3.8 consiste à considérer les idéaux premiers $\mathfrak{p} \subseteq \mathcal{O}_K$ pour lesquels l'application de réduction $\rho_{\mathfrak{p}} : \mathcal{O}_K^* \rightarrow (\mathcal{O}_K/\mathfrak{p})^*$ est surjective. Comme le groupe de classes de K est trivial on peut écrire $\mathfrak{p} = (\pi)$ pour un élément premier π et mettre $p = N_{K/\mathbb{Q}}(\pi)$. En utilisant la surjectivité de $\rho_{\mathfrak{p}}$ et la condition (2) ci-dessus on peut construire un point entier de \mathcal{X} qui se trouve sur la courbe $\mathcal{C}_p \subseteq \mathcal{X}$ déterminée par l'équation additionnelle $x^2 - ay^2 = \pm p$. En multipliant par des unités dont l'image dans $\mathcal{O}_K/\mathfrak{p}$ est 1 on peut produire un nombre infini de points entiers sur \mathcal{C}_p . En faisant cela pour un nombre infini de p , on peut en déduire que $\mathcal{X}(\mathbb{Z})$ est Zariski-dense.

La dernière contribution de l'article [6] consiste à construire un exemple d'une surface log K3 pour laquelle l'obstruction de Brauer-Manin entière n'explique pas l'échec du principe de Hasse. Notre exemple \mathcal{X} est donné par l'équation

$$((11x + 5)y + 3)t = 3x + 1.$$

Notons que $X = \mathcal{X} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ est isomorphe à (10). En particulier, on a $\text{Pic}(X_{\overline{\mathbb{Q}}}) = 0$.

PROPOSITION 3.9. *Soit $S = \{\infty\} \subseteq \Omega_{\mathbb{Q}}$. Alors $\mathcal{X}(\mathbb{A}_{\mathbb{Q},S})^{\text{Br}(X)} \neq \emptyset$ mais $\mathcal{X}(\mathbb{Z}) = \emptyset$.*

On remarque que l'exemple donné par la proposition 3.9 est le premier exemple d'une variété lisse, simplement connexe X , tel que $X(\mathbb{R})$ n'est pas compact et pour laquelle l'obstruction de Brauer-Manin entière n'explique pas l'échec du principe de Hasse entier.

3.3. La méthode des fibrations élargie pour les points entiers ([7])

L'objectif principal de l'article [7], en commun avec A. Skorobogatov, est de construire une adaptation de la méthode des fibrations élargie présentée ci-dessus dans le domaine des points entiers. Rappelons (voir §2.4) que le but de cette méthode est de démontrer l'existence de points rationnels sur un pinceau de toreseurs $Z \rightarrow \mathbb{P}^1$ sous un pinceau des variétés abéliennes $A \rightarrow \mathbb{P}^1$. Dans notre adaptation, on va remplacer ces pinceaux par un pinceau de tores algébriques $T \rightarrow \mathbb{P}_k^1$ et un pinceau de toreseurs $Y \rightarrow \mathbb{P}_k^1$ sous T . Plus précisément, nous nous concentrerons sur le cas où T est un pinceau de tores algébriques de dimension 1 qui devient scindé sur une extension quadratique de $k(\mathbb{P}_k^1)$.

Disons quelques mots du type de résultats que l'on peut attendre avec une telle adaptation. Considérons le fibré vectoriel

$$E = \mathcal{O}(-n) \oplus \mathcal{O}(-m) \oplus \mathcal{O}(0) \rightarrow \mathbb{P}_k^1$$

et soit $X \subseteq \mathbb{P}(E) \rightarrow \mathbb{P}_k^1$ le pinceau de coniques donné par

$$(12) \quad f(t, s)x^2 + g(t, s)y^2 = z^2$$

où $f(t, s), g(t, s) \in k[t, s]$ sont des polynômes homogènes séparables de degrés $2n$ et $2m$ respectivement, sans zéros en commun. Soit $D \subseteq X$ le diviseur déterminé par $z = 0$ et soit $Y = X \setminus D$. On peut également considérer Y comme la sous-variété relativement affine $Y \subseteq \mathcal{O}(-n) \oplus \mathcal{O}(-m) \rightarrow \mathbb{P}_k^1$ donnée par l'équation

$$(13) \quad f(t, s)x^2 + g(t, s)y^2 = 1.$$

L'application naturelle $Y \rightarrow \mathbb{P}_k^1$ présente Y comme un pinceau de coniques affines. De plus, ce pinceau admet une structure naturelle d'un toreur sous le pinceau de tores algébriques $T \rightarrow \mathbb{P}_k^1$ donné par

$$(14) \quad x^2 + f(t, s)g(t, s)y^2 = 1,$$

ce qui forme un modèle sur \mathbb{P}_k^1 pour le tore de norme 1 associé à l'extension quadratique $k(\mathbb{P}_k^1)(\sqrt{-fg})$.

Soit S un ensemble fini de places de k tel que $f, g \in \mathcal{O}_S[t, s]$. L'équation (13) détermine alors des modèles S -entiers naturels \mathcal{T} et \mathcal{Y} de T et Y respectivement. En utilisant notre adaptation de la méthode des fibrations élargie on peut essayer d'établir des conditions suffisantes pour l'existence des points entiers sur \mathcal{Y} , en profitant de la structure de pinceau $\mathcal{Y} \rightarrow \mathbb{P}_S^1$.

Pour décrire un résultat précis, supposons que $k = \mathbb{Q}$, que $n = m = 1$, et que f, g se scindent comme produit de termes linéaires sur \mathcal{O}_S . Dans ce cas-là on peut écrire $f(t, s) = a(c_1t + d_1s)(c_2t + d_2s)$ et $g(t, s) = b(c_3t + d_3s)(c_4t + d_4s)$ où $c_i, d_i \in \mathbb{Z}_S$ sont des paires de nombres S -entiers premiers entre eux et $a, b \in \mathbb{Z}_S$. Pour $i \neq j \in \{1, \dots, 4\}$ soit $\Delta_{i,j} = c_jd_i - c_id_j$ les résultants correspondants et supposons que $\Delta_{i,j} \neq 0$. Un des théorèmes principaux de l'article [7] est le suivant :

THÉORÈME 3.10 ([7]). *Soit S_0 un ensemble fini de places de \mathbb{Q} contenant $2, \infty$. Soit $f, g \in \mathbb{Z}_{S_0}[t, s]$ des polynômes homogènes de degré 2 qui se scindent comme des produits de termes linéaires sur \mathcal{O}_S et soit a, b et $\Delta_{i,j} \neq 0$ défini comme ci-dessus. Supposons que a, b sont sans facteur carré (hors S_0), qu'ils ne sont pas divisibles par 3 ou 5 (si ces derniers ne se trouvent pas dans S_0), et que les classes des éléments $\{-1, a, b\} \cup \{\Delta_{i,j}\}_{i>j}$ sont linéairement indépendantes dans $\mathbb{Q}^*/(\mathbb{Q}^*)^2$. Soit $\mathcal{Y} \rightarrow \mathbb{P}_S^1$ le pinceau (13). Si \mathcal{Y} a un point adélique S_0 -entier, alors \mathcal{Y} a un point S_0 -entier.*

On remarque que quand $\deg(f) = \deg(g) = 2$ la surface X donnée par (12) est une surface de del Pezzo de degré 4 et le diviseur $D \subseteq X$ déterminé par $z = 0$ est une courbe propre et lisse de genre 1 dont la classe dans $\text{Pic}(\overline{X}_{\overline{k}})$ est la classe anti-canonique. On peut ensuite démontrer que $X = \overline{X} \setminus D$ est simplement connexe, donc une surface **log K3** de nombre de Picard 5. Le théorème 3.10 nous donne effectivement la première famille de surfaces log K3 pour lesquelles des conditions suffisantes de ce type sont connues (y compris des surfaces K3 propres pour lesquelles les résultats de ce type ne sont connus que conditionnellement). Notons que des résultats similaires concernant les points entiers sur les variétés fibre ont été obtenus dans [Xu15], [CTX11], [CTH16] et [Gu13] (ce dernier en supposant l'hypothèse de Schinzel). Toutefois, dans tous ces cas, les variétés fibrées considérées sont log rationnellement connexes (voir [Zh14]).

REMARQUES 3.11.

- (1) Le théorème principal prouvé dans [7] est plus général que le théorème 3.10, s'occupant des polynômes f, g de n'importe quel degré pairs $2n, 2m$, et supposant toujours qu'ils se scindent en termes linéaires. Les conditions exactes qui doivent être supposées sur f, g sont un peu plus compliquées à décrire, mais sont toujours vérifiables de façon finie.
- (2) La condition que $\{-1, a, b\} \cup \{\Delta_{i,j}\}_{i>j}$ sont linéairement indépendants dans $\mathbb{Q}^*/(\mathbb{Q}^*)^2$ implique en particulier que $\text{Br}(Y)[2]$ ne contienne que des classes constantes. Cette condition peut être légèrement affaiblie, en tenant compte d'une certaine partie de l'obstruction de Brauer-Manin.
- (3) L'hypothèse de Schinzel ne joue aucun rôle dans le théorème 3.10. Cela vient du fait que la preuve du théorème 3.10 se contente de la forme homogène de l'hypothèse de Schinzel pour une collection de polynômes linéaires, un cas maintenant couvert par le travail de Green, Tao et Ziegler sur la conjecture de Hardy-Littlewood.

On peut maintenant décrire les idées principales qui apparaissent dans l'adaptation de la méthode des fibrations élargie pour les pinceaux de toreseurs sous des tores algébriques. Soit k un corps de nombres et soit S_0 un ensemble fini de places de k . Soit $d \in \mathcal{O}_{S_0}$ un élément non nul satisfaisant la condition suivante :

HYPOTHÈSE 3.12. Pour chaque $v \notin S_0$ on a $\text{val}_v(d) \leq 1$ et $\text{val}_v(d) = 1$ si v se trouve au-dessus de 2.

Soit $K = k(\sqrt{d})$ et soit T_0 l'ensemble des places de K qui se trouvent au-dessus de S_0 . L'hypothèse 3.12 implique que l'anneau \mathcal{O}_{T_0} est engendré, comme un module sur \mathcal{O}_{S_0} , par 1 et d . Soit \mathcal{T}_0 le schéma en groupes donné par

$$x^2 - dy^2 = 1.$$

On peut identifier les points S -entiers de \mathcal{T}_0 avec les éléments du groupe des unités de \mathcal{O}_{T_0} dont la norme dans \mathcal{O}_{S_0} est 1. Notons que techniquement le schéma en groupes \mathcal{T}_0 n'est pas un tore algébrique sur \mathcal{O}_{S_0} , comme il ne se scinde pas dans une extension étale de \mathcal{O}_{S_0} . Ce problème sera réglé par la suite en élargissant prudemment notre ensemble S_0 .

Pour chaque $a|d$ on peut considérer le \mathcal{O}_{S_0} -schème affine \mathcal{Z}_0^a donné par l'équation

$$(15) \quad ax^2 + by^2 = 1$$

où $b = -\frac{d}{a}$. Soit $I_a \subseteq \mathcal{O}_{T_0}$ l'idéal engendré par a et \sqrt{d} . L'association $(x, y) \mapsto ax + \sqrt{d}y$ identifie l'ensemble des points S_0 -entiers de \mathcal{Z}_0^a avec l'ensemble des éléments de I_a dont la norme égale a . Notons que I_a est un \mathcal{O}_{T_0} -idéal de norme $a\mathcal{O}_{S_0}$ et donc un tel élément engendre automatiquement I_a (comme un idéal de \mathcal{O}_{T_0}). On a une action naturelle de \mathcal{T}_0 sur \mathcal{Z}_0^a correspondant à la multiplication d'un générateur par une unité. L'hypothèse 3.12 implique que a, b sont premiers entre eux dans \mathcal{O}_{S_0} (c'est-à-dire, l'idéal de \mathcal{O}_{S_0} engendré par a, b est \mathcal{O}_{S_0}). Dans ce cas-là l'action de \mathcal{T}_0 sur \mathcal{Z}_0^a présente \mathcal{Z}_0^a comme un torseur sous \mathcal{T}_0 , localement trivial dans la topologie étale sur $\text{Spec}(\mathcal{O}_{S_0})$, et donc classifié par un élément du groupe de cohomologie étale $\alpha_a \in H_{\text{ét}}^1(\mathcal{O}_{S_0}, \mathcal{T}_0)$. Cet élément n'est pas un élément arbitraire. La condition $a\mathcal{O}_{S_0} + b\mathcal{O}_{S_0} = \mathcal{O}_{S_0}$ implique que $I_a^2 = a\mathcal{O}_{S_0}$, et alors si $\beta = ax + \sqrt{d}y \in I_a$ a une norme a alors $\frac{\beta^2}{a} \in \mathcal{O}_{T_0}$ a une norme 1. On peut réaliser cette opération comme un morphisme de \mathcal{O}_{S_0} -schémas

$$q : \mathcal{Z}_0^a \longrightarrow \mathcal{T}_0.$$

Le morphisme q est compatible avec l'action de \mathcal{T}_0 sur \mathcal{Z}_0^a et l'action de \mathcal{T}_0 sur lui-même par multiplication par 2. Il s'ensuit que $\alpha_a \in H_{\text{ét}}^1(\mathcal{O}_{S_0}, \mathcal{T}_0)$ est d'ordre 2.

Le groupe de cohomologie étale $H_{\text{ét}}^1(\mathcal{O}_{S_0}, \mathcal{T}_0)$ a un comportement beaucoup plus favorable quand \mathcal{T}_0 est un tore algébrique, c'est-à-dire lorsqu'il devient isomorphe à \mathbb{G}_m^n après une extension étale de l'anneau de base. Soit S l'union de S_0 avec toutes les places qui se ramifient dans K et les places au-dessus de 2, et soit T l'ensemble des places de K qui se trouvent au-dessus de S . Soit $\mathcal{T} = \mathcal{T}_0 \otimes_{\mathcal{O}_{S_0}} \mathcal{O}_S$ le changement de base à \mathcal{O}_S . Alors \mathcal{T} devient isomorphe à \mathbb{G}_m sur l'extension étale $\mathcal{O}_T/\mathcal{O}_S$ et donc \mathcal{T} est un tore algébrique sur \mathcal{O}_S . On va noter $\widehat{\mathcal{T}}$ le groupe des caractères de \mathcal{T} , considéré comme un faisceau pour la topologie étale. Notons $\text{III}^1(\mathcal{T}, S) \subseteq H_{\text{ét}}^1(\mathcal{O}_S, \mathcal{T})$ le noyau de l'application

$$H_{\text{ét}}^1(\mathcal{O}_S, \mathcal{T}) \longrightarrow \prod_{v \in S} H^1(k_v, \mathcal{T} \otimes_{\mathcal{O}_S} k_v).$$

De manière similaire, notons $\text{III}^2(\widehat{\mathcal{T}}, S) \subseteq H_{\text{ét}}^2(\mathcal{O}_S, \widehat{\mathcal{T}})$ le noyau de l'application

$$H_{\text{ét}}^2(\mathcal{O}_S, \widehat{\mathcal{T}}) \longrightarrow \prod_{v \in S} H^2(k_v, \widehat{\mathcal{T}} \otimes_{\mathcal{O}_S} k_v).$$

Comme \mathcal{T} est un tore algébrique on peut utiliser [Mi06, Theorem 4.6(a), Theorem 4.7] et déduire que les groupes $\text{III}^1(\mathcal{T}, S)$ et $\text{III}^2(\widehat{\mathcal{T}}, S)$ sont finis et que le cup-produit avec support compact induit un accouplement naturel parfait

$$(16) \quad \text{III}^1(\mathcal{T}, S) \times \text{III}^2(\widehat{\mathcal{T}}, S) \longrightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z}.$$

Comme 2 est inversible dans \mathcal{O}_S l'application de multiplication par 2 sur \mathcal{T} est surjective quand considérée comme une application des faisceaux étales sur $\text{Spec}(\mathcal{O}_S)$. En particulier, on obtient une suite exacte des faisceaux étales

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \longrightarrow \mathcal{T} \xrightarrow{2} \mathcal{T} \longrightarrow 0$$

connue comme la suite de Kummer associée à \mathcal{T} . On définit le **groupe de Selmer** $\text{Sel}(\mathcal{T}, S) \subseteq H^1(\mathcal{O}_S, \mathbb{Z}/2)$ comme le sous-groupe contenant les éléments où l'image dans $H^1(\mathcal{O}_S, \mathcal{T})$ appartient à $\text{III}^1(\mathcal{T}, S)$. Le groupe de Selmer se trouve alors dans une suite exacte

$$0 \longrightarrow \mathcal{T}(\mathcal{O}_S)/2 \longrightarrow \text{Sel}(\mathcal{T}, S) \longrightarrow \text{III}^1(\mathcal{T}, S)[2] \longrightarrow 0.$$

Remarquons que l'application induit $H^1(\mathcal{O}_S, \mathbb{Z}/2) \longrightarrow H^1(\mathcal{O}_S, \mathcal{T})$ admet une description plus explicite. Comme S contient toutes les places au-dessus de 2, la suite exacte de Kummer associée à \mathbb{G}_m donne une suite exacte

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_S^*/(\mathcal{O}_S^*)^2 \longrightarrow H^1(\mathcal{O}_S, \mathbb{Z}/2) \longrightarrow \text{Pic}(\mathcal{O}_S)[2] \longrightarrow 0.$$

Un élément de $H^1(\mathcal{O}_S, \mathbb{Z}/2)$ peut être représenté (mod carrés) par un élément non nul $a \in \mathcal{O}_S$ tel que $\text{val}_v(a)$ est pair pour toutes les $v \notin S$. Dans ces termes l'application $H^1(\mathcal{O}_S, \mathbb{Z}/2) \longrightarrow \text{Pic}(\mathcal{O}_S)[2]$ envoie la classe de a à la classe du diviseur $\frac{\text{div}(a)}{2}$, où l'on considère a comme une fonction sur $\text{Spec}(\mathcal{O}_S)$. Soit $I_a \subseteq \mathcal{O}_T$ l'idéal correspondant à l'image réciproque de $\frac{\text{div}(a)}{2}$ dans $\text{Spec}(\mathcal{O}_T)$. Alors I_a est un idéal de norme $a\mathcal{O}_{S_0}$ et on peut former le \mathcal{O}_S -schéma \mathcal{Z}^a paramétrant les éléments de I_a de norme a . Le schéma \mathcal{Z}^a est un torseur sous \mathcal{T} dont la classe correspondante dans $H^1(\mathcal{O}_S, \mathcal{T})$ est l'image de $[a] \in H^1(\mathcal{O}_S, \mathbb{Z}/2)$. Cette image appartient à $\text{Sel}(\mathcal{T})$ si et seulement si \mathcal{Z}^a a un k_v -point pour chaque $v \in S$. Notons ici que \mathcal{Z}^a a toujours des \mathcal{O}_v -points pour chaque $v \notin S$. Conséquemment, il est possible de dire que l'image de $[a]$ appartient à $\text{Sel}(\mathcal{T}, S)$ exactement quand \mathcal{Z}^a a un point adélique S -entier.

On remarque que si a satisfait $\text{div}(a) = 0$ sur $\text{Spec}(\mathcal{O}_S)$ (c'est-à-dire, a est une S -unité) alors \mathcal{Z}^a est le schéma paramétrant les T -unités dont la norme égale a , ce que l'on peut décrire avec l'équation

$$x^2 - dy^2 = a.$$

Si, en plus, $a|d$, alors le schéma \mathcal{Z}^a coïncide avec le changement de base de notre schéma \mathcal{Z}_0^a de \mathcal{O}_{S_0} à \mathcal{O}_S .

Du côté dual, on a une suite exacte

$$0 \longrightarrow \widehat{\mathcal{T}} \xrightarrow{2} \widehat{\mathcal{T}} \longrightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \longrightarrow 0$$

et on définit le **groupe de Selmer dual** $\text{Sel}(\widehat{\mathcal{T}}, S) \subseteq H^1(\mathcal{O}_S, \mathbb{Z}/2)$ comme le sous-groupe contenant les éléments dont l'image dans $H^2(\mathcal{O}_S, \widehat{\mathcal{T}})$ appartient à $\text{III}^2(\widehat{\mathcal{T}}, S)$. Le groupe de Selmer dual se trouve dans une suite exacte de la forme

$$0 \longrightarrow H^1(\mathcal{O}_S, \widehat{\mathcal{T}})/2 \longrightarrow \text{Sel}(\widehat{\mathcal{T}}, S) \longrightarrow \text{III}^2(\widehat{\mathcal{T}}, S)[2] \longrightarrow 0.$$

Pour présenter les choses de façon plus explicite, considérons la suite exacte

$$0 \longrightarrow \widehat{\mathcal{T}} \longrightarrow \widehat{\mathcal{T}} \otimes \mathbb{Q} \longrightarrow \widehat{\mathcal{T}} \otimes (\mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \longrightarrow 0.$$

Comme $\widehat{\mathcal{T}} \otimes \mathbb{Q}$ est un faisceau uniquement divisible, on a un isomorphisme naturel

$$H^2(\mathcal{O}_S, \widehat{\mathcal{T}}) \cong H^1(\mathcal{O}_S, \widehat{\mathcal{T}} \otimes (\mathbb{Q}/\mathbb{Z})).$$

Ce dernier peut être identifié avec le noyau de l'application de corestriction

$$\text{Cores} : H^1(\mathcal{O}_T, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \longrightarrow H^1(\mathcal{O}_S, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}).$$

L'application $H^1(\mathcal{O}_S, \mathbb{Z}/2) \longrightarrow H^2(\mathcal{O}_S, \widehat{\mathcal{T}})$ peut ensuite être identifiée avec l'application de restriction

$$H^1(\mathcal{O}_S, \mathbb{Z}/2) \xrightarrow{\text{res}} H^1(\mathcal{O}_T, \mathbb{Z}/2) \subseteq \text{Ker}[H^1(\mathcal{O}_T, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \xrightarrow{\text{cores}} H^1(\mathcal{O}_S, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})].$$

On peut donc décrire le groupe de Selmer dual de la façon suivante :

COROLLAIRE 3.13. *Soit $[a] \in H^1(\mathcal{O}_S, \mathbb{Z}/2)$ une classe représentée par un élément $a \in \mathcal{O}_S$ (tel que $\text{val}_v(a)$ est pair pour $v \notin S$). Alors $[a]$ appartient à $\text{Sel}(\widehat{\mathcal{T}}, S)$ si et seulement si tout $w \in T$ est scindé dans l'extension quadratique $K(\sqrt{a})/K$. Autrement dit, $[a] \in \text{Sel}(\widehat{\mathcal{T}}, S)$ si et seulement si l'image de a dans K est un carré dans K_w pour chaque $w \in T$.*

COROLLAIRE 3.14. *Le noyau de l'application $\text{Sel}(\widehat{\mathcal{T}}, S) \rightarrow \text{III}^2(\widehat{\mathcal{T}}, S)$ est engendré par la classe $[d] \in \text{Sel}(\widehat{\mathcal{T}})$.*

Le résultat principal que l'on souhaite déduire de ce formalisme est le suivant :

PROPOSITION 3.15. *Supposons que la condition 3.12 vaut. Si $\text{Sel}(\widehat{\mathcal{T}}, S)$ est engendré par $[d]$, alors pour chaque $a|d$ le \mathcal{O}_{S_0} -schéma \mathcal{Z}_0^a donné par (15) satisfait le principe de Hasse S_0 -entier.*

DÉMONSTRATION. Par le corollaire 3.14 on sait que dans ce cas-là $\text{III}^2(\widehat{\mathcal{T}}, S) = 0$ est donc $\text{III}^1(\mathcal{T}, S) = 0$ par l'accouplement parfait (16). Il s'ensuit que le changement de base $\mathcal{Z}^a = \mathcal{Z}_0^a \otimes_{\mathcal{O}_{S_0}} \mathcal{O}_S$ satisfait le principe de Hasse S -entier. Pour raffiner ce résultat de \mathcal{O}_S à \mathcal{O}_{S_0} il faut utiliser la condition 3.12 de façon particulière, ce que nous ne développerons pas ici. \square

Nous allons maintenant nous focaliser sur la preuve du théorème 3.10. Comme elle est assez élaborée, on la présentera à grands traits. Fixons un ensemble fini de places assez grand $S \supseteq S_0$ qui contient toutes les places spéciales par rapport aux variétés en question (par exemple, toutes les places au-dessus de 2, toutes les places de mauvaise réduction pour Y , etc.). Étant donné un ensemble fini de places T contenant S , on va parler d'une **collection de points locaux** $(P_v)_{v \in T}$, en signifiant un élément

$$(P_v)_{v \in T} \in \prod_{v \in S_0} Y(k_v) \times \prod_{v \in T \setminus S_0} \mathcal{Y}(\mathcal{O}_v).$$

Pour $i = 1, \dots, 4$ notons $p_i(t, s) = c_i t + d_i s$, donc on a $f = ap_1 p_2$ et $g = bp_3 p_4$.

DÉFINITION 3.16. Pour un élément $x \in \mathbb{Q}^*$ on va noter $[x]_v \in \mathbb{Q}_v^*/(\mathbb{Q}_v^*)^2$ la classe de l'image de x dans \mathbb{Q}_v^* .

DÉFINITION 3.17. Soit T un ensemble fini de places de \mathbb{Q} contenant S et soit $(P_v)_{v \in T}$ une collection de points locaux dont les images dans $\mathbb{P}_{\mathbb{Q}}^1$ sont données par $(t_v : s_v) \in \mathbb{P}^1(k_v)$. Un couple T -**admissible** (par rapport au (P_v)) est un couple $(t, s) \in \mathbb{Z}_{S_0}^2$ tel que

- (1) $[p_i(t, s)]_v = [p_i(t_v, s_v)]_v \in \mathbb{Q}_v^*/(\mathbb{Q}_v^*)^2$ pour chaque $v \in T$.
- (2) Pour chaque $i = 1, \dots, 4$, $p_i(t, s)$ est une unité hors de T sauf en une place u_i où $\text{val}_{u_i}(p_i(t, s)) = 1$.
- (3) La fibre $\mathcal{Y}_{(t, s)}$ contient un point adélique S_0 -entier.

PROPOSITION 3.18. *Soit T un ensemble fini de places contenant S et soit $(P_v)_{v \in T}$ une collection de points locaux orthogonale au groupe de Brauer vertical de Y sur $\mathbb{P}_{\mathbb{Q}}^1$. Alors il existe un couple T -admissible par rapport à (P_v) .*

La proposition 3.18 est une application de la méthode des fibrations dans une situation où les fibres non scindées se trouvent au-dessus des points rationnels, et deviennent scindées dans des extensions quadratiques de \mathbb{Q} . Cela nécessite la forme homogène de l'hypothèse de Schinzel pour une collection de polynômes linéaires, un cas maintenant couvert par le travail de Green, Tao et Ziegler (voir [3]).

Soit T un ensemble fini de places contenant S . La première étape de la preuve consiste à construire une collection $(P_v)_{v \in T}$ de points locaux, orthogonale au groupe de Brauer vertical de Y , et tel que $\text{val}_v(f(t_v, s_v)g(t_v, g_v)) \leq 1$ pour $v \in T \setminus S_0$, où $(t_v : s_v)$ désigne l'image de P_v dans $\mathbb{P}_{\mathcal{O}_v}^1$. Notons que les coordonnées (t_v, s_v) sont bien définies à multiplication par un élément de \mathcal{O}_v^* près, et donc le nombre naturel $\text{val}_v(f(t_v, s_v)g(t_v, g_v))$ est bien défini. Cet argument utilise notre hypothèse que a et b sont sans facteur carré hors de S_0 . Supposons que cette étape a été complétée, et fixons une collection de points locaux de cette forme. On va noter $T_0 \subseteq T$ l'ensemble des places $v \in T$ tel que soit $v \in S_0$ soit $\text{val}_v(f(t_v, s_v)g(t_v, g_v)) = 1$.

Soit (t, s) un couple T -admissible par rapport à (P_v) . Notons $T(t, s) = T \cup \{u_1, \dots, u_4\}$ et $T_0(t, s) = T_0 \cup \{u_1, \dots, u_4\}$. Soit $\mathcal{J}_{(t,s)}$ le tore algébrique sur $\mathbb{Z}_{T_0(t,s)}$ donné par

$$x^2 + f(t, s)g(t, s)y^2 = 1.$$

On remarque que par notre hypothèse sur (P_v) , il s'ensuit que $-f(t, s)g(t, s)$ satisfait l'hypothèse 3.12. La fibre $\mathcal{Y}_{(t,s)}$ est donc un torseur sous $\mathcal{J}_{(t,s)}$, et on peut essayer d'utiliser la proposition 3.15 pour trouver un point S_0 -entier sur $\mathcal{Y}_{(t,s)}$. Pour pouvoir faire cela, on voudrait contrôler les groupes de Selmer et Selmer dual associés à $\mathcal{J}_{t,s}$ par rapport à l'ensemble $T_0(t, s)$. Toutefois, ces groupes dépendent des symboles de Hilbert $\langle p_j(t, s), p_i(t, s) \rangle_{u_i}$ qu'on ne peut pas strictement contrôler en générant notre couple T -admissible avec la proposition 3.18. Pour surmonter cette difficulté on doit introduire une variante

$$\text{Sel}^-(\mathcal{J}_{(t,s)}, T_0(t, s)) \subseteq \text{Sel}(\mathcal{J}_{(t,s)}, T_0(t, s))$$

appelée le **groupe de Selmer strict** et une variante duale

$$\text{Sel}(\widehat{\mathcal{J}}_{(t,s)}, T_0(t, s)) \subseteq \text{Sel}^+(\widehat{\mathcal{J}}_{(t,s)}, T_0(t, s))$$

appelée le **groupe de Selmer dual faible**. L'avantage de ces variantes est qu'elles ne dépendent pas du couple T -admissible spécifique (t, s) qu'on a choisi, mais que de T et $(P_v)_{v \in T}$.

En utilisant des calculs subtils de ces variantes des groupes de Selmer et plusieurs arguments de réciprocité, on peut démontrer la proposition suivante :

PROPOSITION 3.19. *Soit (t_0, s_0) un couple T -admissible par rapport à $(P_v)_{v \in T}$. Soit $[x] \in \text{Sel}^+(\widehat{\mathcal{J}}_{(t_0, s_0)}, T_0(t_0, s_0))$ tel que $[x] \in \{0, [-f(t_0, s_0)g(t_0, s_0)]\}$. Alors il existe une place w , une collection de points locaux $(Q_v)_{v \in T \cup w}$ prolongeant $\{P_v\}$, et un couple $(T \cup \{w\})$ -admissible (t_1, s_1) par rapport à (Q_v) , tel que*

$$\text{Sel}^+(\widehat{\mathcal{J}}_{(t_1, s_1)}, T_0(t_1, s_1)) \not\subseteq \text{Sel}^+(\widehat{\mathcal{J}}_{(t_0, s_0)}, T_0(t_0, s_0)).$$

En supposant la proposition 3.19 on peut décrire la fin de la preuve du théorème 3.10. En commençant avec $T = S$ et une collection de points locaux $(P_v)_{v \in S}$ comme ci-dessus, on peut appliquer la proposition 3.18 pour trouver un couple S -admissible par rapport à (P_v) . En appliquant la proposition 3.19 de manière répétée, on peut remplacer S par un ensemble plus grand T et remplacer (t_0, s_0) par un couple T -admissible (t_1, s_1) tel que le groupe de Selmer dual faible $\text{Sel}^+(\widehat{\mathcal{J}}_{(t_1, s_1)}, T_0(t_1, s_1))$

est engendré par la classe $[-f(t_1, s_1)g(t_1, s_1)]$, impliquant le même énoncé pour le groupe de Selmer dual lui-même. On peut maintenant appliquer la proposition 3.15 et en déduire que $\mathcal{Y}_{(t_1:s_1)}$ contient un point S_0 -entier, comme désiré.

La théorie de l’homotopie et les catégories supérieures

4.1. Contexte

Dans le domaine de la théorie de l’homotopie moderne, la théorie des catégories supérieures a pris une importance fondamentale, et forme un outil clé pour étudier les notions et les constructions homotopiques. Au cours des ces dernières décennies plusieurs approches de la théorie des catégories supérieures ont été développées. Ces approches peuvent être classées schématiquement en deux types principaux.

L’approche plus ancienne et plus implantée repose sur le travail fondateur de Quillen ([**Qu67**]), qui a défini la notion de **catégorie de modèles**. Une catégorie de modèles est une catégorie ordinaire \mathcal{M} , munie d’une structure additionnelle appropriée (consistant en trois classes de morphismes satisfaisants certaines conditions), qui nous permet d’effectuer les constructions homotopiques dans \mathcal{M} . On se réfère à une telle structure comme « structure de modèles ». Par exemple, la catégorie des espaces topologiques peut être munie d’une telle structure de modèles, et toutes les constructions homotopiques qui étaient traditionnellement effectuées sur les espaces (par exemple, les limites et colimites homotopiques) peuvent être reformulées de façon convaincante dans ce cadre. D’autres exemples de catégories de modèles comprennent les ensembles simpliciaux, les spectres symétriques, et les complexes de chaînes (ce qui nous donne un cadre unifié pour toutes les constructions classiques de l’algèbre homologique). La notion de catégorie de modèles admet plusieurs variantes, y compris des catégories de fibrations/cofibrations ([**Ci10a**]), et des catégories d’objets fibrants/cofibrants. Ces variantes portent moins de structure et sont plus faciles à construire, au prix d’offrir moins d’outils pour accéder à l’information homotopique.

La deuxième approche, qui repose sur les travaux notables de Lurie ([**Lu09**], [**Lu14**]), de Joyal ([**Jo02**],[**Jo08**]), et de Rezk ([**Re01**]), vise à établir une nouvelle notion : la notion d’ ∞ -**catégorie**, qui doit être l’analogie correct de la notion ordinaire de catégorie. Contrairement aux catégories de modèles, une ∞ -catégorie n’est pas une catégorie ordinaire munie d’une structure supplémentaire, et sa définition est plus subtile (on relève cependant plusieurs définitions équivalentes). Pour chaque catégorie de modèles \mathcal{M} (ou de catégorie de fibrations/cofibrations, etc.) on peut associer une ∞ -catégorie qu’elle **modèle**, ce que l’on note par \mathcal{M}_∞ . L’ ∞ -catégorie est toujours là où l’information homotopique se trouve, mais les structures plus rigides (quand elles existent) peuvent être utilisées pour faire des calculs et des constructions concrètes. Les deux approches doivent alors être considérées comme complémentaires l’une de l’autre. De nombreux travaux dans ce domaine visent à lier les deux approches pour établir, par exemple, qu’une certaine construction dans

le cadre des catégories de modèles produit en effet un résultat où l' ∞ -catégorie associée est compatible avec la construction analogue dans le cadre des ∞ -catégories. De plus, les deux approches sont souvent combinées quand on veut obtenir une perspective globale, par exemple, en étudiant l' ∞ -catégorie des ∞ -catégories (voir [Lu09, §3]).

4.2. Fibrations de modèles et la correspondance de Grothendieck ([8],[9])

Soit X un espace topologique. Un résultat classique dans le domaine de la topologie algébrique affirme une équivalence entre la catégorie des revêtements $Y \rightarrow X$ et la catégorie des foncteurs $\Pi_1(X) \rightarrow \text{Set}$, où $\Pi_1(X)$ désigne le groupoïde fondamental de X , c'est-à-dire, le groupoïde dont les objets sont les points de X et dont les morphismes sont les classes d'homotopie de chemins entre deux points. La flexibilité de pouvoir passer entre les deux points de vue - un objet géométrique sur X d'un côté, et une famille d'ensembles paramétrée par X de l'autre - est extrêmement utile, et conduit bien à des généralisations de dimension supérieure (pour des fibrations dont les fibres ne sont pas discrètes), ce qui joue un rôle fondamental dans la théorie de l'homotopie moderne. Un phénomène lié se trouve dans le domaine de la théorie des catégories. Étant donné une catégorie \mathcal{C} et un foncteur $\mathcal{F} : \mathcal{C} \rightarrow \text{Cat}$ de \mathcal{C} vers la catégorie des petites catégories, on peut assembler toutes les catégories $\mathcal{F}(c)$ pour $c \in \mathcal{C}$ en une catégorie globale $\int_{\mathcal{C}} \mathcal{F}$. Les objets de $\int_{\mathcal{C}} \mathcal{F}$ sont les couples (c, X) où c est un objet de \mathcal{C} et X est un objet de $\mathcal{F}(c)$. Un morphisme de (c, X) vers (c', X') est un couple (f, φ) où $f : c \rightarrow c'$ est un morphisme dans \mathcal{C} et $\varphi : f_!(X) \rightarrow X'$ est un morphisme dans $\mathcal{F}(c')$ (où on a noté par $f_! : \mathcal{F}(c) \rightarrow \mathcal{F}(c')$ le foncteur associé à f par \mathcal{F}). La catégorie $\int_{\mathcal{C}} \mathcal{F}$ est connue comme la **construction de Grothendieck**, et porte un foncteur naturel vers \mathcal{C} donné par $(c, X) \mapsto c$. Les catégories sur \mathcal{C} obtenues de cette façon peuvent être caractérisées explicitement, et sont connues sous le nom de **fibrations cocartésiennes**, ou de **fibrations de Grothendieck**. Un théorème célèbre de Grothendieck affirme que l'association $\mathcal{F} \mapsto \int_{\mathcal{C}} \mathcal{F}$ détermine une équivalence entre la 2-catégorie des foncteurs $\mathcal{C} \rightarrow \text{Cat}$ et la 2-catégorie des fibrations cocartésiennes sur \mathcal{C} . De plus, la catégorie $\int_{\mathcal{C}} \mathcal{F}$ admet une caractérisation universelle comme la **lax-colimite** du foncteur \mathcal{F} .

Si la construction de Grothendieck est utile dans le domaine des catégories ordinaires, son analogue pour les catégories supérieures est en revanche indispensable. En effet, si \mathcal{C} est une ∞ -catégorie, il est souvent difficile de décrire un foncteur $\mathcal{C} \rightarrow \text{Cat}_{\infty}$ explicitement, puisque cela nécessite d'écrire un ensemble complexe et infini de données de cohérence homotopique. Par contraste, l'analogue des fibrations cocartésiennes pour l' ∞ -catégories, développé notamment par Lurie dans [Lu09], est directement accessible, et possède beaucoup de propriétés formelles favorables. C'est pour cette raison que le formalisme des fibrations cocartésiennes est souvent la façon la plus pratique (ou même la seule disponible) pour traiter les familles d' ∞ -catégories paramétrées par une ∞ -catégorie.

Dans l'article [8], en commun avec M. Prasma, on considère une situation analogue dans le domaine des catégories de modèles. En général, pour un diagramme de catégories de modèles $\mathcal{F} : \mathcal{J} \rightarrow \text{ModCat}$, la construction de Grothendieck $\int_{\mathcal{J}} \mathcal{F}$ ne doit pas forcément avoir de limites ou de colimites, et en conséquent on ne doit pas s'attendre à ce que $\int_{\mathcal{J}} \mathcal{F}$ porte une structure de modèles. Dans l'article [8] on

suggère un cadre conceptuel pour gérer cette difficulté en considérant la notion de catégorie de modèles dans un contexte **relatif**.

Soit \mathcal{M} une catégorie munie de trois classes de sous-catégories $\mathcal{W}_{\mathcal{M}}, \mathcal{Cof}_{\mathcal{M}}, \mathcal{Fib}_{\mathcal{M}} \subseteq \mathcal{M}$ contenant tous les objets. On va appeler une telle catégorie une **pré-catégorie de modèles**, et se référer aux morphismes dans $\mathcal{W}_{\mathcal{M}}, \mathcal{Cof}_{\mathcal{M}}, \mathcal{Fib}_{\mathcal{M}}, \mathcal{Cof}_{\mathcal{M}} \cap \mathcal{W}_{\mathcal{M}}$ et $\mathcal{Fib}_{\mathcal{M}} \cap \mathcal{W}_{\mathcal{M}}$ comme équivalences faibles, cofibrations, fibrations, cofibrations triviales et fibrations triviales, respectivement. Nous suggérons de considérer une variante relative des axiomes de catégories de modèles. La première étape consiste à définir une notion relative de système de factorisation faible, ce que l'on peut faire assez directement (voir [8, Définition 5.0.2]). Ayant fait cela, on peut décrire la variante relative de la notion de catégorie de modèles de la façon suivante :

DÉFINITION 4.1. Soit \mathcal{M}, \mathcal{N} deux pré-catégories de modèles. On dit qu'un foncteur $\pi : \mathcal{N} \rightarrow \mathcal{M}$ présente \mathcal{N} comme une catégorie de modèles relative à \mathcal{M} si les conditions suivantes valent :

- (1) \mathcal{N} admet les π -limites et les π -colimites.
- (2) Soit $f : X \rightarrow Y$ et $g : Y \rightarrow Z$ des morphismes dans \mathcal{N} . Si deux de $f, g, g \circ f$ sont dans $\mathcal{W}_{\mathcal{N}}$ et l'image du troisième dans \mathcal{M} appartient à $\mathcal{W}_{\mathcal{M}}$, alors le troisième appartient à $\mathcal{W}_{\mathcal{N}}$.
- (3) Les couples $(\mathcal{Cof}_{\mathcal{N}} \cap \mathcal{W}_{\mathcal{N}}, \mathcal{Fib}_{\mathcal{N}})$ et $(\mathcal{Cof}_{\mathcal{N}}, \mathcal{Fib}_{\mathcal{N}} \cap \mathcal{W}_{\mathcal{N}})$ sont des systèmes de factorisation faibles relativement à leur image dans \mathcal{M} .

Dans ce cas-là on va également dire que $\pi : \mathcal{N} \rightarrow \mathcal{M}$ est une catégorie de modèles relative.

REMARQUE 4.2. Soit $\pi : \mathcal{N} \rightarrow \mathcal{M}$ une catégorie de modèles relative. Si \mathcal{M} est une catégorie de modèles alors \mathcal{N} est une catégorie de modèles.

Maintenant soit $\pi : \mathcal{N} \rightarrow \mathcal{M}$ une catégorie de modèles relative. Comme \mathcal{N} admet les π -limites et les π -colimites il s'ensuit que pour chaque $A \in \mathcal{M}$ la fibre $\mathcal{N}_{\times_{\mathcal{M}}} \{A\}$ admet les limites et les colimites. On va noter $\emptyset_A, *_{\mathcal{M}} \in \mathcal{N}_{\times_{\mathcal{M}}} \{A\}$ l'objet initial et l'objet terminal de $\mathcal{N}_{\times_{\mathcal{M}}} \{A\}$, respectivement. On va dire qu'un objet $X \in \mathcal{N}$ est π -cofibrant si la flèche unique $\emptyset_{\pi(X)} \rightarrow X$ au-dessus de l'identité $\text{Id}_{\pi(X)}$ appartient à $\mathcal{Cof}_{\mathcal{N}}$. De façon similaire, on va dire qu'un objet $X \in \mathcal{N}$ est π -fibrant si la flèche unique $X \rightarrow *_{\pi(X)}$ au-dessus de l'identité $\text{Id}_{\pi(X)}$ appartient à $\mathcal{Fib}_{\mathcal{N}}$.

DÉFINITION 4.3. Soit $\pi : \mathcal{N} \rightarrow \mathcal{M}$ une catégorie de modèles relative. On va dire que π est une **fibration de modèles** si les conditions suivantes valent :

- (1) π est une fibration cartésienne et cocartésienne.
- (2) Si $f : X \rightarrow Y$ est un morphisme π -cocartésien dans \mathcal{N} tel que X est π -cofibrant et $\pi(f) \in \mathcal{W}_{\mathcal{M}}$ alors $f \in \mathcal{W}_{\mathcal{N}}$.
- (3) Si $f : X \rightarrow Y$ est un morphisme π -cartésien dans \mathcal{N} tel que Y est π -fibrant et $\pi(f) \in \mathcal{W}_{\mathcal{M}}$ alors $f \in \mathcal{W}_{\mathcal{N}}$.

Un morphisme de fibrations de modèles sur \mathcal{M} est une adjonction de Quillen

$$\begin{array}{ccc}
 \mathcal{N} & \xrightarrow{\Phi} & \mathcal{N}' \\
 & \perp & \\
 \mathcal{N} & \xleftarrow{\Psi} & \mathcal{N}' \\
 \pi \searrow & & \swarrow \pi' \\
 & \mathcal{M} &
 \end{array}$$

sur \mathcal{M} tel que Φ préserve les morphismes cocartésiens et Ψ préserve les morphismes cartésiens. On a également des 2-morphismes (inversibles) qui sont donnés par des équivalences pseudo-naturelles des adjonctions. On note $\text{ModFib}(\mathcal{M})$ la $(2, 1)$ -catégorie obtenue.

DÉFINITION 4.4. Soit \mathcal{M} une pré-catégorie de modèles et soit $\mathcal{F} : \mathcal{M} \rightarrow \text{ModCat}$ un foncteur. On va appeler un morphisme $(f, \varphi) : (A, x) \rightarrow (B, Y)$ dans $\int_{\mathcal{M}} \mathcal{F}$

- (1) une **cofibration** si $f : A \rightarrow B$ est une cofibration dans \mathcal{M} et $\varphi : f_!(X) \rightarrow Y$ est une cofibration dans $\mathcal{F}(B)$.
- (2) une **fibration** si $f : A \rightarrow B$ est une fibration dans \mathcal{M} et $\varphi^{\text{ad}} : X \rightarrow f^*Y$ est une fibration dans $\mathcal{F}(A)$.
- (3) une **équivalence faible** si $f : A \rightarrow B$ est une équivalence faible dans \mathcal{M} et la flèche composée $f_!(X^{\text{cof}}) \rightarrow f_!X \rightarrow Y$ est une équivalence faible dans $\mathcal{F}(B)$.

On va noter **Cof**, **Fib**, **W** respectivement ces trois classes de morphismes.

Pour formuler les théorèmes principaux de [8] nous avons besoin de quelques définitions supplémentaires.

DÉFINITION 4.5. Soit \mathcal{M} une pré-catégorie de modèles et soit $\mathcal{F} : \mathcal{M} \rightarrow \text{ModCat}$ un foncteur. On va dire que \mathcal{F} est **relatif** si \mathcal{F} envoie les morphismes dans \mathcal{W} à des équivalences de Quillen. On va dire que \mathcal{F} est **propre à gauche** si pour tout morphisme $f \in \mathcal{W} \cap \text{Cof}$ le foncteur de Quillen à gauche $f_!$ préserve les équivalences faibles. On va dire que \mathcal{F} est **propre à droite** si pour tout morphisme $f \in \mathcal{W} \cap \text{Fib}$ le foncteur de Quillen à droite f^* préserve les équivalences faibles. Finalement, on va dire que \mathcal{F} est **propre** s'il est propre à gauche est propre à droite.

Le premier résultat de l'article [8] est le suivant :

THÉORÈME 4.6 ([8]). *Soit \mathcal{M} une pré-catégorie de modèles et soit $\mathcal{F} : \mathcal{M} \rightarrow \text{ModCat}$ un foncteur propre et relatif. Alors*

$$\pi : \int_{\mathcal{M}} \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{M}$$

*est une fibration de modèles, où $\int_{\mathcal{M}} \mathcal{F}$ est munie des trois classes **W**, **Cof** et **Fib** de la définition 4.4.*

Notons que par le remarque 4.2, ci \mathcal{M} dans le theoreme 4.6 est une catégorie de modèles, alors $\int_{\mathcal{M}} \mathcal{F}$ devient également une catégorie de modèles. Plusieurs exemples d'intérêt de cette situation sont exposés dans [8], y compris les exemples suivants :

EXEMPLES 4.7.

- (1) Soit \mathcal{M} une catégorie de modèles propre. Alors les foncteurs $\mathcal{F}(A) = \mathcal{M}_{/A}$ et $\mathcal{F}(A) = \mathcal{M}_{A/}$ sont propres et relatifs. Dans les deux cas la catégorie $\int_{\mathcal{M}} \mathcal{F}$ est équivalente à la catégorie des flèches de \mathcal{M} . Toutefois, dans le premier cas la structure de modèles fournie par le théorème 4.6 est la structure de modèles injective sur la catégorie des flèches, est dans le deuxième cas on obtient la structure de modèles projective.
- (2) Si \mathcal{M} est une catégorie de modèles monoïdale satisfaisant à des certaines hypothèses, alors on peut mettre une structure de modèles appropriée sur la catégorie $\text{Alg}(\mathcal{M})$ des algèbres associatives. Dans l'article [8] on montre que sous des

conditions assez faibles le foncteur qui associe à chaque algèbre sa catégorie de modules à gauche est propre et relatif, et on obtient une structure de modèles induite sur la catégorie $\int_{A \in \text{Alg}(\mathcal{M})} \text{Mod}(A)$ des algèbres et modules. En supposant des conditions plus fortes on peut faire une construction similaire pour les algèbres commutatives.

- (3) Si \mathcal{M} est la catégorie des groupes simpliciaux on peut considérer le foncteur qui associe à chaque groupe simplicial G sa catégorie des G -espaces. Cette exemples ainsi que plusieurs de ses variantes sont examinés de façon approfondie dans l'article [9].

Notons $\text{Fun}_{\text{PR}}(\mathcal{M}, \text{ModCat}) \subseteq \text{Fun}(\mathcal{M}, \text{ModCat})$ la sous $(2, 1)$ -catégorie pleine dont les objets sont les foncteurs propres et relatifs. Le résultat principal de [8] est alors le théorème suivant, qui peut être considéré comme analogue de la correspondance classique de Grothendieck dans le cadre de catégories de modèles.

THÉORÈME 4.8. *Soit \mathcal{M} une pré-catégorie de modèles. Alors le foncteur*

$$\int_{\mathcal{M}} : \text{Fun}_{\text{PR}}(\mathcal{M}, \text{ModCat}) \longrightarrow \text{ModFib}(\mathcal{M})$$

est une équivalence de $(2, 1)$ -catégories.

Nous allons maintenant décrire brièvement les idées principales de la preuve du théorème 4.8. On utilise le lemme clé suivant :

LEMME 4.9. *Soit $\pi : \mathcal{N} \longrightarrow \mathcal{M}$ une fibration de modèles et soit*

$$(17) \quad \begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\psi} & Y \\ \downarrow \varphi & & \downarrow \varphi' \\ X' & \xrightarrow{\eta} & Y' \end{array}$$

un carré commutatif dans \mathcal{N} . Alors :

- (1) *Si ψ, η sont π -cocartésiens, φ est une cofibration (triviale) dans \mathcal{N} et $\pi(\varphi')$ est une cofibration (triviale) dans \mathcal{M} alors φ' est une cofibration (triviale) dans \mathcal{N} .*
- (2) *Si ψ, η sont π -cartésiens, φ est une fibration (triviale) dans \mathcal{N} et $\pi(\varphi')$ est une fibration (triviale) dans \mathcal{M} alors φ' est une fibration (triviale) dans \mathcal{N} .*

DÉMONSTRATION. Prouvons l'énoncé (1) pour le cas où φ est une cofibration dans \mathcal{N} tel que $\pi(\varphi')$ est une cofibration dans \mathcal{M} (la preuve pour le reste des cas est complètement analogue). Il suffit de montrer que φ' a la propriété de relèvement à gauche relativement à toutes les fibrations triviales dans \mathcal{N} . Soit

$$\begin{array}{ccccc} X & \xrightarrow{\psi} & Y & \xrightarrow{\psi'} & Z \\ \downarrow \varphi & & \downarrow \varphi' & & \downarrow \rho \\ X' & \xrightarrow{\eta} & Y' & \xrightarrow{\eta'} & Z \end{array}$$

une extension du diagramme (17) tel que ρ est une fibration triviale. Le carré le plus à droite dans le diagramme projeté

$$(18) \quad \begin{array}{ccccc} \pi(X) & \xrightarrow{\pi\psi} & \pi(Y) & \longrightarrow & \pi(Z) \\ \pi\varphi \downarrow & & \pi\varphi' \downarrow & \dashrightarrow & \downarrow \pi\rho \\ \pi(X') & \xrightarrow{\pi\eta} & \pi(Y') & \longrightarrow & \pi(Z') \end{array}$$

admet le relèvement en pointillé, ce qui donne le relèvement en tirets pour le rectangle extérieur par composition. En utilisant la condition (3) de la définition 4.3 on peut relever la flèche en tirets de (18) à la flèche en tirets ν dans le diagramme

$$(19) \quad \begin{array}{ccccc} X & \xrightarrow{\psi} & Y & \xrightarrow{\psi'} & Z \\ \varphi \downarrow & & \varphi' \downarrow & \dashrightarrow & \downarrow \rho \\ X' & \xrightarrow{\eta} & Y' & \xrightarrow{\eta'} & Z' \end{array}$$

et on obtient un relèvement pour le rectangle extérieur de (19). Pour finir l'argument il faut établir l'existence du relèvement en pointillé ξ dans (19). Notons que la flèche en pointillé de (18) est une factorisation de $\pi\nu$ le long de $\pi\eta$. Comme η est π -cocartésien il existe une flèche unique ξ dans (19) qui factorise la flèche en tirets de (19) le long de η . En utilisant les propriétés des flèches cocartésienne on peut en déduire que $\rho\xi$ est nécessairement égal à η' et que $\chi\varphi'$ est nécessairement égal à ψ' . Il s'ensuit que ξ est en effet un relèvement pour le carré le plus à droite. \square

Nous allons maintenant esquisser la preuve du théorème 4.8. Soit \mathcal{M} une pré-catégorie de modèles. On va noter AdjCat la $(2, 1)$ -catégorie dont les objets sont les petites catégories et dont les morphismes sont les adjonctions. Une variante de la correspondance de Grothendieck affirme qu'un foncteur $\mathcal{M} \rightarrow \text{AdjCat}$ correspond à un foncteur $\mathcal{N} \rightarrow \mathcal{M}$ qui est à la fois cartésien et cocartésien. Appelons une telle fibration une fibration **bicartésienne**. On a un diagramme commutatif naturel des $(2, 1)$ -catégories

$$\begin{array}{ccc} \text{Fun}_{\text{PR}}(\mathcal{M}, \text{ModCat}) & \xrightarrow{f_{\mathcal{M}}} & \text{ModFib}(\mathcal{M}) \\ U \downarrow & & \downarrow V \\ \text{Fun}(\mathcal{M}, \text{AdjCat}) & \xrightarrow{\simeq} & \text{BiCarFib}(\mathcal{M}) \end{array}$$

où les foncteurs verticaux sont fidèles. Il suffit, alors, de démontrer les énoncés suivants :

- (1) Le foncteur $f_{\mathcal{M}}$ est essentiellement surjective.
- (2) Soit $\mathcal{F}, \mathcal{G} : \mathcal{M} \rightarrow \text{ModCat}$ des foncteurs propres et relatifs et soit $(\sigma, \tau) : U(\mathcal{F}) \Rightarrow U(\mathcal{G})$ une transformation pseudo-naturelle telle que l'adjonction induite

$$\begin{array}{ccc} \int_{\mathcal{M}} \mathcal{F} & \begin{array}{c} \xrightarrow{\sigma_*} \\ \perp \\ \xleftarrow{\tau_*} \end{array} & \int_{\mathcal{M}} \mathcal{G} \\ & \searrow & \swarrow \\ & \mathcal{M} & \end{array}$$

est une adjonction de Quillen. Alors l'adjonction $(\sigma, \tau)_A : \mathcal{F}(A) \rightleftarrows \mathcal{G}(A)$ est une adjonction de Quillen pour tout $A \in \mathcal{M}$.

Commençons avec l'énoncé (1). Soit $\pi : \mathcal{N} \rightarrow \mathcal{M}$ une fibration de modèles. Comme π est bicartésien, il détermine un foncteur $\mathcal{F} : \mathcal{M} \rightarrow \text{AdjCat}$. Pour chaque $A \in \mathcal{M}$, la catégorie $\mathcal{F}(A)$ peut être identifiée avec la fibre $\mathcal{N} \times_{\mathcal{M}} \{A\}$. Comme $\mathcal{N} \times_{\mathcal{M}} \{A\} \rightarrow *$ est une fibration de modèles, il s'ensuit que la pré-catégorie de modèles $\mathcal{N} \times_{\mathcal{M}} \{A\}$ est en fait une catégorie de modèles. Soit $f : A \rightarrow B$ un morphisme. On affirme maintenant que l'adjonction induite

$$\mathcal{F}(A) \begin{array}{c} \xrightarrow{f_!} \\ \perp \\ \xleftarrow{f^*} \end{array} \mathcal{F}(B)$$

est une adjonction de Quillen. En effet, on peut tout simplement appliquer le lemme 4.9 à des carrés de la forme

$$\begin{array}{ccc} X & \longrightarrow & Y \\ \varphi \downarrow & & \downarrow f_! \varphi \\ X' & \longrightarrow & Y' \end{array}$$

où $\varphi : X \rightarrow X'$ est une cofibration (triviale) au-dessus de l'identité $A \rightarrow A$ et les flèches horizontales sont π -cocartésiennes. On peut donc considérer \mathcal{F} comme un foncteur $\mathcal{F} : \mathcal{M} \rightarrow \text{ModCat}$. On va maintenant montrer que \mathcal{F} est relatif.

Soit $f : A \rightarrow B$ une équivalence faible dans \mathcal{M} . Soit $X \in \mathcal{N}$ un objet cofibrant au-dessus de A et soit $Y \in \mathcal{N}$ un objet fibrant au-dessus de B . Soit $\psi : X \rightarrow f_! X$ un relèvement cocartésien de f et $\eta : f^* Y \rightarrow Y$ un relèvement cartésien de f . Chaque flèche $\varphi : X \rightarrow Y$ au-dessus de f détermine à la fois une flèche $\phi : f_! X \rightarrow Y$ dans $\mathcal{F}(B)$ en factorisant le long de ψ et une flèche $\phi^{\text{ad}} : X \rightarrow f^* Y$ en factorisant le long de η . On obtient alors un carré commutatif de la forme

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\psi} & f_! X \\ \phi^{\text{ad}} \downarrow & \searrow \varphi & \downarrow \phi \\ f^* Y & \xrightarrow{\eta} & Y \end{array}$$

Invoquons les conditions (2) et (3) de la définition 4.3 on peut en déduire que ψ et η sont des équivalences faibles. En utilisant le condition (2) de la définition 4.1 il s'ensuit que

$$\phi^{\text{ad}} \in \mathcal{W}_{\mathcal{N}} \Leftrightarrow \varphi \in \mathcal{W}_{\mathcal{N}} \Leftrightarrow \phi \in \mathcal{W}_{\mathcal{N}}$$

et alors $f_! \dashv f^*$ est une adjonction de Quillen. Cela prouve l'énoncé (1) ci-dessus. Pour l'énoncé (2), il suffit de remarquer que pour chaque $A \in \mathcal{M}$ on a $\mathcal{F}(A) \cong (\int_{\mathcal{M}} \mathcal{F}) \times_{\mathcal{M}} \{A\}$ et $\mathcal{G}(A) \cong (\int_{\mathcal{M}} \mathcal{G}) \times_{\mathcal{M}} \{A\}$ avec les structures de modèles induites par restriction.

4.3. Les pro-catégories dans la théorie de l'homotopie ([10])

Assez souvent, les catégories qui nous intéressent sont grosses : leur collection d'objets est une classe propre, même si on considère les objets à isomorphisme près. Cela est le cas, par exemple, pour la catégorie des ensembles, la catégorie des groupes, ou la catégorie des anneaux. Toutefois, dans tous ces exemples, la grosse catégorie est déterminée par une petite sous-catégorie appropriée. Élaborant sur

ce phénomène, on remarque qu'il y a, en général, deux façons par lesquelles une grosse catégorie peut être déterminée par une petite sous-catégorie. La première façon est par la formation de **colimites**, et la deuxième par la formation de **limites**. Considérons deux exemples. Pour le premier cas soit Set la catégorie des ensembles, et pour le deuxième soit $\text{Gr}^{\text{profin}}$ la catégorie de groupes profinis. Les petites sous-catégories pertinentes sont la sous-catégorie pleine $\text{Set}^{\text{fin}} \subseteq \text{Set}$ dont les objets sont les ensembles finis et la sous-catégorie pleine $\text{Gp}^{\text{fin}} \subseteq \text{Gr}^{\text{profin}}$ dont les objets sont les groupes finis.

Étant donné un ensemble arbitraire $A \in \text{Set}$, soit $P_{\text{fin}}(A)$ l'ensemble partiellement ordonné de sous-ensembles finis de A , où on met $A' \leq A''$ si $A' \subseteq A''$. De façon similaire, pour un groupe profini G , soit $Q_{\text{fin}}(G)$ l'ensemble partiellement ordonné de quotients finis $G \twoheadrightarrow G'$, où on met $G' \leq G''$ si le quotient $G \twoheadrightarrow G''$ se factorise le long de G' . On peut considérer tout ensemble partiellement ordonné comme une catégorie, dont l'ensemble des morphismes $\text{Hom}(x, y)$ est un singleton si $x \leq y$ est vide autrement. Pour chaque ensemble A et pour chaque groupe profini G , on a des applications naturelles

$$\text{colim}_{A' \in P_{\text{fin}}(A)} A' \longrightarrow A$$

et

$$G \longrightarrow \lim_{G' \in Q_{\text{fin}}(G)} G',$$

et on peut directement vérifier qu'ils sont tous deux des isomorphismes. Ces isomorphismes sont assez familiers : le premier identifie un ensemble avec la colimite (ou union) de ses sous-ensembles finis, et le deuxième identifie un groupe profini comme la limite projective de ses quotients finis.

Du point de vue de la théorie des catégories, l'histoire n'est pas encore finie. Pour dire qu'une grosse catégorie est déterminée par une petite sous-catégorie il faut également montrer que les **morphismes** entre les objets « gros » sont déterminés par les morphismes entre les objets « petits ». Pour cela nous observons que si $f : A \longrightarrow B$ est une application d'ensembles, alors pour tout sous-ensemble fini $A' \subseteq A$ l'application restreinte $A' \longrightarrow B$ se factorise le long d'un sous-ensemble fini $B' \subseteq B$. De façon similaire, si $G \longrightarrow H$ est une application des groupes profinis et $H \twoheadrightarrow H'$ est un quotient fini de H alors l'application composée $G \longrightarrow H \longrightarrow H'$ se factorise le long d'un quotient fini de G . Cela nous conduit assez directement aux formules

$$\text{Hom}_{\text{Set}}(A, B) \cong \lim_{A' \in P_{\text{fin}}(A)} \text{colim}_{B' \in P_{\text{fin}}(B)} \text{Hom}_{\text{Set}^{\text{fin}}}(A', B')$$

et

$$\text{Hom}_{\text{Gr}^{\text{profin}}}(G, H) \cong \lim_{H' \in Q_{\text{fin}}(H)} \text{colim}_{G' \in Q_{\text{fin}}(G)} \text{Hom}_{\text{Gr}^{\text{fin}}}(G', H').$$

Il est dès lors justifié de dire que la catégorie Set comme un tout est déterminée par Set^{fin} , et que $\text{Gr}^{\text{profin}}$ est déterminé par Gr^{fin} . Pour exprimer cette idée plus formellement nous allons maintenant donner quelques définitions. Comme notre motivation ici tend plus à des exemples comme $\text{Gp}^{\text{profin}}$ nous formulerons les définitions dans cette orientation.

DÉFINITION 4.10. Soit \mathcal{J} une petite catégorie. On va dire que \mathcal{J} est **cofiltrée** si les conditions suivantes valent :

- (1) Pour tout $x, y \in \mathcal{J}$ il existe un $z \in \mathcal{J}$ et des flèches $z \longrightarrow x$ et $z \longrightarrow y$.

- (2) Pour tout $f, g : x \longrightarrow y$ dans \mathcal{J} il existe une flèche $h : z \longrightarrow x$ tel que $f \circ h = g \circ h$.

Dualement, on dit que \mathcal{J} est **filtrée** si \mathcal{J}^{op} est cofiltrée.

DÉFINITION 4.11. Soit \mathcal{C} une catégorie. Un **pro-objet** dans \mathcal{C} est un diagramme $\{X_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{J}}$ dans \mathcal{C} indexé par une petite catégorie cofiltrée \mathcal{J} . On définit l'ensemble des morphismes entre deux pro-objets par la formule

$$\text{Hom}(\{X_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{J}}, \{Y_\beta\}_{\beta \in \mathcal{J}}) \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{\beta \in \mathcal{J}} \text{colim}_{\alpha \in \mathcal{J}} \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X_\alpha, Y_\beta).$$

On note $\text{Pro}(\mathcal{C})$ la catégorie dont les objets sont les pro-objets dans \mathcal{C} et dont les ensembles de morphismes sont comme ci-dessus. La catégorie $\text{Pro}(\mathcal{C})$ est connue comme la **pro-catégorie** de \mathcal{C} .

REMARQUE 4.12. En dualisant la définition 4.11 et en utilisant les diagrammes filtrés au lieu de diagrammes cofiltrés, on obtient la notion de **ind-objet** et de la **ind-catégorie** $\text{Ind}(\mathcal{C})$ de \mathcal{C} . En particulier, un ind-objet de \mathcal{C} peut être décrit également comme un pro-objet de \mathcal{C}^{op} , et on a une équivalence naturelle $\text{Ind}(\mathcal{C}) \simeq \text{Pro}(\mathcal{C}^{\text{op}})^{\text{op}}$.

EXEMPLES 4.13.

- (1) La catégorie $\text{Gr}^{\text{profin}}$ des groupes profinis est naturellement équivalente à la pro-catégorie de la catégorie des groupes finis.
- (2) La catégorie des espaces topologiques Hausdorff, compacts et totalement discontinus, est naturellement équivalente à la pro-catégorie de la catégorie des ensembles finis.
- (3) La catégorie des groupes topologiques Hausdorff compacts est naturellement équivalente à la pro-catégorie de la catégorie des groupes de Lie.
- (4) La catégorie des ensembles est naturellement équivalente à la ind-catégorie de la catégorie des ensembles finis.
- (5) La catégorie des groupes est naturellement équivalente à la ind-catégorie de la catégorie des groupes de présentation finie. Un énoncé similaire vaut pour les anneaux, les modules, et d'autres types de catégories algébriques.

Pour toute catégorie \mathcal{C} , la catégorie $\text{Pro}(\mathcal{C})$ admet les limites cofiltrées (c'est-à-dire, les limites des diagrammes indexés par catégories cofiltrées), et ceux-là peuvent être évalués « formellement ». On remarque qu'il y a un plongement canonique $\iota : \mathcal{C} \longrightarrow \text{Pro}(\mathcal{C})$, où $\iota(X)$ est le diagramme constant sur X indexé par la catégorie triviale. Effectivement, la catégorie $\text{Pro}(\mathcal{C})$ est la catégorie universelle avec limites cofiltrées qui reçoit un foncteur de \mathcal{C} : si \mathcal{D} est une autre catégorie avec limites cofiltrées, alors la restriction le long de ι induit une équivalence entre la catégorie des foncteurs $\text{Pro}(\mathcal{C}) \longrightarrow \mathcal{D}$ qui respectent les limites cofiltrées et la catégorie des foncteurs $\mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ quelconques. On dit que la catégorie $\text{Pro}(\mathcal{C})$ est obtenue de \mathcal{C} en **librement ajoutant** limites cofiltrées.

L'avatar des pro-catégories dans le domaine des catégories supérieures a été développé dans la littérature de deux façons parallèles, en correspondance avec les deux chemins principaux qui conduisent la théorie de l'homotopie moderne (voir 4.1). Dans le cadre d' ∞ -catégories, on peut adapter la notion de limite cofiltrée et par conséquent définir la pro-catégorie d'une ∞ -catégorie \mathcal{C} par la propriété universelle, c'est-à-dire, montrer qu'il existe une ∞ -catégorie $\text{Pro}(\mathcal{C})$ universelle avec

limites cofiltrées qui admet un foncteur de \mathcal{C} . Cela a été accompli dans [Lu09] pour \mathcal{C} petite et dans [Lu11] pour \mathcal{C} accessible avec limites finies. D'un autre côté, si \mathcal{C} est une catégorie de modèles, on peut essayer de construire une structure de modèles sur $\text{Pro}(\mathcal{C})$ qui est naturellement héritée de celle de \mathcal{C} . Cela a été accompli dans [EH76] exclusivement sous certaines conditions (la « condition N ») et après dans [Is04] pour \mathcal{C} une catégorie de modèles propre. Dans [BS15a] I. Barnea et T. Schlank a observé qu'une structure plus faible sur \mathcal{C} est suffisante pour obtenir une structure de modèles sur $\text{Pro}(\mathcal{C})$, sous certaines conditions.

DÉFINITION 4.14. Une **catégorie de fibrations faible** est une catégorie \mathcal{C} munie de deux sous-catégories $\text{Fib}, \mathcal{W} \subseteq \mathcal{C}$, contenant tous les isomorphismes, tel que les conditions suivantes valent :

- (1) \mathcal{C} admet les limites finies.
- (2) \mathcal{W} a la propriété de 2-sur-3.
- (3) Pour tout carré cartésien

$$\begin{array}{ccc} X & \longrightarrow & Y \\ \downarrow g & & \downarrow f \\ Z & \longrightarrow & W \end{array}$$

avec $f \in \text{Fib}$ (resp. $f \in \text{Fib} \cap \mathcal{W}$), on a $g \in \text{Fib}$ (resp. $g \in \text{Fib} \cap \mathcal{W}$).

- (4) Tout morphisme $f : X \longrightarrow Y$ peut être factorisé comme $X \xrightarrow{f'} Z \xrightarrow{f''} Y$ où $f' \in \mathcal{W}$ et $f'' \in \text{Fib}$.

Dans l'article [10], en commun avec I. Barnea et J. Horel, nous avons identifié quelques propriétés communes à toutes les structures de modèles sur $\text{Pro}(\mathcal{C})$ construit dans les travaux cités ci-dessus. Ces propriétés peuvent être formulées quand \mathcal{C} est une catégorie de fibrations faible. Quand une structure de modèles sur $\text{Pro}(\mathcal{C})$ satisfait ces propriétés on dit que cette structure de modèles est **induite** par la structure de catégorie de fibrations faible sur \mathcal{C} . Quand \mathcal{C} est petite cela coïncide avec la condition que la structure de modèles sur $\text{Pro}(\mathcal{C})$ est engendrée par les fibrations et les fibrations triviales de \mathcal{C} . Quand \mathcal{C} n'est pas petite on utilise une condition un peu plus élaborée. Notons en tous cas que si une structure de modèles induite sur $\text{Pro}(\mathcal{C})$ existe, alors elle est unique. Le théorème principal de l'article [10] est le suivant :

THÉORÈME 4.15. *Soit \mathcal{C} une catégorie de fibrations faible. Si la structure de modèles induite sur $\text{Pro}(\mathcal{C})$ existe alors le foncteur naturel*

$$\text{Pro}(\mathcal{C})_\infty \longrightarrow \text{Pro}(\mathcal{C}_\infty)$$

est une équivalence d' ∞ -catégories.

Rappelons que pour \mathcal{D} une catégorie de fibrations ou une catégorie de modèles, on note \mathcal{D}_∞ l' ∞ -catégorie modelée par \mathcal{D} . L'énoncé du théorème 4.15 peut être décrit de la façon suivante : si \mathcal{C} est une catégorie de fibrations faible, alors on peut soit prendre l' ∞ -catégorie \mathcal{C}_∞ modelée par \mathcal{C} , et considérer la pro- ∞ -catégorie $\text{Pro}(\mathcal{C}_\infty)$ associée à \mathcal{C} par la théorie des ∞ -catégories, soit prendre $\text{Pro}(\mathcal{C})$ avec la structure de modèles induite (dont on suppose l'existence), et considérer l' ∞ -catégorie modelée par $\text{Pro}(\mathcal{C})$. Le théorème 4.15 affirme que les deux options donnent des ∞ -catégories qui sont canoniquement équivalentes.

EXEMPLES 4.16.

- (1) Si \mathcal{M} est une catégorie de modèles propre alors la structure de modèles induite sur $\text{Pro}(\mathcal{M})$ existe par le travail de Isaksen ([Is04]). Par exemple, si \mathcal{M} est la catégorie des ensembles simpliciaux avec la structure de modèles de Kan-Quillen alors \mathcal{M} est un modèle pour l' ∞ -catégorie d'espaces, et par le théorème 4.15 on obtient que $\text{Pro}(\mathcal{M})$ avec la structure de modèles induite est un modèle pour l' ∞ -catégorie des pro-espaces. Nous reviendrons sur cet exemple lorsque nous aborderons les applications à la théorie de l'homotopie profinie.
- (2) Soit \mathcal{T} un site de Grothendieck. Alors la catégorie \mathcal{C} des faisceaux simpliciaux sur \mathcal{T} avec des équivalences faibles locales et des fibrations locales est une catégorie de fibrations faible qui forme un modèle pour l' ∞ -catégorie des faisceaux d'espaces sur \mathcal{T} . Par les résultats de [BS15a] la structure de modèles induite sur $\text{Pro}(\mathcal{C})$ existe, et alors par le théorème 4.15, on obtient que $\text{Pro}(\mathcal{C})$ est un modèle pour l' ∞ -catégorie des pro-faisceaux d'espaces sur \mathcal{T} . Nous reviendrons sur cet exemple lorsque nous aborderons les applications à la théorie de l'homotopie étale.

La preuve du théorème 4.15 nécessite, en particulier, de pouvoir comparer les espaces de morphismes dans $\text{Pro}(\mathcal{C})_\infty$ et $\text{Pro}(\mathcal{C}_\infty)$. Remarquons que si \mathcal{D} est une ∞ -catégorie alors les espaces de morphismes dans $\text{Pro}(\mathcal{D})$ admettent une formule analogue au cas des catégories ordinaires, en remplaçant les limites et colimites avec les limites et colimites homotopiques correspondantes. Pour prouver le théorème 4.15 il faut alors établir une formule similaire pour les espaces de morphismes dérivés dans la structure de modèles induite sur $\text{Pro}(\mathcal{C})$. Plus précisément, on veut démontrer que pour $\{X_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{J}}, \{Y_\beta\}_{\beta \in \mathcal{J}} \in \text{Pro}(\mathcal{C})$ on a

$$(20) \quad \text{Map}_{\text{Pro}(\mathcal{C})}^h(\{X_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{J}}, \{Y_\beta\}_{\beta \in \mathcal{J}}) \simeq \text{holim}_{\beta \in \mathcal{J}} \text{hocolim}_{\alpha \in \mathcal{J}} \text{Map}_{\mathcal{C}}^h(X_\alpha, Y_\beta)$$

où on a utilisé la notation $\text{Map}^h(-, -)$ pour les espaces de morphismes dérivés. Pour établir la formule (20) nous utilisons un modèle pratique pour les espaces de morphismes dérivés dans les catégories de fibrations, dû à Cisinski.

DÉFINITION 4.17. Soit \mathcal{C} une catégorie de fibrations faible et soit $X, Y \in \mathcal{C}$ deux objets. On note $\underline{\text{Hom}}_{\mathcal{C}}(X, Y) \subseteq \mathcal{C}_{/X \times Y}$ la sous-catégorie pleine comprenant les objets $X \xleftarrow{p} Z \xrightarrow{f} Y$ tel que p est une fibration triviale.

Rappelons que $\mathcal{C}_{/X \times Y}$ désigne la catégorie dont les objets sont des couples (Z, h) où $Z \in \mathcal{C}$ est un objet et $h : Z \rightarrow X \times Y$ est un morphisme (ce qu'on peut également écrire comme un diagramme $X \xleftarrow{p} Z \xrightarrow{f} Y$). Il y a une application naturelle

$$(21) \quad \text{N}\underline{\text{Hom}}_{\mathcal{C}}(X, Y) \rightarrow \text{Map}_{\mathcal{C}}^h(X, Y)$$

où $\text{N}\underline{\text{Hom}}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ désigne le nerf de la catégorie $\underline{\text{Hom}}_{\mathcal{C}}(X, Y)$.

THÉORÈME 4.18 (Cisinski). *Soit \mathcal{C} une catégorie de fibrations faible. Alors pour tout $X, Y \in \mathcal{C}$ fibrantes l'application (21) est une équivalence faible.*

La première étape dans la preuve du théorème 4.15 est d'établir la formule (20) pour les espaces de morphismes dérivés dans la structure de modèles induite sur $\text{Pro}(\mathcal{C})$, où \mathcal{C} est une catégorie de fibrations faible. Observons que la formule (20) signifie, en particulier, que les flèches $Y \rightarrow Y_\beta$ présentent Y comme la limite

homotopique du diagramme $\{Y_\beta\}_{\beta \in \mathcal{J}}$. Dans notre cas cet énoncé est essentiellement une conséquence de la proposition suivante, prouvée dans [10] :

PROPOSITION 4.19. *Soit \mathcal{C} une catégorie de fibrations faible. Si la structure de modèles induite sur $\text{Pro}(\mathcal{C})$ existe alors toutes les équivalences faibles niveau-par-niveau sont des équivalences faibles dans $\text{Pro}(\mathcal{C})$.*

Rappelons qu'une équivalence faible niveau-par-niveau est un morphisme $f : \{X_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{J}} \rightarrow \{Y_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{J}}$ induit par une transformation naturelle $T_\alpha : X_\alpha \rightarrow Y_\alpha$ tel que chaque T_α est une équivalence faible dans \mathcal{C} .

COROLLAIRE 4.20. *Soit \mathcal{C} une catégorie de fibrations faible et soit $\{Y_\beta\}_{\beta \in \mathcal{J}} \in \text{Pro}(\mathcal{C})$ un pro-objet. Soit $\overline{\mathcal{F}} : \mathcal{J}^\triangleleft \rightarrow \text{Pro}(\mathcal{C})$ un diagramme de limite étendant le diagramme $\beta \mapsto Y_\beta$ (ce qui signifie que $\overline{\mathcal{F}}(*) \cong \{Y_\beta\}$). Alors $\overline{\mathcal{F}}$ est également un diagramme de limite homotopique.*

DÉMONSTRATION. En utilisant des arguments assez généraux on peut réduire la preuve au cas où Y est indexé par un ensemble partiellement ordonné bien fondé (et cofiltré). Pour calculer la limite homotopique du diagramme $\{Y_\beta\}$ dans $\text{Pro}(\mathcal{C})$ il faut d'abord le remplacer par un diagramme injectivement fibrant $\beta \mapsto Y'_\beta \in \text{Pro}(\mathcal{C})$ qui est équivalent à $\{Y_\beta\}$ niveau-par-niveau. En utilisant la structure assez simple des ensembles partiellement ordonnés bien fondés on peut choisir notre Y'_β tel que $Y'_\beta \in \mathcal{C} \subseteq \text{Pro}(\mathcal{C})$, et par conséquent interpréter $\{Y'_\beta\}$ comme un pro-objet. Soit $\overline{\mathcal{F}}' : \mathcal{J}^\triangleleft \rightarrow \text{Pro}(\mathcal{C})$ un diagramme de limite étendant le diagramme $\beta \mapsto Y'_\beta$, ce qui signifie que $\overline{\mathcal{F}}'(*) \cong \{Y'_\beta\}$. Comme $\overline{\mathcal{F}}'|_{\mathcal{J}}$ est injectivement fibrante par construction on peut en déduire que $\overline{\mathcal{F}}'$ est un diagramme de limite homotopique. La flèche naturelle $\overline{\mathcal{F}} \rightarrow \overline{\mathcal{F}}'$ est une équivalence faible en chaque $\beta \in \mathcal{J}$ et une équivalence faible en $*$ $\in \mathcal{J}^\triangleleft$ par la proposition 4.19. Il s'ensuit que $\overline{\mathcal{F}}$ est un diagramme de limite homotopique. \square

Avoir établi le corollaire 4.20, la formule (20) est réduite à la proposition suivante :

PROPOSITION 4.21. *Soit $X = \{X_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{J}}$ un pro-objet et $Y \in \mathcal{C} \subseteq \text{Pro}(\mathcal{C})$ un objet. Alors la collection compatible des flèches $X \rightarrow X_\alpha$ induit une équivalence faible*

$$\text{hocolim}_{\alpha \in \mathcal{J}} \text{Map}_{\mathcal{C}}^{\text{h}}(X_\alpha, Y) \xrightarrow{\cong} \text{Map}_{\text{Pro}(\mathcal{C})}^{\text{h}}(X, Y)$$

Nous allons décrire les idées principales de la preuve de la proposition 4.21. En utilisant le modèle 4.18 pour les espaces de morphismes on peut voir que $\text{Map}_{\text{Pro}(\mathcal{C})}^{\text{h}}(X, Y)$ dépend fortement des fibrations triviales $X' \xrightarrow{\cong} X$ dans $\text{Pro}(\mathcal{C})$, alors que $\text{Map}_{\mathcal{C}}(X_\alpha, Y)$ dépend des fibrations triviales dans \mathcal{C} de la forme $X'_\alpha \rightarrow X_\alpha$. Pour lier les deux types de données on a besoin de savoir que les fibrations triviales $X' \xrightarrow{\cong} X$ qui peuvent être écrites comme de fibrations triviales niveau-par-niveau sont assez répandues. Quand \mathcal{C} est petite ça peut être obtenu par une version duale de l'argument de l'objet petit. Quand \mathcal{C} n'est pas petite un argument plus élaboré est requis, pour lequel la définition d'une structure de modèles induite sur $\text{Pro}(\mathcal{C})$ doit être adéquatement adaptée.

Nous allons maintenant décrire deux applications du théorème principal 4.15. La première application concerne la théorie de la forme dans le contexte de topoi.

Rappelons (voir § 1.2) que dans [AM69] Artin et Mazur ont défini le **type d'homotopie étale** d'une variété algébrique. Cela est un pro-objet dans la catégorie d'homotopie des espaces, qui ne dépend que du site étale de X . La construction dans [AM69] est fondée sur la construction de la **forme** d'un espace topologique, ce qui est un pro-objet construit de façon similaire au site des sous-ensembles ouverts. Plus généralement, la construction de Artin et Mazur peut être appliquée à tout site de Grothendieck localement connexe \mathcal{T} .

Dans [BS15a] I. Barnea et T. Schlank ont utilisé la structure de modèles induite sur la pro-catégorie de la catégorie des faisceaux simpliciaux sur un site de Grothendieck \mathcal{T} pour définir ce qu'ils appellent la **réalisation topologique** de \mathcal{T} . Cela est un pro-objet dans la catégorie de modèles $\text{Pro}(\mathcal{S})$ des pro-ensembles simpliciaux. Quand \mathcal{T} est un site localement connexe leur construction enlève la construction de Artin et Mazur de $\text{Pro}(\text{Ho}(\mathcal{S}))$ à $\text{Pro}(\mathcal{S})$. Du côté de la théorie des ∞ -catégories, Lurie a construit dans [Lu09] une variante analogue de la théorie de la forme dans le cadre de la théorie des ∞ -topoi. Sa construction a associé à chaque ∞ -topos \mathcal{X} un pro-objet $\text{Sh}(\mathcal{X})$ dans l' ∞ -catégorie d'espaces. Une construction similaire apparaît dans les travaux de Toën et Vezzosi ([TV03]). On est alors confronté au même type de question : est-ce que la réalisation topologique construite dans [BS15a] en utilisant le cadre des catégories de modèles est équivalente à celle construite dans [Lu09] avec le langage des ∞ -catégories ? Dans l'article [10] on donne une réponse positive à cette question :

THÉORÈME 4.22. *Soit \mathcal{T} un site de Grothendieck. Alors il y a une équivalence faible de pro-espaces*

$$|\mathcal{T}| \simeq \text{Sh}(\widehat{\text{Sh}}_\infty(\mathcal{T})),$$

où $|\mathcal{T}|$ est la réalisation topologique de \mathcal{T} construite dans [BS15a] et $\text{Sh}(\widehat{\text{Sh}}_\infty(\mathcal{T}))$ est la forme de l' ∞ -topos hypercomplété $\widehat{\text{Sh}}_\infty(\mathcal{T})$ construite dans [Lu09].

En combinant le théorème 4.22 avec [BS15a, Thm 1.11] on obtient :

COROLLAIRE 4.23. *Soit X un schéma localement Noethérien et soit $X_{\text{ét}}$ son site étale. Alors l'image de $\text{Sh}(\widehat{\text{Sh}}_\infty(X_{\text{ét}}))$ dans $\text{Pro}(\text{Ho}(\mathcal{S}))$ coïncide avec le type d'homotopie étale de X .*

La deuxième application du théorème 4.15 concerne la **théorie de l'homotopie profinie**. Soit \mathcal{S} la catégorie des ensembles simpliciaux avec la structure de modèles de Kan-Quillen. Dans ce cas la structure de modèles induite sur $\text{Pro}(\mathcal{S})$ existe, et par théorème 4.15 il forme un modèle pour l' ∞ -catégorie des pro-espaces. Dans [Is05] Isaksen a montré que pour tout ensemble K d'objets fibrants de \mathcal{S} on peut former la localisation de Bousfield à gauche maximale $L_K \text{Pro}(\mathcal{S})$ dans laquelle tous les objets de K sont locaux. En choisissant une collection appropriée K^π , la catégorie de modèles $L_{K^\pi} \text{Pro}(\mathcal{S})$ a été suggérée dans [Is05] comme un cadre pour la théorie de l'homotopie profinie.

D'un autre côté, on peut considérer la théorie de l'homotopie profinie d'un point de vue ∞ -catégorique. Rappelons qu'un espace X est dit π -fini s'il a un nombre fini de composantes et un nombre fini de groupes d'homotopie non nuls dont tous sont finis. La collection d'espaces π -finis peut être organisée en une ∞ -catégorie \mathcal{S}_∞^π et la pro-catégorie associée $\text{Pro}(\mathcal{S}_\infty^\pi)$ peut être également considérée comme le cadre naturel de la théorie de l'homotopie profinie. La question de la comparaison resurgit alors : la catégorie de modèles $L_{K^\pi} \text{Pro}(\mathcal{S})$ constitue-t-elle un

modèle pour l' ∞ -catégorie $\text{Pro}(\mathcal{S}_\infty^\pi)$? Notre théorème principal 4.15 nous permet encore de donner une réponse positive :

THÉORÈME 4.24. *L' ∞ -catégorie modélée par $L_{K^\pi} \text{Pro}(S)$ est naturellement équivalente à $\text{Pro}(\mathcal{S}_\infty^\pi)$.*

Une approche similaire a été entreprise pour étudier la théorie de l'homotopie **p -profinie**, où p est un nombre premier. En choisissant une collection appropriée K^p d'ensembles simpliciaux, la catégorie de modèles $L_{K^p} \text{Pro}(S)$ a été considérée comme un cadre pour la théorie de l'homotopie p -profinie. D'un autre côté, on peut encore considérer la situation d'un point de vue ∞ -catégorique. Rappelons qu'un espace X est dit être **p -fni** s'il est π -fni et si tous ses groupes d'homotopie sont des p -groupes. La collection d'espaces p -fnis peut être organisée en une ∞ -catégorie \mathcal{S}_∞^p et la pro-catégorie associée $\text{Pro}(\mathcal{S}_\infty^p)$ peut être encore considérée comme le cadre naturel de la théorie de l'homotopie p -profinie. On peut alors utiliser encore notre théorème principal 4.15 pour lier les deux approches :

THÉORÈME 4.25. *L' ∞ -catégorie modélée par $L_{K^p} \text{Pro}(S)$ est naturellement équivalente à $\text{Pro}(\mathcal{S}_\infty^p)$.*

L'approche d'Isaksen n'est pas la seule approche à la théorie de l'homotopie profinie et p -profinie qui utilise les catégories de modèles. Dans [Qu11] Quick a construit une structure de modèles sur la catégorie $\widehat{\mathcal{S}}$ des **ensembles profinis simpliciaux** et a offert de l'utiliser comme un cadre pour la théorie de l'homotopie profinie. Sa construction repose sur une construction antérieure développée par Morel ([Mo96]), qui a muni la même catégorie $\widehat{\mathcal{S}}$ d'une structure de modèles visant à étudier la théorie de l'homotopie p -profinie. Pour avoir une liaison complète avec toutes les approches on prouve, dans [10], le théorème suivant :

THÉORÈME 4.26. *Il existe des équivalences de Quillen*

$$L_{K^\pi} \text{Pro}(\mathcal{S}) \begin{array}{c} \xrightarrow{\Psi_{K^\pi}} \\ \perp \\ \xleftarrow{\Phi_{K^\pi}} \end{array} \widehat{\mathcal{S}}_{\text{Quick}}$$

et

$$L_{K^p} \text{Pro}(\mathcal{S}) \begin{array}{c} \xrightarrow{\Psi_{K^p}} \\ \perp \\ \xleftarrow{\Phi_{K^p}} \end{array} \widehat{\mathcal{S}}_{\text{Morel}} .$$

En particulier, $\widehat{\mathcal{S}}_{\text{Quick}}$ modèle en effet l' ∞ -catégorie d'espaces profinis, et $\widehat{\mathcal{S}}_{\text{Morel}}$ modèle l' ∞ -catégorie d'espaces p -profnis.

Références

- [AM69] Artin M., Mazur B. *Étale Homotopy*, Lecture Notes in Mathematics, Vol. 100, Springer-Verlag, Berlin, 1969.
- [BS15a] Barnea I. and Schlank T. M. A projective model structure on pro simplicial sheaves, and the relative étale homotopy type, *Advances in Mathematics*, to appear, 2015.
- [BK12] Barwick C., Kan D. M., Relative categories : another model for the homotopy theory of homotopy theories, *Indagationes Mathematicae*, 23.1, 2012, p. 42–68.
- [BSD01] Bender A. O., Swinnerton-Dyer P., Solubility of certain pencils of curves of genus 1, and of the intersection of two quadrics in \mathbb{P}^4 , *Proceedings of the London Mathematical Society*, 83.2, 2001, p. 299–329.
- [Bi62] Birch B.J., Forms in many variables, *Proceedings of the Royal Society of London A : Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, Vol. 265, No. 1321, The Royal Society, 1962.
- [Bo96] Borovoi M., The Brauer-Manin obstructions for homogeneous spaces with connected or abelian stabilizer, *Journal für die reine und angewandte Mathematik* **473** (1996), p. 181–194.
- [Bo09] Borovoi M., Van Hamel J., Extended Picard complexes and linear algebraic groups, *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, 627, 2009, p. 53–82.
- [BHB14] Browning T. D., Heath-Brown D. R., Forms in many variables and differing degrees, preprint arXiv :1403.5937 ,2014.
- [BP14] Browning T. D., Pankaj V., Cubic hypersurfaces and a version of the circle method for number fields, *Duke Mathematical Journal*, 163.10, 2014, p. 1825–1883.
- [BMS14] Browning T.D., Matthiesen L., Skorobogatov A.N., Rational points on pencils of conics and quadrics with many degenerate fibres, *Annals of Mathematics*, 180.1, 2014, p. 381–402.
- [Ci10a] Cisinski D.-C., Invariance de la K-théorie par équivalences dérivées, *Journal of K-theory : K-theory and its Applications to Algebra, Geometry, and Topology*, 6.3, 2010, p. 505–546.
- [CT88] Colliot-Thélène J.-L., Surfaces rationnelles fibrées en coniques de degré 4, Séminaire de théorie des nombres, Paris 1989 (1988), p. 43–55.
- [CT95] Colliot-Thélène J.-L., L’arithmétique du groupe de Chow des zéro-cycles, *Journal de Théorie des Nombres de Bordeaux*, 7.1, 1995, p. 51–73.
- [CT99] Colliot-Thélène J.-L., Conjectures de type local-global sur l’image des groupes de Chow dans la cohomologie étale, in *Algebraic K-Theory (1997)*, W. Raskind and C. Weibel Ed., *Proceedings of Symposia in Pure Mathematics* 67, American Mathematical Society, 1999, p. 1–12.
- [CT01] Colliot-Thélène J.-L., Hasse principle for pencils of curves of genus one whose jacobians have a rational 2-division point, *Rational points on algebraic varieties*, Birkhäuser Basel, 2001, p. 117–161.
- [CT03] Colliot-Thélène J.-L., Points rationnels sur les fibrations, *Higher dimensional varieties and rational points (Budapest 2001)*, 12, Springer, Berlin 2003, p. 181–194.
- [CTH16] Colliot-Thélène J.-L., Harari D., Approximation forte en famille, *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, 710, 2016, p. 173–198.

- [CTPV] Colliot-Thélène J.-L., Parimala R., Suresh V., Lois de réciprocité supérieures et points rationnels, *Transactions of the American Mathematical Society*, 368.6, 2016, p. 4219–4255.
- [CTS81] Colliot-Thélène J.-L., Sansuc J.-J., On the Chow groups of certain rational surfaces : a sequel to a paper of S. Bloch, *Duke Mathematical Journal*, 48.2, 1981, p. 421–447.
- [CTS87] Colliot-Thélène J.-L., Sansuc J.-J., La descente sur les variétés rationnelles, II, *Duke Mathematical Journal*, 54, 1987, p. 375–492.
- [CTSSD87a] Colliot-Thélène J.-L., Sansuc J.-J., Swinnerton-Dyer, P., Intersections of two quadrics and Châtelet surfaces. I, *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, 373, 1987, p. 37–107.
- [CTSSD87b] Colliot-Thélène J.-L., Sansuc J.-J., Swinnerton-Dyer, P., Intersections of two quadrics and Châtelet surfaces. II, *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, 374, 1987, p. 72–168.
- [CTSSD98a] Colliot-Thélène J.-L., Skorobogatov A. N., and Swinnerton-Dyer P., Rational points and zero-cycles on fibred varieties : Schinzel's hypothesis and Salberger's device, *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, 495, 1998, p. 1–28.
- [CTSSD98b] Colliot-Thélène J.-L., Skorobogatov A. N., and Swinnerton-Dyer P., Hasse principle for pencils of curves of genus one whose Jacobians have rational 2-division points, *Inventiones Mathematicae*, 134, 1998, p. 579–650.
- [CTW12] Colliot-Thélène J.-L., Wittenberg O., Groupe de Brauer et points entiers de deux familles de surfaces cubiques affines, *American Journal of Mathematics*, 134.5, 2012, p. 1303–1327.
- [CTX09] Colliot-Thélène J.-L., Xu F., Brauer—Manin obstruction for integral points of homogeneous spaces and representation by integral quadratic forms, *Compositio Mathematica*, 145.02, 2009, p. 309–363.
- [CTX11] Colliot-Thélène J.-L., Xu F., Strong approximation for the total space of certain quadric fibrations, preprint arXiv :1112.2991, 2011.
- [De09] Demarche C., Obstruction de descente et obstruction de Brauer–Manin étale, *Algebra & Number Theory*, 3.2, 2009, p. 237–254.
- [DSW14] Derenthal U., Smeets A., Wei D., Universal torsors and values of quadratic polynomials represented by norms, *Mathematische Annalen*, 361.3-4, 2014, p. 1021–1042.
- [DHKS14] Dwyer W. G., Hirschhorn P. S., Kan D. M. and Smith J. H., *Homotopy limit functors on model categories and homotopical categories*, American Mathematical Society Providence, RI, 13, 2014.
- [EH76] Edwards D. A. and Hastings H. M., *Čech and Steenrod homotopy theories with applications to geometric topology*, Lecture Notes in Mathematics, 542, 1976, Springer Verlag.
- [Fr15] Friedman R., On the geometry of anticanonical pairs, preprint, arXiv :1502.02560, 2015.
- [GT08] Green B., Tao T., The primes contain arbitrarily long arithmetic progressions, *Annals of Mathematics*, 2008, p. 481–547.
- [GT10] Green B., Tao T., Linear equations in primes, *Annals of Mathematics*, 171, 2010, p. 1753–1850.
- [GT12] Green B., Tao T., The Möbius function is strongly orthogonal to nilsequences, *Annals of Mathematics*, 175, 2012, p. 541–566.
- [GTZ12] Green B., Tao T., Ziegler T., An inverse theorem for the Gowers $U^{s+1}[N]$ -norm, *Annals of Mathematics*, 176, 2012, p. 1231–1372.
- [Gu13] Gundlach F., Integral Brauer–Manin obstructions for sums of two squares and a power, *Journal of the London Mathematical Society*, 2013.
- [vH03] Van Hamel J., The Brauer—Manin obstruction for zero-cycles on Severi—Brauer fibrations over curves, *Journal of the London Mathematical Society*, 68.2, 2003, p. 317–337.

- [Ha02] Harari, D., Groupes algébriques et points rationnels, *Mathematische Annalen*, 322.4, 2002, p. 811–826.
- [Ha10] Harari D., Méthode des fibrations et obstruction de Manin, *Duke Mathematical Journal*, 75, 1994, p. 221–260.
- [HS13] Harari D., Szamuely T., Local-global questions for tori over p -adic function fields, preprint arXiv :1307.4782 (2013).
- [Is04] Isaksen D. C., Strict model structures for pro-categories, *Categorical factorization techniques in algebraic topology (Isle of Skye, 2001)*, Progress in Mathematics, 215, 2004, p. 179–198, Birkhäuser, Basel.
- [Is05] Isaksen D. C., Completions of pro-spaces, *Mathematische Zeitschrift*, 250.1, 2005, p. 113–143.
- [Jo02] Joyal A., Quasi-categories and Kan complexes, *Journal of Pure and Applied Algebra*, 175.1, 2002, p. 207–222.
- [Jo08] Joyal A., The theory of quasi-categories and its applications, Lectures at CRM Barcelona, Feb. 2008.
- [KS86] Kato K., Saito S., Global class field theory of arithmetic schemes, *Contemporary Mathematics*, 55.1, 1986, p. 255–331.
- [Li12a] Liang Y., Principe local-global pour les zéro-cycles sur certaines fibrations au-dessus de l'espace projectif, *Bull. Soc. Math. France* (2012), à paraître.
- [Lo81] Looijenga E., Rational surfaces with an anti-canonical cycle, *Annals of Mathematics*, 114.2, 1981, p. 267–322.
- [Lu09] Lurie J., *Higher Topos Theory*, Annals of Mathematics Studies, 170, Princeton University Press, 2009.
- [Lu14] Lurie J., *Higher Algebra*, manuscript available at <http://www.math.harvard.edu/~lurie/papers/higheralgebra.pdf>.
- [Lu11] Lurie J, Rational and p -adic homotopy theory, 2011, available at <http://math.harvard.edu/~lurie/papers/DAG-XIII.pdf>.
- [Ma70] Manin Y. I., Le groupe de Brauer–Grothendieck en géométrie diophantienne, Actes du Congrès International des Mathématiciens (Nice, 1970), Tome 1, p. 401–411. Gauthier-Villars, 1971.
- [Ma14] Matthiesen L., On the square-free representation function of a norm form and nil-sequences, preprint, arXiv :1409.5028, 2014.
- [MR07] Mazur B., Rubin K., Finding large Selmer rank via an arithmetic theory of local constants, *Annals of Mathematics*, 166, 2007, p. 579–612.
- [MR10] Mazur B., Rubin K., Ranks of twists of elliptic curves and Hilbert's tenth problem, *Inventiones Mathematicae*, 181, 2010, p. 541–575.
- [Mi06] Milne, *Arithmetic Duality Theorems*, second ed., BookSurge, LLC, Charleston, SC, 2006.
- [Mo96] Morel F., Ensembles profinis simpliciaux et interprétation géométrique du foncteur T , *Bulletin de la Société Mathématique de France*, 124.2, 1996, p. 347–373.
- [Na88] Narkiewicz W., Units in residue classes, *Archiv der Mathematik*, 51.3, 1988, p. 238–241.
- [Po10] Poonen B., Insufficiency of the Brauer–Manin obstruction applied to étale covers. *Annals of Mathematics*, 171, 2010, p. 2157–2169.
- [PR11] Poonen B., Rains E. Self cup product and the theta characteristic torsor. *Math. Res. Letters* **18** (2011) 1305–1318.
- [PS99] Poonen B, Stoll M., Cassels–Tate pairing on polarized abelian varieties. *Ann. Math.* **150** (1999) 1109–1149.
- [Qu67] Quillen D. G., *Homotopical algebra*, Springer, 1967.
- [Qu11] Quick G., Continuous group actions on profinite spaces, *Journal of Pure and Applied Algebra*, 215.5, 2011, p. 1024–1039.

- [Re01] Rezk C., A model for the homotopy theory of homotopy theory, *Transactions of the American Mathematical Society*, 353.3, 2001, p. 973–1007.
- [SW95] Sarnak P., Wang L., Some hypersurfaces in \mathbb{P}^4 and the Hasse-principle, *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences - Series I - Mathematics*, 321, 1995, p. 319–322.
- [SZ11] Skorobogatov A.N., Zarhin Y.G., The Brauer group and the Brauer-Manin set of products of varieties, preprint arXiv :1112.3089, 2011.
- [Sk99] Skorobogatov A. N., Beyond the Manin obstruction. *Inventiones Mathematicae*, 135, 1999, p. 399–424.
- [Sk01] Skorobogatov A. N., *Torsors and rational points*, Cambridge University Press, 2001.
- [Sk09] Skorobogatov A. N., Descent obstruction is equivalent to étale Brauer–Manin obstruction, *Mathematische Annalen*, 344.3, 2009, p. 501–510.
- [SDS05] Skorobogatov A. N., Swinnerton-Dyer P., 2-descent on elliptic curves and rational points on certain Kummer surfaces, *Advances in Mathematics*, 198.2, 2005, p.448–483.
- [Sm14] Smeets A., Insufficiency of the étale Brauer-Manin obstruction : towards a simply connected example, preprint, arXiv :1409.6706, 2014.
- [St07] Stoll M., Finite descent obstructions and rational points on curves, *Algebra & Number Theory*, 1.4, 2007, p. 349–391.
- [SD95] Swinnerton-Dyer P., Rational points on certain intersections of two quadrics, in : Abelian varieties, Barth, Hulek and Lange Ed., Walter de Gruyter, Berlin, New York (1995).
- [SD00] Swinnerton-Dyer P., Arithmetic of diagonal quartic surfaces II, *Proceedings of the London Mathematical Society*, 80.3, 2000, p. 513–544.
- [SD01] Swinnerton-Dyer P., The solubility of diagonal cubic surfaces, *Annales Scientifiques de l'École Normale Supérieure*, 34.6, 2001.
- [TV03] Toën B., Vezzosi G., Segal topoi and stacks over Segal categories, Proceedings of the Program Stacks, Intersection theory and Non-abelian Hodge Theory, MSRI, Berkeley, (2002), arXiv :math.AG/0212330.
- [Wi08] Wittenberg O., On Albanese torsors and the elementary obstruction, *Mathematische Annalen*, 340.4, 2008, p. 805–838.
- [Wi07] Wittenberg O., *Intersections de deux quadriques et pincesaux de courbes de genre 1*, Lecture Notes in Mathematics, Vol. 1901, Springer, 2007.
- [Wi12] Wittenberg O., Zéro-cycles sur les fibrations au-dessus d'une courbe de genre quelconque, *Duke Mathematical Journal*, 161.11, 2012, p. 2113–2166.
- [Xu15] Xu F., Strong approximation for certain quadric fibrations with compact fibers, *Advances in Mathematics*, 281, 2015, p. 279–295.
- [Zh14] Zhu Y., Log rationally connected surfaces, *Mathematical Research Letters*, to appear.