

---

Synthèse de travaux scientifiques

en vue de l'obtention de

**l'Habilitation à Diriger des Recherches**

présentée à

**l'Université Sorbonne Paris Nord**

en

**Mathématiques**

par

**Eric Hoffbeck**

---

---

**Théorie homologique des algèbres et des opérades**

---

soutenue publiquement le 24 mai 2022.

Rapporteurs : M. Vladimir Dotsenko  
M. Grégory Ginot  
M. Sergei Merkulov

Jury : M. Christian Ausoni  
M. Vladimir Dotsenko  
M. Grégory Ginot  
Mme Muriel Livernet  
M. Sergei Merkulov



## SOMMAIRE

Remerciements	5
Introduction générale	7
Présentation du plan	9
Préliminaires : Généralités opéradiques	10
1. Réécriture algébro-opéradique et applications	11
1.1. Rappels de bases de Gröbner et de réécriture	11
1.2. Critère de Koszulité par les posets de partitions opéradiques	13
1.3. Réécriture linéaire et Koszulité	15
2. Algèbres sur des (pr)opérades : homologie et homotopie	19
2.1. Homologie de Leibniz d'algèbres de Lie	19
2.2. Calcul opéradique et théorème de transfert homotopique	25
3. Sur les infini-opérades dendroïdales	29
3.1. Le monde dendroïdal	29
3.2. Étude combinatoire de shuffles d'arbres	32
3.3. Homologie d'infini-opérades	37
References	46



## REMERCIEMENTS

Mes premiers remerciements vont à Vladimir Dotsenko et Sergei Merkulov, pour leurs rapports sur mon mémoire. Dès mon premier article, ils ont montré de l'intérêt pour mes travaux, et je suis heureux et honoré de leur présence dans mon jury d'habilitation 15 ans plus tard.

Merci aussi à Grégory Ginot pour son rapport en tant que garant, qui a constitué le premier pas dans la longue procédure menant à la soutenance ; et merci bien sûr aussi pour les nombreux gâteaux, clé de voûte du LAGA et du département de maths.

Je remercie également pour leur présence au sein de mon jury Muriel Livernet (soutien présent dès le début de ma carrière) et Christian Ausoni (le grand chef d'orchestre de notre équipe de topologues), deux collègues très importants à mes yeux.

J'ai une pensée particulière pour mes nombreux co-auteurs (Bérénice, Bruno, Christine, Ieke, Joan, Johan, Philippe et Yves, pour un ordre canonique), qui ont fortement contribué aux résultats présentés dans ce mémoire, et auprès de qui j'ai beaucoup appris. J'espère que la synthèse personnelle réalisée ici fait honneur à ces travaux communs, et que ce petit paragraphe de remerciements suffit à traduire la grande chance que j'ai eue de mener ces collaborations avec eux.

Tout ce travail n'aurait pu être réalisé sans l'équipe de topologie algébrique du LAGA. Cette équipe, fortement renouvelée depuis mon arrivée, par tous ses membres (des doctorants aux émérites, pour un autre ordre canonique), a su créer la bonne ambiance, productive et amicale, indispensable à un travail efficace et serein. De façon générale, le LAGA est un lieu de travail très agréable et très favorable, où l'on se sent bien entouré, conseillé et soutenu ; que les nombreux membres (chercheurs, enseignants et administratifs) en soient remerciés.

Je n'oublie pas non plus tous les collègues croisés, depuis le début de ma thèse (et même avant), en séminaires, groupes de travail et autres conférences, que ce soit à Lille, à Hambourg, à Paris 13, à PPS, à l'IHP, ou encore dans les nombreuses rencontres ANR ou du GDR Topologie. La liste en est bien trop longue pour être mentionnée ici. Ces nombreux échanges mathématiques m'ont beaucoup apporté.

Une petite pensée aussi pour les plafonds et les murs de nos bâtiments, pas encore effondrés, nous permettant de profiter du froid de l'hiver et de la chaleur de l'été.

Enfin, mes derniers remerciements vont à mes amis, aux coureurs de la SAM (et à Pascal, dont la fameuse foulée était un autre type de shuffle), à ma famille, et bien sûr à Justine.



## INTRODUCTION GÉNÉRALE

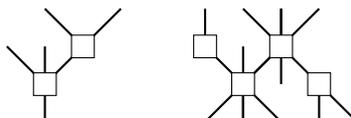
Ce mémoire reprend la majorité de mes travaux mathématiques depuis ma thèse. Ils se situent en topologie algébrique, plus précisément dans l'étude de certaines structures algébriques ((pr)opérades algébriques et algèbres sur ces objets) et de l'algèbre homologique associée.

L'idée des opérades est de chercher à modéliser les catégories d'algèbres d'un certain type, en considérant les opérations agissant sur le type d'algèbres en question. Par exemple, quand on considère la catégorie des algèbres de Lie (disons sur un corps, de caractéristique nulle pour simplifier l'exposition), on peut considérer l'ensemble des opérations multilinéaires agissant sur ces algèbres (donc des crochets de Lie itérés). Cet ensemble d'opérations multilinéaires a une structure très riche. Si on considère les opérations à  $n$  entrées pour un entier  $n$  fixé, c'est bien entendu un espace vectoriel, mais il y a également une action du groupe symétrique  $\Sigma_n$  (qui revient à permuter les variables en entrée). De plus, ces opérations se composent, et ces compositions vérifient une propriété d'associativité et une compatibilité avec l'action du groupe symétrique. On obtient ainsi une opérade (dite symétrique et algébrique, mais il en existe bien d'autres versions) : une suite d'ensembles dont les éléments peuvent être pensés comme des opérations à plusieurs entrées et une sortie, muni d'une structure algébrique comme décrite ci-dessus.

Des variantes peuvent être considérées : des coopérades, où on décompose des opérations, des opérades renversées, où on compose des coopérations (une entrée et plusieurs sorties), des props et des propérades où on compose des opérations à plusieurs entrées et plusieurs sorties (avec une restriction de connexité pour le cas des propérades). Dans les cas opéradique ou propéradique, ces opérations pourront être représentées de la façon suivante :



Les graphes apparaissant respectivement dans ces structures peuvent se représenter ainsi :



Un intérêt de ces structures est que, dans le sens opposé au procédé évoqué ci-dessus, on peut leur associer des catégories d'algèbres (et leurs généralisations, comme des bigèbres ou des bigèbres généralisées, comme les algèbres de Frobenius ou les bigèbres de Lie), en considérant une notion d'action d'une opérade sur un espace vectoriel. Les opérations "abstraites" dans l'opérade deviennent ainsi des opérations "concrètes" sur les éléments de l'espace vectoriel. Et l'étude d'une opérade permet d'obtenir des résultats sur le type d'algèbres en question. Citons quelques exemples en particulier ici :

- À partir d'une opérade  $P$ , on peut écrire des complexes de (co)homologie pour les  $P$ -algèbres. La théorie des déformations des  $P$ -algèbres, écrite initialement dans certains cas particuliers usuels (les algèbres associatives, les algèbres commutatives, etc) se fait ainsi de façon naturelle grâce à la notion d'opérade. Tous ces complexes peuvent être décrits explicitement, et dans les bons cas (les opérades dites "de Koszul"), ces complexes sont petits et manipulables.

- Pour un type d'algèbres donné (par exemple les algèbres de Lie), les constructions opéradiques (bar et cobar notamment, ainsi que la dualité de Koszul) permettent

de définir aisément la notion appropriée d'algèbre "à homotopie près" pour ce type d'algèbres (les algèbres  $L_\infty$  dans le cas des algèbres de Lie).

- Les morphismes entre opérades induisent des foncteurs entre les catégories d'algèbres associées, et notamment des constructions générales d'algèbres enveloppantes.

- Dans le cas des opérades non-symétriques (celles où on ne considère pas l'action du groupe symétrique sur les opérations), la donnée d'une base (linéaire) d'une opérade  $P$  donne sans difficulté une base de la partie multilinéaire de la  $P$ -algèbre libre sur un ensemble fixé.

Les opérades existent dans différents contextes (ensemblistes et topologiques notamment) et apparaissent ainsi dans de nombreux domaines des mathématiques : dans l'étude des espaces de lacets (historiquement avec May, Boardman et Vogt par exemple), en lien avec le groupe de Grothendieck-Teichmüller (Tamarkin, Kontsevich, Drinfeld, Willwacher, Fresse, Horel), en physique mathématique (Kontsevich, Merkulov, Willwacher), en combinatoire (Chapoton, Giraud), en géométrie symplectique, en informatique, etc.

Précisons que les notions d'algèbres à homotopie près apparaissent naturellement, par exemple lorsqu'on considère l'espace des lacets sur un espace topologique. La composition des lacets n'est pas associative, mais son défaut d'associativité peut être interprété comme une structure supérieure. Un autre exemple important se trouve dans le cas des transferts de structures : si on se donne une structure de  $P$ -algèbre sur un complexe de chaînes  $A$  et une contraction de  $A$  sur  $H$ , alors on peut transférer une structure de  $P$ -algèbre à homotopie près sur  $H$  (et pas forcément une structure stricte de  $P$ -algèbres). Ce type de résultat, appelé théorème de transfert homotopique, établi initialement dans le cas des algèbres associatives par Kadeishvili et notamment prolongé abstraitement dans le cas des props cofibrants par Fresse, a été étendu au cadre propéradique, avec des formules explicites et universelles, par Leray, Vallette et moi-même. Ce dernier théorème, et de façon plus générale le contexte "à homotopie près", fait intervenir des notions relâchées de morphismes : les infini-morphismes.

Ces notions relâchées se trouvent également dans le monde catégorique, où on peut alléger les conditions d'associativité de compositions de morphismes. On peut alors obtenir des notions d'infini-catégorie, ce qui fait apparaître toute une jungle de structures supérieures, que l'on cherche à débroussailler. Un exemple dans cette jungle est la notion d'infini-opérade (par Lurie notamment), vivant dans un monde infini-catégorique. Ces infini-opérades peuvent être vues de façon plus concrète au moyen d'un modèle combinatoire, comme des préfaisceaux sur une catégorie d'arbres (par Weiss et Moerdijk). Et dans ce modèle, il est possible d'obtenir des constructions explicites, ce que Moerdijk et moi-même faisons par exemple en généralisant les constructions usuelles  $\bar{b}ar$  et  $cobar$  dans ce contexte.

Le coeur de mes travaux se situe dans ce contexte homotopique de structures algébriques et de structures supérieures. Un fil directeur majeur de mes recherches est d'obtenir des formules, des critères, des constructions, à chaque fois explicites et aussi manipulables que possible.

## PRÉSENTATION DU PLAN

Le premier chapitre de ce mémoire se concentre sur le développement de méthodes explicites, fortement liées à la réécriture et aux bases de Gröbner, dans le monde opéradique et algébrique. Dans une première section, je rappelle le contexte des bases de Gröbner pour les algèbres, des bases de Poincaré-Birkhoff-Witt et de la réécriture, qui ont conduit à la notion d'opérades shuffle et de bases de Gröbner opéradiques, et leur utilisation pour prouver la Koszulité. Je présente alors mon travail avec Joan Bellier-Millès et Bérénice Delcroix-Oger, où nous établissons un lien entre l'existence de bases PBW d'opérades ensemblistes et des propriétés du poset associé. À la fin de ce chapitre, je reprends mon travail avec Yves Guiraud et Philippe Malbos où nous construisons des résolutions d'algèbres, dans des infini-catégories globulaires, au moyen d'une réécriture linéaire que nous avons développée.

Le deuxième chapitre consiste en plusieurs résultats concernant l'homologie de certaines algèbres (pr)opéradiques, avec des méthodes explicites également. J'y présente d'abord mon travail avec Christine Vespa, où via un petit complexe et l'utilisation d'une base PBW de l'opérade de Lie, nous montrons que l'homologie de Leibniz d'une algèbre de Lie peut s'exprimer comme de l'homologie de foncteurs. À la fin du chapitre, j'expose les résultats obtenus avec Johan Leray et Bruno Vallette où nous développons le calcul propéradique et prouvons un théorème de transfert homotopique pour les algèbres sur les propérades.

Le dernier chapitre du mémoire présente les résultats de deux articles avec Ieke Moerdijk se situant dans le contexte dendroïdal. Le monde dendroïdal est une généralisation du monde simplicial, et est particulièrement adapté au développement de modèles combinatoires pour les infini-opérades. J'en rappelle les notions principales en introduction de ce chapitre. Une section détaille ensuite nos résultats sur le produit shuffle des arbres, notion qui apparaît dans le produit tensoriel d'espaces dendroïdaux. Un des résultats principaux consiste à décrire explicitement l'ordre partiel sur le produit de deux arbres. La dernière section présente une notion d'homologie dendroïdale. Celle-ci s'obtient par une construction qu'on généralise ensuite en une construction bar. Finalement nous prouvons des résultats de dualité cobar-bar pour les infini-opérades dans le contexte dendroïdal.

Ce mémoire se base sur les six articles ci-dessous, publiés ou encore au stade de prépublication, ici classés par ordre chronologique.

E. Hoffbeck et C. Vespa. Leibniz homology of Lie algebras as functor homology. *J. Pure Appl. Algebra*, 219(9):3721–3742, 2015.

E. Hoffbeck et I. Moerdijk. Shuffles of trees. *Eur. J. Comb.*, 71:55–72, 2018.

Y. Guiraud, E. Hoffbeck, et P. Malbos. Convergent presentations and polygraphic resolutions of associative algebras. *Math. Z.*, 293(1-2):113–179, 2019.

J. Bellier-Millès, B. Delcroix-Oger, et E. Hoffbeck. Operads with compatible CL-shellable partition posets admit a Poincaré-Birkhoff-Witt basis. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 374(11):8249–8273, 2021.

E. Hoffbeck, J. Leray, et B. Vallette. Properadic homotopical calculus. *Int. Math. Res. Not.*, 2021(5):3866–3926, 2021.

E. Hoffbeck et I. Moerdijk. Homology of infinity-operads. *Preprint arXiv:2105.11943*, 2021.

Tous mes articles sont disponibles sur ma page personnelle :  
<https://www.math.univ-paris13.fr/~hoffbeck/>

#### PRÉLIMINAIRES : GÉNÉRALITÉS OPÉRADIQUES

Dans tout ce texte, nous supposons connues les notions d’opérades (non-symétriques, symétriques ou shuffle) dans la catégorie monoïdale symétrique des modules différentiels gradués (sur un corps  $\mathbb{K}$  de caractéristique nulle, sauf mention du contraire en début de section). Également, nous ne rappelons pas les notions d’algèbres sur une opérade ou de morphismes d’opérades. Nous renvoyons au livre de Loday et Vallette [22, chapitre 5] pour ces définitions de base.

Pour comprendre les propriétés algèbro-homotopiques des algèbres sur une opérade, il est possible d’une part de munir les différentes catégories en jeu de structures de modèles (ou semi-modèles), usuellement obtenues par transfert, et d’autre part d’écrire explicitement des complexes de (co)homologie, plus ou moins petits, au moyen de la dualité bar-cobar ou de la dualité de Koszul. Ces constructions sont détaillées dans [22, chapitres 6, 7, 10, 11 et 12].

Les opérades peuvent être généralisées dans différentes directions, notamment les propérades et les infini-opérades. Ces notions un peu moins classiques seront détaillées au fur et à mesure de leur apparition dans le texte.

## 1. RÉÉCRITURE ALGÈBRE-OPÉRADIQUE ET APPLICATIONS

## 1.1. Rappels de bases de Gröbner et de réécriture.

Les bases de Gröbner (non-commutatives) dans le cas des algèbres (associatives unitaires) servent à mieux comprendre une algèbre  $A = T(V)/(R)$  au moyen de  $A_{mon} = T(V)/(R_{mon})$ , où  $T$  est le foncteur d'algèbre libre,  $V$  un espace vectoriel engendré par une base  $B$  (vu comme un alphabet),  $R$  un ensemble de relations linéaires entre des mots sur  $B$  et  $R_{mon}$  l'ensemble des monômes dominants (pour un certain ordre sur les mots sur  $B$ ) des éléments de  $R$ . L'ordre utilisé ci-dessus est d'habitude un ordre degré-lexicographique engendré par un ordre sur  $B$ . Un exemple typique est  $A = T(x_1, x_2)/(x_2x_1 - x_1x_2)$ . En prenant  $x_1 < x_2$  et l'ordre lexicographique usuel, on a  $x_2x_1 > x_1x_2$  et donc on pose  $R_{mon} = \{x_2x_1\}$ . Le quotient  $A_{mon}$  est  $A = T(x_1, x_2)/(x_2x_1)$ , dont une base est beaucoup plus facile à obtenir qu'une base de  $A$ . Une définition possible pour  $R$  d'être une base de Gröbner est que l'idéal  $(R_{mon})$  est égal à l'idéal des termes dominants des éléments de  $(R)$ . Sous cette hypothèse, on obtient un isomorphisme d'espaces vectoriels entre  $A$  et  $A_{mon}$ , ce qui facilite fortement la compréhension de certaines propriétés de  $A$ . Un intérêt des bases de Gröbner est que la propriété d'être une base de Gröbner se vérifie facilement combinatoirement (avec la notion de  $S$ -polynômes) et que pour une présentation donnée qui ne serait pas une base de Gröbner, on peut compléter les relations jusqu'à obtenir une base de Gröbner (par l'algorithme de Buchberger, pas toujours de façon finie dans le cas non-commutatif contrairement au cas commutatif). Pour des précisions, on peut se rapporter à [32] et [26].

Du point de vue de la réécriture, une façon de comprendre le quotient par  $(R)$  est de dire qu'on remplace le terme dominant d'une relation par une combinaison linéaire de termes plus petits. La condition d'être une base de Gröbner revient à regarder la confluence de ce système de réécriture (c'est-à-dire qu'il y a une unicité de la façon de réécrire un mot, quelle que soit la suite de relations utilisées). L'isomorphisme d'espaces vectoriels entre  $A$  et  $A_{mon}$  s'obtient alors en observant que des bases des deux algèbres sont données par les formes normales de ce système de réécriture (c'est-à-dire les mots qu'on ne peut plus réécrire).

Le résultat majeur de Priddy [28] sur la Koszulité des algèbres associatives (disant que l'existence d'une base de Poincaré-Birkhoff-Witt (PBW dans la suite) implique la Koszulité) se traduit en termes de bases de Gröbner de la façon suivante : il existe une base de Gröbner quadratique si et seulement s'il existe une base PBW. De façon plus générale, les bases de Gröbner (pas forcément quadratiques) permettent d'obtenir des petites résolutions d'une algèbre, par des  $A$ -modules libres (résolution d'Anick [1] notamment) ou des  $A$ -bimodules (résolution de Bardzell).

Dans l'article [18], j'ai étendu la notion de base PBW aux opérades symétriques, en introduisant notamment la notion d'arbres shuffle et de composition shuffle pointé. Cette dernière notion a été réinterprétée par Dotsenko et Khoroshkin [8] qui ont introduit la notion d'opérade shuffle et de bases de Gröbner pour les opérades. À ce jour, les bases de Gröbner opéradiques sont un des outils les plus puissants pour prouver qu'une opérade est de Koszul.

L'heuristique principale menant à la notion d'opérade shuffle est que l'opérade symétrique libre a une représentation par un module d'arbres quotientés par le groupe symétrique. Travailler avec des classes pose alors problème pour effectuer de la réécriture. L'idée des arbres shuffle est d'éviter ce quotient, et l'idée de la

composition shuffle pointé (et des opérades shuffle de [8]) est de garder la structure existante au sein des arbres shuffle.

Les deux articles résumés ci-après présentent des résultats dans ce contexte :

- un critère de Koszulité (opéradique) au moyen d'ordres partiels sur le poset de partitions opéradiques.
- un résultat (sur les algèbres) où on généralise la notion de base de Gröbner (en affinant les hypothèses sur les ordres possibles) et où on obtient des résolutions (explicites et manipulables) vivant dans un monde d'infini-catégories globulaires.

## 1.2. Critère de Koszulté par les posets de partitions opéradiques.

Nous présentons ici les résultats de l'article [2] avec Joan Bellier-Millès et Bérénice Delcroix-Oger.

Le point de départ de ce travail est le résultat suivant obtenu par Vallette en 2007 dans [33].

**Théorème 1.2.1.** *Soit  $P$  une opérade ensembliste quadratique, vérifiant la propriété basic-set. Alors  $P$  est de Koszul si et seulement ses posets de partitions sont de Cohen-Macaulay.*

Un but principal de notre article est de comprendre un lien entre la propriété de base PBW (impliquant la Koszulté d'une opérade) et une propriété combinatoire sur le poset impliquant d'être de Cohen-Macaulay.

On rappelle que pour une opérade ensembliste  $P$  (supposée vide en arité 0, et pas forcément réduite à l'identité en arité 1), la propriété *basic-set* correspond à l'injectivité des applications  $\gamma_{f_1, \dots, f_n} : P \rightarrow P$  qui à  $f \in P(n)$  associe la composition  $f \circ (f_1, \dots, f_n)$  (pour tous les  $f_1, \dots, f_n$  dans  $P$ ). Nous supposons dans ce chapitre que toutes nos opérades vérifient cette propriété.

Pour  $P$  une telle opérade, une  $P$ -partition de  $I \subset \{1, \dots, n\}$  est une collection de blocs  $\{B_1, \dots, B_r\}$  où chaque  $B_k$  est dans  $P(I_k)$  avec  $\{I_1, \dots, I_r\}$  une partition de  $I$ . Ces  $P$ -partitions sont munies d'un ordre de type "raffinement de partitions" où une  $P$ -partition  $\lambda$  est plus petite qu'une  $P$ -partition  $\omega$  si chaque bloc de  $\omega$  s'obtient comme une composition opéradique de plusieurs blocs de  $\lambda$ . Par exemple, pour l'opérade  $P = Com$ , on retrouve la notion usuelle de partition (à cause de l'unicité de l'élément dans chaque  $Com(k)$ ). Un exemple de la relation d'ordre est  $\{1\}\{2\}\{3\} \leq \{1, 2\}\{3\} \leq \{1, 2, 3\}$  et  $\{1, 2\}\{3\}$  n'est pas comparable avec  $\{1, 3\}\{2\}$ .

Les ensembles  $\Pi_P$  des  $P$ -partitions munis de l'ordre ci-dessus sont appelés les *posets de partitions opéradiques*. Pour une opérade  $P$  munie d'un poids (ce qui sera le cas dans toute la suite, en supposant que  $P$  possède une présentation quadratique), on peut définir des sous-posets  $\Pi_P^{(d)}$  dont les éléments sont majorés par un certain poids  $d$ .

Pour tout poset, on peut définir un *complexe d'ordre* (simplicial) dont les sommets sont les éléments du poset et les faces sont les chaînes du poset. Dans le cas des posets  $\Pi_P^{(d)}$ , il y a un isomorphisme entre le complexe de chaînes associé au complexe d'ordre et la partie de poids  $d$  de  $N_*(P)$  (la construction bar normalisée de  $P$ , qui fait intervenir des arbres avec des niveaux).

Ceci motive l'étude homologique de ces posets de partitions.

Au niveau des posets, on renvoie au survey de Wachs [35] pour les définitions générales. Les deux notions principales qui nous intéressent sont celles de Cohen-Macaulay (tous les groupes de l'homologie réduite sont nuls, sauf ceux en degré maximal) et de CL-shellabilité : les arêtes des chaînes maximales sont étiquetées par un poset de telle sorte si deux chaînes maximales coïncident sur leurs arêtes inférieures, alors les étiquettes coïncident sur ces arêtes inférieures. On parle ici de CL-étiquetage.

La condition de CL-shellabilité est une des nombreuses notions combinatoires impliquant la propriété de Cohen-Macaulay. C'est un candidat naturel du côté des posets à relier à la notion de base PBW du côté opéradique, pour espérer affiner le résultat de Vallette mentionné ci-dessus.

Nous obtenons le résultat suivant, en ajoutant une hypothèse technique :

**Théorème 1.2.2.** *Pour  $P = T(E)/(R)$  une opérade quadratique (avec  $E$  un ensemble fini) et  $\Pi_P$  ses posets de partitions opéradiques. Si les  $\Pi_P^{(d)}$  ont des CL-étiquetages compatibles aux isomorphismes de sous-posets, alors  $P$  possède une base PBW.*

L'hypothèse technique mentionnée ici correspond à dire que si on trouve deux sous-posets isomorphes dans un  $\Pi_P^{(d_1)}$  et un  $\Pi_P^{(d_2)}$ , alors l'isomorphisme est strictement monotone sur le CL-étiquetage. Cette hypothèse sert à plusieurs endroits dans la preuve. Notamment, elle est nécessaire pour définir un ordre sur  $T(E)$  à partir du CL-étiquetage, les arbres de  $T(E)$  étant ici vus comme des arbres shuffle. On montre alors qu'un arbre  $a$  de  $T(E)$  est minimal si et seulement si l'un de ses représentants dans  $N(E)$  est la chaîne minimale croissante de l'intervalle.

Dans la preuve, nous définissons une base PBW par les formes normales d'un système de réécriture orienté par l'ordre sur  $T(E)$ . Ce système de réécriture est bien terminant (par finitude de  $E$  et homogénéité des relations). La confluence se montre alors en utilisant la caractérisation ci-dessus en tant que chaîne minimale croissante.

Nous retrouvons par cette construction les bases PBW connues pour les opérades *Com* et *Perm*. Notre résultat fonctionne également pour les algèbres, vues comme des opérades concentrées en arité 1.

La réciproque de ce théorème est plus problématique.

Nous avons deux contre-exemples :

- le premier consiste en une algèbre (présentée par 12 générateurs et 6 relations), qui est basic-set, qui possède une base PBW pour un ordre lexicographique, mais qui ne possède aucun CL-étiquetage dont les chaînes minimales donneraient la base PBW.
- le second exemple est une algèbre (présentée par 13 générateurs et 7 relations, variation de l'exemple précédent), qui est basic-set, dont aucune base PBW ne peut être obtenue par un CL-étiquetage compatible du poset de partitions.

Ceci illustre la difficulté à obtenir une condition suffisante du côté poset pour obtenir une base PBW du côté de l'opérade.

### 1.3. Réécriture linéaire et Koszulité.

Dans la suite des travaux de Burroni [5] et Street [31] introduisant la notion de polygraphe, les travaux de Guiraud et Malbos (notamment [11] et [9]) développent l'utilisation d'infini-catégories (au sens globulaire) pour catégorifier les notions de réécriture pour les monoïdes présentés par générateurs et relations. L'idée est que les cellules de dimension 0 vont représenter les mots du monoïde libre, celles de dimension 1 les chemins de réécriture (c'est-à-dire une suite finie de relations orientées appliquées à un mot). Des cellules de dimension 2 auront donc pour bord des chemins de réécriture ayant même source et même but ; elles serviront à coder des relations entre relations. Les cellules de dimension supérieure vont correspondre aux syzygies supérieures.

Notre travail en commun [10] a consisté à étendre cette théorie au monde des algèbres, d'une part pour obtenir des résolutions dans un monde infini-catégorique, d'autre part pour s'autoriser des orientations de relations que le cadre usuel ne permettait pas. Un exemple typique de cette seconde motivation est le suivant : prenons l'algèbre engendrée par  $x, y$  et  $z$ , et quotientée par la relation  $xyz = x^3 + y^3 + z^3$ . Quel que soit l'ordre monomial total sur les monômes de  $T(x, y, z)$ , le terme  $xyz$  n'est pas le terme dominant. Cependant, il serait agréable de considérer ce  $xyz$  comme terme dominant, car alors il n'y aurait pas de paire critique, et donc la réécriture serait confluente. Ceci sera possible avec nos constructions.

Commençons par présenter le contexte catégorique dans lequel nous travaillons.

Pour  $C$  une catégorie, on définit un *objet globulaire* de  $C$  comme une suite  $X = (X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  d'objets de  $C$  munie de trois applications  $s, t$  et  $i$  de degrés respectifs  $-1, -1$  et  $+1$  (*source, but* et *identité*), vérifiant les *relations globulaires*  $ss = st, ts = tt, si = ti = id$ . Un morphisme entre deux objets globulaires est une application de degré 0 commutant à ces applications. Ceci définit une catégorie  $Glob(C)$ . En restreignant l'ensemble d'indices à  $\{0, \dots, n\}$  (pour un entier naturel  $n$  fixé), on définit de même une catégorie  $nGlob(C)$  dont les objets sont appelés *objets  $n$ -globulaires*. De plus, on peut définir la  $k$ -source et le  $k$ -but d'une  $n$ -cellule (d'une façon très naturelle si  $k < n$ , mais aussi si  $k > n$ , grâce à l'identité).

On peut alors définir une  *$\infty$ -catégorie interne* à  $C$  comme un objet globulaire muni (pour tout entier  $k$ ) de morphismes de composition de dimension  $k$  (prenant deux cellules  $k$ -composables, c'est-à-dire que la  $k$ -source de l'un est égal au  $k$ -but de l'autre, et y associant une cellule de dimension  $k$ ). Ces compositions doivent de plus vérifier des relations de compatibilité, d'associativité, mais aussi des lois d'échange entre les différentes compositions.

Par suite, on peut définir les morphismes entre  $\infty$ -catégories internes à  $C$ , ainsi que les notions de  $n$ -catégories internes à  $C$ , et de  $\infty$ -groupoïdes et  $n$ -groupoïdes internes à  $C$ . On appelle  $\infty Cat(C)$  (resp.  $nCat(C)$ , resp.  $\infty Gpd(C)$ ) la catégorie des  $\infty$ -catégories (resp. des  $n$ -catégories, resp. des  $\infty$ -groupoïdes) internes à  $C$ .

Nous pouvons donc travailler dans  $Glob(Vect)$  et  $Glob(Alg)$ , obtenues à partir de la catégorie des espaces vectoriels et de celle des  $\mathbb{K}$ -algèbres.

**Proposition 1.3.1.** *La catégorie  $Glob(Vect)$  est isomorphe à  $\infty Vect$  et à  $\infty Gpd(Vect)$  (via les foncteurs d'oubli).*

Ceci se montre en observant que si deux  $n$ -cellules  $a$  et  $b$  sont  $i$ -composables, alors  $a \star_i b = a - t_i(a) + b$ , et donc que toute  $n$ -cellule  $a$  est inversible, d'inverse  $a^- = s(a) - a + t(a)$ .

**Proposition 1.3.2.** *La catégorie  $\infty Alg$  est isomorphe à*  
(1) *la catégorie  $\infty Gpd(Alg)$ ,*

(2) une sous-catégorie pleine de  $\text{Glob}(\text{Alg})$  (il faut imposer une certaine relation entre les  $n$ -cellules),

(3) une sous-catégorie pleine de  $\text{Glob}(\text{Bimod})$  (les objets sont ici des paires  $(A, M)$  constituées d'une algèbre  $A$  et d'un  $A$ -bimodule globulaire  $M$  dont les structures vérifient une certaine compatibilité entre la 0-composition et le produit de l'algèbre).

Tout ceci s'adapte au contexte des espaces vectoriels  $\mathbb{N}$ -gradués et des algèbres  $\mathbb{N}$ -graduées. Cette graduation supplémentaire correspondra souvent à une graduation par le poids d'une algèbre dont la présentation comporte des relations homogènes.

Une *extension cellulaire* d'une  $n$ -algèbre est un ensemble  $X$  muni d'applications  $s$  et  $t$  de  $X$  vers  $A_n$  telles que pour tout  $x$  dans  $X$ , la paire  $(s(x), t(x))$  est une  $n$ -sphère (c'est-à-dire que ces deux  $n$ -cellules sont parallèles (même source et même but), de telle sorte que  $x$  puisse être plus tard considéré comme une  $n + 1$ -cellule). Pour  $X$  une extension de  $A$ , on définit la relation de congruence sur les  $n$ -cellules parallèles engendrée par  $s(x) \approx_X t(x)$  pour tout  $x$  dans  $X$ , et on appelle  $X$  acyclique si pour toute  $n$ -sphère  $(a, b)$  on a  $a \approx_X b$ .

On appelle  $n\text{Alg}^+$  la catégorie des  $n$ -algèbres munies d'une extension cellulaire, et on dispose d'un foncteur  $n$ -algèbre libre  $n\text{Alg}^+ \rightarrow n\text{Alg}$  envoyant une paire  $(A, X)$  sur une  $n$ -algèbre qui sera notée  $A[X]$ . L'idée pour l'obtenir explicitement est de prendre comme espace des  $n$ -cellules un quotient du bimodule  $(A_0 \otimes \mathbb{K}X \otimes A_0) \oplus A_{n-1}$  et de définir un produit adapté, en utilisant pleinement les identifications entre  $n\text{Alg}$  et des sous-catégories de  $n\text{Glob}(\text{Alg})$  et  $n\text{Glob}(\text{Bimod})$ .

La notion de  *$n$ -polygraphe (algébrique)* est définie par récurrence sur  $n$ . Pour  $n = 0$ , la catégorie  $0\text{Pol}(\text{Alg})$  est simplement celle des ensembles. Pour  $X$  un ensemble, on dispose du foncteur 0-algèbre libre (appelé  $T$  ici) allant de  $0\text{Pol}(\text{Alg}) = \text{Set}$  vers  $0\text{Alg}$ . La catégorie  $n\text{Pol}(\text{Alg})$  des  *$n$ -polygraphes* se définit comme le pullback (illustré ci-dessous) du foncteur libre  $(n-1)\text{Pol}(\text{Alg}) \rightarrow (n-1)\text{Alg}$  et du foncteur d'oubli  $(n-1)\text{Alg}^+ \rightarrow (n-1)\text{Alg}$ .

$$\begin{array}{ccc} n\text{Pol}(\text{Alg}) & \longrightarrow & (n-1)\text{Alg}^+ \\ \downarrow & & \downarrow \\ (n-1)\text{Pol}(\text{Alg}) & \longrightarrow & (n-1)\text{Alg} \end{array}$$

On définit alors un foncteur libre  $n\text{Pol}(\text{Alg}) \rightarrow n\text{Alg}$  par la composition suivante :  $n\text{Pol}(\text{Alg}) \rightarrow (n-1)\text{Alg}^+ \rightarrow n\text{Alg}$  (le premier étant celui du pullback, le second envoyant  $(A, X)$  sur  $A[X]$ ).

De façon plus explicite, un  $n$ -polygraphe  $X$  est une suite  $(X_0, X_1, \dots, X_n)$ , notée  $\langle X_0 | \dots | X_n \rangle$ , où  $X_0$  est un ensemble et pour  $k > 0$ ,  $X_k$  est une extension cellulaire de la  $(k-1)$ -algèbre libre sur  $\langle X_0 | \dots | X_{k-1} \rangle$ . On note alors  $\mathbb{K}\langle X \rangle$  la  $n$ -algèbre libre sur  $X$ .

Cette définition s'étend en celle des  $\infty$ -polygraphes (et tout  $n$ -polygraphe est donc un  $\infty$ -polygraphe dont les extensions sont vides à partir d'un certain rang).

L'intérêt premier des polygraphes est de généraliser en dimension supérieure la notion de présentation et les notions nécessaires à la réécriture.

On définit pour  $X$  un  $n$ -polygraphe l'*algèbre présentée par  $X$*  par  $T(X_0)/X_1$  (où ce quotient signifie qu'on identifie les 0-cellules en relation pour la congruence engendrée par l'extension  $X_1$ ). Pour  $A$  une algèbre, une *présentation de  $A$*  est un 1-polygraphe présentant  $A$ , une *présentation cohérente de  $A$*  est un 2-polygraphe  $\langle X_0 | X_1 | X_2 \rangle$  présentant  $A$  et tel que  $X_2$  est acyclique. Une *résolution polygraphique de  $A$*  est un  $\infty$ -polygraphe  $X$  présentant  $A$  et tel que tous les  $X_k$  sont acycliques pour  $k > 1$ .

Par construction, on dispose des notions de monômes et de monômes de dimension supérieure, ce qui permet d'écrire toute  $k$ -cellule de  $\mathbb{K}\langle X \rangle$  comme la somme d'une combinaison linéaire (finie) de  $k$ -monômes et d'une cellule identité (de façon pas forcément unique). On appelle la taille d'une  $k$ -cellule le nombre minimal de termes apparaissant dans la combinaison linéaire ci-dessus.

Pour  $X$  un 1-polygraphe, on dit qu'il est *monomial à gauche* si pour toute 1-cellule  $\alpha$  de  $X$  sa source  $s(\alpha)$  est un monôme n'apparaissant pas dans  $t(\alpha)$ . Ceci est notamment nécessaire pour éviter des soucis de terminaison, et correspond à l'idée que pour une telle 1-cellule, on a réécrit le monôme  $s(\alpha)$  en  $t(\alpha)$ . Dans la suite, tous les polygraphes seront supposés monomiaux à gauche.

Une *étape de réécriture* est une 1-cellule de la forme  $\lambda f + i(a)$  où  $f$  est un 1-monôme,  $\lambda \neq 0$  et  $a$  une 0-cellule. On peut alors définir un *chemin de réécriture* (ou *1-cellule positive*) comme une 0-composition d'étapes de réécriture et les *formes normales* d'une 0-cellule  $a$  sont les 0-cellules  $b$  réduites (c'est-à-dire dont aucun monôme n'est source d'une étape de réécriture) telles qu'il existe un chemin de réécriture dont la source est  $a$  et le but est  $b$ .

Les notions usuelles de réécriture s'adaptent alors bien à ce contexte : on peut associer à un 1-polygraphe une relation d'ordre partiel entre les monômes et on dit que  $X$  est *terminant* si cet ordre est bien fondé. La *confluence* se définit à partir de la notion de *branchements*. Ceux-ci sont les monômes qui sont source de différentes étapes de réécriture, et la condition de confluence dit que tous les chemins de réécritures issus d'un monôme donné aboutissent au même but. En se restreignant à des branchements minimaux dans un certain sens (comme usuellement en réécriture), on peut définir la *confluence locale* et la *confluence critique*. Un 1-polygraphe est dit *convergent* s'il est terminant et confluent.

Une étude fine permet d'étendre le lemme du diamant (cf. [4], aussi appelé Lemme de Newman) :

**Théorème 1.3.3.** *Pour un polygraphe terminant, la confluence des branchements critiques implique la confluence.*

Ceci se prouve en définissant et étudiant une notion de  $Y$ -confluence pour  $Y$  une extension cellulaire d'un 1-polygraphe  $X$ . Il est important de noter ici que la confluence a besoin de l'hypothèse de terminaison, ce qui n'est d'habitude pas nécessaire. On peut alors généraliser des résultats ou notions déjà connus :

**Proposition 1.3.4.** (1) *Si  $X$  est un 1-polygraphe convergent présentant une algèbre  $A$ , alors une base de  $A$  comme espace vectoriel est donnée par les monômes réduits de  $\mathbb{K}\langle X \rangle$ .*

(2) *La notion de base de Gröbner s'obtient comme un cas particulier de 1-polygraphe.*

(3) *La notion de base de Poincaré-Birkhoff-Witt s'obtient comme cas particulier de base obtenue par des monômes réduits d'un 1-polygraphe.*

Notre réécriture ainsi permet de traiter le cas de l'algèbre

$$A = T(x, y, z)/(xyz - x^3 - y^3 - z^3).$$

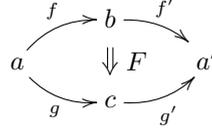
Elle est présentée par le 1-polygraphe  $\langle \{x, y, z\} | xyz \rightarrow x^3 + y^3 + z^3 \rangle$ , qui est terminant (ce qui n'est pas totalement trivial) et confluent (ce qui est trivial car il n'y a pas de branchement critique avec ce choix d'orientation).

Passons maintenant aux dimensions supérieures, d'abord la dimension 2 (nous avons défini la notion de présentation cohérente) puis en dimension quelconque où nous avons défini la notion de résolution polygraphique.

En dimension 2, nous généralisons le théorème de Squier [30] de la façon suivante.

**Théorème 1.3.5.** *Soit  $X$  un 1-polygraphe convergent. Si tout diamant obtenu à partir d'un branchement critique peut être rempli par une 2-cellule provenant d'une extension cellulaire  $Y$  de  $\mathbb{K}\langle X \rangle$ , alors cette extension est acyclique (c'est-à-dire que toute paire de 1-cellules parallèles peut être remplie).*

L'illustration graphique de ce théorème est la suivante :



où  $f$  et  $g$  sont deux étapes de réécriture sur un monôme critique,  $f'$  et  $g'$  deux chemins de réécriture, et  $F$  une 2-cellule de  $Y$ .

Ceci signifie que, connaissant une présentation convergente d'une algèbre par un 1-polygraphe  $X$ , on peut construire le début d'une résolution polygraphique en prenant comme  $X_2$  des 2-cellules remplissant les diamants venant des branchements critiques. L'idée pour la suite va être de définir des  $n$ -uplets critiques (monômes sources de  $n$  étapes de réécriture différentes, avec une certaine minimalité) et de montrer qu'ils conviendront pour obtenir une résolution polygraphique.

La stratégie pour formaliser cette idée est maintenant la suivante :

- (1) Pour toute algèbre, on construit une résolution polygraphique, dite *standard*, basée sur l'idée d'une construction bar cubique.
- (2) On définit un *analogue de la réduction de Morse algébrique discrète* pour les polygraphes, permettant de supprimer des cellules dans un polygraphe ; ce processus préserve la propriété d'être une résolution polygraphique.
- (3) En appliquant cette réduction de Morse à la résolution polygraphique standard d'une algèbre, on obtient une résolution polygraphique (dite de Squier) dont l'extension cellulaire de dimension  $n$  consiste en les  $n$ -uplets critiques.

Dans l'article, pour l'algèbre symétrique et l'algèbre extérieure, nous explicitons en petite dimension cette réduction et la résolution polygraphique obtenue. Nous faisons également le lien avec les résolutions usuelles.

**Proposition 1.3.6.** *Toute résolution polygraphique de  $A$  induit (de façon explicite) des résolutions au sens usuel, de  $A$ -modules (à gauche ou à droite) et de  $A$ -bimodules.*

Notamment, on peut retrouver des résolutions d'algèbres montrant qu'une algèbre est de Koszul (ou  $N$ -Koszul, généralisation définie par R. Berger [3], adaptée aux algèbres dont les relations sont homogènes de poids  $N$ ). Dans le cas de l'algèbre cubique mentionnée plus haut, on obtient directement qu'elle est 3-Koszul, au lieu de passer par de longs calculs utilisant une résolution d'Anick par exemple. Dans le cas de l'algèbre symétrique et de l'algèbre extérieure, les résolutions que nous obtenons par notre procédé sont exactement les résolutions de Koszul de ces algèbres. Pour une algèbre possédant une base de Gröbner, notre résolution est a priori plus grande que la résolution d'Anick, mais doit pouvoir s'y ramener par une étape supplémentaire de réduction.

## 2. ALGÈBRES SUR DES (PR)OPÉRADES : HOMOLOGIE ET HOMOTOPIE

## 2.1. Homologie de Leibniz d'algèbres de Lie.

Cette section consiste en une présentation de l'article [17] co-écrit avec Christine Vespa. Le résultat principal de l'article est le suivant :

**Théorème 2.1.1.**

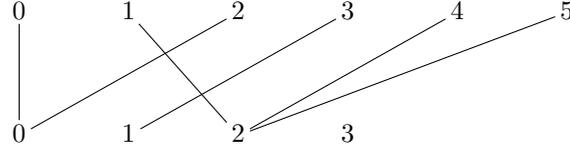
$$H_*^{Leib}(A, M) = Tor_*^{\Gamma_{sh}^{Lie}}(t, \mathcal{L}_{sh}^{Lie}(A, M))$$

où

- $A$  une algèbre de Lie
- $M$  un  $A$ -module
- $H_*^{Leib}$  l'homologie de Leibniz
- $\Gamma_{sh}^{Lie}$  une certaine catégorie (enrichie linéairement)
- $t$  et  $\mathcal{L}_{sh}^{Lie}(A, M)$  certains foncteurs.

Nous exprimons donc l'homologie de Leibniz d'une algèbre de Lie comme une homologie de foncteurs sur une certaine catégorie généralisant la catégorie  $\Gamma$  de Segal.

Rappelons que  $\Gamma$  est la catégorie dont les objets sont les ensembles  $[n] = \{0, \dots, n\}$  où  $n \geq 0$  (avec 0 comme point base) et les morphismes sont les applications pointées. On peut représenter de tels morphismes graphiquement, comme dans l'exemple ci-dessous dans  $\Gamma([5], [3])$  :



Cette catégorie sert de source pour les foncteurs de Loday qui, pour une algèbre commutative unitaire  $A$  et un  $A$ -module  $M$ , sont définis comme suit :

$$\mathcal{L}(A, M) : \Gamma \rightarrow \mathbb{K}\text{-Mod}$$

$$[n] \mapsto M \otimes A^{\otimes n}$$

$f \mapsto f_* : M \otimes A^{\otimes n} \rightarrow M \otimes A^{\otimes m}$  pour  $f : [n] \rightarrow [m]$  et où  $f_*$  effectue des produits déterminés par les préimages de  $f$ . Illustrons ceci par un exemple avec le morphisme  $f \in \Gamma([5], [3])$  dessiné ci-dessus :

$$f_*(a_0 \otimes a_1 \otimes a_2 \otimes a_3 \otimes a_4 \otimes a_5) = b_0 \otimes b_1 \otimes b_2 \otimes b_3$$

où  $b_0 = a_0, a_2, b_1 = a_3, b_2 = a_1 a_4 a_5$  et  $b_3 = 1$ , c'est-à-dire

$$b_i = \prod_{j \in f^{-1}(i)} a_j \text{ pour } i \in [m].$$

L'algèbre  $A$  étant commutative et unitaire, ce produit est bien défini de façon unique.

Notre théorème est dans la suite de résultats (obtenus par Pirashvili [27], Robinson et Whitehouse [29], Livernet et Richter [21]) exprimant des homologies d'algèbres (commutatives, associatives,  $E_n$ ) comme de l'homologie de foncteurs sur  $\Gamma$  (ou ses variantes).

Mentionnons notamment

**Théorème 2.1.2** (Robinson-Whitehouse). *Pour  $A$  une algèbre unitaire commutative et  $M$  un  $A$ -module,*

$$H_*^{Harr}(A, M) = Tor_*^{\Gamma}(t, \mathcal{L}(A, M)) \quad \text{sur un corps } \mathbb{K} \text{ de carac. } 0$$

$$H_*^{E_\infty}(A, M) = Tor_*^{\Gamma}(t, \mathcal{L}(A, M)) \quad \text{dans le cas général.}$$

Le foncteur  $t$  est celui envoyant  $[0]$  sur  $\mathbb{K}$  et le reste sur  $0$ .

La différence principale entre notre résultat et les résultats précédents que les opérades Leibniz et Lie que nous considérons ne sont pas ensemblistes.

Faisons maintenant quelques rappels sur l'homologie de foncteurs.

Soit  $\mathcal{C}$  une catégorie,  $F$  un foncteur  $\mathcal{C}^{op} \rightarrow \mathbb{K}\text{-Mod}$  (appelé  $\mathcal{C}$ -module à droite) et  $G$  un foncteur  $\mathcal{C} \rightarrow \mathbb{K}\text{-Mod}$  (appelé  $\mathcal{C}$ -module à gauche)

**Définition 2.1.3.** Le produit tensoriel des foncteurs  $F \otimes_{\mathcal{C}} G$  est le  $\mathbb{K}$ -module défini par

$$F \otimes_{\mathcal{C}} G = \bigoplus_{c \in \mathcal{C}} F(c) \otimes_{\mathbb{K}} G(c) / \sim$$

où  $x \otimes_{\mathbb{K}} G(f)(y) \sim F(f)(x) \otimes_{\mathbb{K}} y$  pour tout  $f : c \rightarrow c'$ ,  $x \in F(c')$  et  $y \in G(c)$ .

Ce produit tensoriel de foncteurs est exact à droite en les deux variables. De plus, il existe une notion de résolutions projectives pour les  $\mathcal{C}$ -modules. On peut donc définir

**Définition 2.1.4.**

$$Tor_*^{\mathcal{C}}(F, G) = H_*(P_{\bullet} \otimes_{\mathcal{C}} G)$$

où  $P_{\bullet}$  est une résolution projective de  $F$  dans la catégorie des  $\mathcal{C}$ -modules à droite.

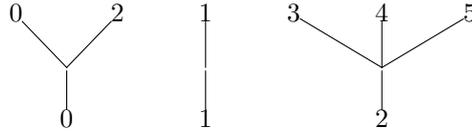
Ces définitions se prolongent au cas où  $\mathcal{C}$  est une catégorie enrichie linéairement.

Dans l'énoncé du théorème, il reste notamment à définir la catégorie  $\Gamma_{sh}^{Lie}$  et le foncteur  $\mathcal{L}_{sh}^{Lie}(A, M)$  (de  $\Gamma_{sh}^{Lie}$  vers  $\mathbb{K}\text{-Mod}$ ). Commençons par définir une catégorie  $\Gamma_{sh}$ , similaire à  $\Gamma$  mais avec moins de symétries, qui nous servira ensuite pour  $\Gamma_{sh}^{Lie}$ .

**Définition 2.1.5.** La catégorie  $\Gamma_{sh}$  a pour objets les ensembles  $[n] = \{0, \dots, n\}$  pour  $n \geq 0$  (pointés en  $0$ ) et pour morphismes les applications pointées surjectives shuffle, i.e.  $\alpha$  telles que  $\min(\alpha^{-1}(i)) < \min(\alpha^{-1}(j))$  pour  $i < j$ .

Ces morphismes se représentent graphiquement comme suit.

**Exemple 2.1.6.** Voici un morphisme  $\alpha$  dans  $\Gamma_{sh}([5], [2])$ :



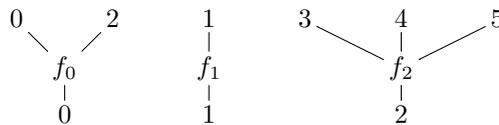
Dans ce cas,  $0 < 1 < 3$ .

On se sert de cette catégorie  $\Gamma_{sh}$  pour en définir une version opéradique, qu'on considérera ensuite pour l'opérade de Lie.

Soit  $P$  une opérade symétrique réduite dans  $\mathbb{K}\text{-Mod}$ .

**Définition 2.1.7.** On appelle  $\Gamma_{sh}^P$  la catégorie enrichie dans  $\mathbb{K}\text{-Mod}$  dont les objets sont les ensembles  $[n] = \{0, \dots, n\}$  pour  $n \geq 0$  (pointés en  $0$ ) et les morphismes sont  $\Gamma_{sh}^P([n], [m]) = \bigoplus_{\alpha \in \Gamma_{sh}([n], [m])} P(\alpha^{-1}(0)) \otimes \dots \otimes P(\alpha^{-1}(m))$ .

**Exemple 2.1.8.** Voici un morphisme dans  $\Gamma_{sh}^P([5], [2])$ , reprenant le  $\alpha$  précédent :

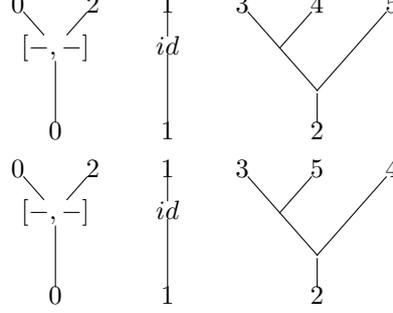


où  $f_0 \in P(2)$ ,  $f_1 \in P(1)$ ,  $f_2 \in P(3)$ .

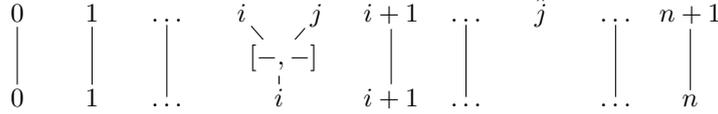
En connaissant une base de  $P$ , on obtient donc des bases des espaces de morphismes.

On se concentre maintenant sur le cas  $P = Lie$ , avec sa base PBW constituée de peignes gauches, et représentons deux éléments de la base (notée  $\mathcal{B}^{\Gamma_{sh}^{Lie}}(n, m)$ , avec ici  $n = 5$  et  $m = 2$ ) d'un espace de morphismes de  $\Gamma_{sh}^{Lie}$ .

**Exemple 2.1.9.**



**Exemple 2.1.10.** Pour tous  $0 \leq i < j \leq n$ , on a des éléments  $d_{i,j}$



Les deux éléments du premier exemple seront notés par la suite  $(0, 2|1|3, 4, 5)$  et  $(0, 2|1|3, 5, 4)$ . De façon plus formelle, cette notation provient de partitions ordonnées en uplets, dont nous énoncerons le lien avec les bases susmentionnées.

**Définition 2.1.11.** Un  $(n + 1)$ -uplet  $m$ -découpé est une partition ordonnée de  $[n]$  en  $m + 1$  uplets  $B_0 \cup B_1 \cup \dots \cup B_m$  où  $m \geq 0$  et les  $B_i = (k_{i,0}, \dots, k_{i,\ell_i})$  vérifient les conditions :

- (1)  $\forall 0 \leq i < j \leq m, k_{i,0} < k_{j,0}$ ,
- (2)  $\forall 0 \leq i \leq m, \forall 0 \leq q \leq \ell_i, k_{i,0} < k_{i,q}$ .

On écrira  $B_0 \cup B_1 \cup \dots \cup B_m$  sous la forme  $(B_0 | B_1 | \dots | B_m)$ .

L'exemple précédent contient donc deux 6-uplets 2-découpés.

**Notation 2.1.12.** On appelle  $STuple(n, m)$  l'ensemble des  $(n + 1)$ -uplets  $m$ -découpés, et  $STuple(n, \mathbb{N})$  l'union des  $STuple(n, m)$  quand  $m$  décrit  $\mathbb{N}$ . On appelle  $Tuple(n)$  l'ensemble  $STuple(n, 0)$  (ce sont les  $n + 1$ -uplets commençant par 0).

**Proposition 2.1.13.** Pour tous entiers  $0 \leq m \leq n$ , il y a une bijection entre  $STuple(n, m)$  et  $\mathcal{B}^{\Gamma_{sh}^{Lie}}(n, m)$ .

Cette description explicite des morphismes de  $\Gamma_{sh}^{Lie}$  sera une des clés dans la preuve du théorème. Revenons d'abord à la définition du foncteur  $\mathcal{L}_{sh}^{Lie}(A, M) : \Gamma_{sh}^{Lie} \rightarrow \mathbb{K}\text{-Mod}$ .

**Définition 2.1.14.** Soit  $A$  une algèbre de Lie et  $M$  un  $A$ -module.

Le foncteur  $\mathcal{L}_{sh}^{Lie}(A, M) : \Gamma_{sh}^{Lie} \rightarrow \mathbb{K}\text{-Mod}$  est défini sur les objets par  $\mathcal{L}_{sh}^{Lie}(A, M)([n]) = M \otimes A^{\otimes n}$  et pour un morphisme  $f = (\alpha, f_0, \dots, f_m) \in \Gamma_{sh}^{Lie}([n], [m])$ , la flèche induite  $f_* : M \otimes A^{\otimes n} \rightarrow M \otimes A^{\otimes m}$  est donnée par

$$f_*(a_0 \otimes a_1 \otimes \dots \otimes a_n) = b_0 \otimes \dots \otimes b_m$$

où  $b_i = \theta(f_i \otimes \bigotimes_{j \in \alpha^{-1}(i)} a_j)$  ( $\theta$  est l'évaluation dans la structure d'algèbre de Lie).

En appelant  $t$  le foncteur contravariant de  $\Gamma_{sh}^{Lie}$  vers  $\mathbb{K}\text{-Mod}$  qui vaut  $\mathbb{K}$  sur  $[0]$  et 0 sinon, et en notant  $H_*^{Leib}(A, M)$  l'homologie opéradique d'une algèbre de Leibniz (définie par exemple comme l'homologie du complexe  $M \otimes (P^i \circ A)$  pour  $P = Leib$  avec la différentielle usuelle pour l'homologie opéradique à coefficients), on a donc défini tous les termes du théorème :

**Théorème 2.1.15.**

$$H_*^{Leib}(A, M) = Tor_*^{\Gamma_{sh}^{Lie}}(t, \mathcal{L}_{sh}^{Lie}(A, M))$$

où  $A$  est une algèbre de Lie et  $M$  un  $A$ -module.

La preuve est un peu plus générale, où nous montrons en fait que pour tout foncteur  $T : \Gamma_{sh}^{Lie} \rightarrow \mathbb{K}\text{-Mod}$

$$H_*^{Leib}(T) = Tor_*^{\Gamma_{sh}^{Lie}}(t, T)$$

où  $H_*^{Leib}$  d'un foncteur est l'homologie du complexe

$$\dots \xrightarrow{d} T([n]) \xrightarrow{d} T([n-1]) \xrightarrow{d} \dots$$

la différentielle  $d$  étant  $T(\sum_{0 \leq i < j \leq n} (-1)^j d_{i,j})$ . En appliquant cette définition de  $H_*^{Leib}$  au foncteur  $T = \mathcal{L}_{sh}^{Lie}(A, M)$ , on retrouve l'homologie de Leibniz de  $A$  à coefficients dans  $M$ .

La première idée de la preuve est d'utiliser la caractérisation suivante d'un foncteur homologique.

**Proposition 2.1.16.** *Si  $H_*$  est un foncteur d'une catégorie  $\mathcal{C}$  vers  $\mathbb{K}\text{-grMod}$  tel que*

- $H_0(F)$  est isomorphe à  $G \otimes_{\mathcal{C}} F$  pour tout  $F \in \mathcal{C}\text{-mod}$
- $H_*(-)$  envoie les suites exactes courtes de  $\mathcal{C}$ -modules sur des suites exactes longues
- $H_i(F) = 0$  pour tout projectif  $F$  et  $i > 0$

alors  $H_i(F) = Tor_i^{\mathcal{C}}(G, F)$  pour tout  $F$  et tout  $i$ .

Les deux premières conditions sont immédiates à vérifier.

Pour l'annulation de l'homologie des représentables (qui induisent les projectifs par somme), l'idée clé va être de filtrer le complexe  $C_*^{Leib}(\Gamma_{sh}^{Lie}([n], -))$  (à  $n$  fixé) et d'utiliser un ordre partiel sur les uplets découpés (qui sont en bijection avec les bases des espaces de morphismes de  $\Gamma_{sh}^{Lie}$ ). On pourra alors montrer l'acyclicité du gradué associé.

Un uplet découpé se projette sur un uplet en oubliant les barres dans la notation, par exemple :

$$p : (0, 2|1|3, 5, 4) \mapsto (0, 2, 1, 3, 5, 4)$$

Ces  $n$ -uplets pouvant être ordonnés lexicographiquement, on obtient un ordre partiel sur la base de  $\bigoplus_m \Gamma_{sh}^{Lie}([n], [m])$ , par exemple  $(0, 2|1|3, 5, 4) > (0, 2|1|3, 4, 5)$ .

**Proposition 2.1.17.** *Soit  $u$  un  $n$ -uplet dans  $\text{Tuple}(n)$ . Les  $\mathbb{K}$ -modules*

$$F_u := \bigoplus_{b \in \mathcal{B}^{\Gamma_{sh}^{Lie}}(n, \mathbb{N}), p(b) \geq u} \mathbb{K}b$$

forment une filtration ascendante du  $\mathbb{K}$ -module  $\bigoplus_m \Gamma_{sh}^{Lie}([n], [m])$ .

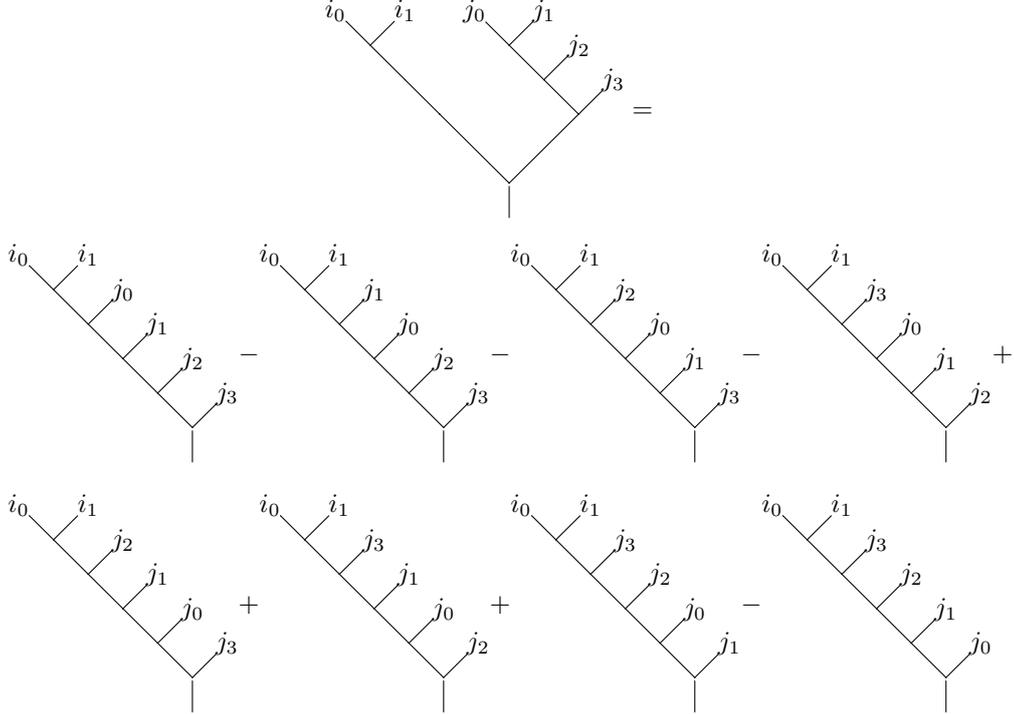
Le gradué associé est

$$gr\left(\bigoplus_m \Gamma_{sh}^{Lie}([n], [m])\right) = \bigoplus_{u \in \text{Tuple}(n)} gr_u$$

où  $gr_u$  est  $\bigoplus_{b \in \mathcal{B}_{sh}^{\Gamma_{Lie}}(n, \mathbb{N}), p(b)=u} \mathbb{K}b$ .

Il reste à montrer que cette filtration (d'espace vectoriel) est compatible à la différentielle. Celle-ci est une somme de post-composition par des  $d_{i,j}$ . En pratique, cela revient à calculer le crochet de deux éléments de la base PBW de Lie, en l'exprimant explicitement comme somme d'éléments de la base, et en vérifiant que ces éléments restent au bon endroit dans la filtration.

**Exemple 2.1.18.** Post-composer  $(i_0, i_1 | j_0, j_1, j_2, j_3) \in \Gamma_{sh}^{Lie}([5], [1])$  par  $d_{0,1}$  revient à calculer



La somme commence par

$$(i_0, i_1, j_0, j_1, j_2, j_3) - (i_0, i_1, j_1, j_0, j_2, j_3) - \dots$$

Le premier terme est dans le même étage de filtration que l'élément avec lequel nous avons commencé, alors que les 7 autres sont strictement plus hauts dans la filtration.

L'observation de l'exemple ci-dessus se généralise aux postcompositions par des  $d_{i,i+1}$ , tandis que pour celles par des  $d_{i,j}$  avec  $j > i + 1$ , tous les termes se trouvent strictement plus haut dans la filtration que l'élément initial. Les détails techniques sont dans le lemme 4.20 (basé sur le lemme 4.16) de l'article [17].

**Proposition 2.1.19.** *La différentielle et la filtration sont compatibles.*

Donc seuls les  $d_{i,i+1}$  vont contribuer de façon non triviale dans le gradué associé, et on obtient la formule suivante :

$$d_{gr}(B_0 | \dots | B_m) = \sum_{0 \leq i < m} (-1)^{i+1} (B_0 | \dots | B_i B_{i+1} | \dots | B_m)$$

où  $B_i B_{i+1}$  désigne la concaténation des deux blocs  $B_i$  et  $B_{i+1}$ .

Il reste à prouver que ces gradués associés sont acycliques. Ceci se fait en montrant qu'ils sont isomorphes (comme complexes) à des complexes standards

de faces d'un simplexe. En considérant la suite spectrale associée à la filtration (bornée car indexée par un ensemble finie), on conclut la preuve de l'acyclicité des projectifs, point restant pour obtenir le théorème.

Une question très naturelle pour la suite est d'essayer de situer ce résultat dans un contexte plus large. Une conjecture raisonnable est de penser à ce théorème de la façon suivante : pour  $P$  une opérade symétrique et  $P_{sh}$  son opérade shuffle associé, on exprime l'homologie d'une  $P$ -algèbre vue en tant que  $P_{sh}$ -algèbre au moyen d'une catégorie et d'un foncteur de Loday associés à  $P_{sh}$ . Notre preuve est très spécifique à  $P = Lie$  et ne peut pas se généraliser au cas général, mais il est probable que l'étude de l'adjonction entre les opérades symétriques et les opérades shuffle permette de progresser vers une preuve générale.

## 2.2. Calcul propéradique et théorème de transfert homotopique. -

Contrairement au cas opéradique, l'étude algébro-homotopique des algèbres sur une propéradade se heurte au problème suivant : pour  $P$  une propéradade, il n'existe pas en général de  $P$ -algèbre libre. Ceci empêche notamment de généraliser les constructions bar et cobar entre  $P$ -algèbres et  $C$ -cocèbres pour  $P$  une opérade et  $C$  une coopéradade duale (duale de Koszul le cas échéant, ou sa construction bar par exemple sinon).

Une idée clé de l'article [14] écrit avec Johan Leray et Bruno Vallette est de contourner ce problème en introduisant une structure algébrique étendant la notion de  $C$ -comodules (pour  $C$  une copropéradade). Ceci permettra de donner une définition équivalente de  $P$ -algèbre à homotopie près, avec une notion appropriée d'infimorphisme, dont les propriétés généralisent le cas opéradique connu. Nous obtenons également grâce à cette construction un théorème de transfert homotopique, via une nouvelle méthode. Ces résultats nous permettent de retrouver les résultats de Cielibak, Fukaya et Latschev [6] sur les bigèbres de Lie involutives à homotopie près.

Commençons par quelques rappels sur les structures monoïdales dans les  $\Sigma$ -bimodules (les détails sur les premières structures se trouvent dans [34] et [19]). On se place sur un corps  $\mathbb{K}$  de caractéristique nulle.

La catégorie  $\Sigma$ -bimod des  $\Sigma$ -bimodules réduits, dont les objets seront notés  $\{M(m, n)\}_{m \in \mathbb{N}^*, n \in \mathbb{N}}$  (où  $n$  désigne le nombre d'entrées et  $m$  le nombre non nul de sorties), est muni d'un *produit de composition*  $\square$  défini par

$$(M \square N)(m, n) := \begin{cases} \bigoplus_{k \in \mathbb{N}^*} M(m, k) \otimes_{\Sigma_k} N(k, n), & \text{pour } n > 0, \\ \bigoplus_{k \in \mathbb{N}^*} M(m, k) \otimes_{\Sigma_k} N(k, 0) \oplus M(m, 0), & \text{pour } n = 0. \end{cases}$$

et pouvant se représenter comme suit :

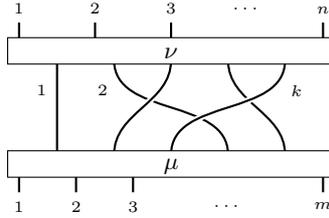


FIGURE 1. Un élément de  $M \square N$ .

En notant  $\mathbb{K}[\Sigma]$  le bimodule concentré en  $\mathbb{K}[\Sigma](n, n) = \mathbb{K}[\Sigma_n]$  pour  $n \in \mathbb{N}^*$ , on obtient une structure de catégorie monoïdale sur  $(\Sigma\text{-bimod}, \square, \mathbb{K}[\Sigma])$ .

On peut définir un *produit de concaténation* (noté  $\otimes$ ) défini pour deux  $\Sigma$ -bimodules  $M$  et  $N$  par

$$(M \otimes N)(m, n) := \bigoplus_{\substack{m_1 + m_2 = m \\ n_1 + n_2 = n}} \mathbb{K}[\Sigma_m] \otimes_{\Sigma_{m_1} \times \Sigma_{m_2}} M(m_1, n_1) \otimes N(m_2, n_2) \otimes_{\Sigma_{n_1} \times \Sigma_{n_2}} \mathbb{K}[\Sigma_n].$$

ce qui munit la catégorie  $\Sigma$ -bimod d'une structure monoïdale symétrique non-unitaire. Ces deux structures sont compatibles via la loi d'échange usuelle.

On obtient ainsi la catégorie monoïdale  $(\text{nuComMon}_{\otimes}, \square, \mathbb{K}[\Sigma])$  des monoïdes (pour  $\otimes$ ) commutatifs non-unitaires.

Pour  $M$  un  $\Sigma$ -bimodule, on définit le  $\otimes$ -monoïde commutatif non-unitaire libre par  $SM = \bigoplus (M^{\otimes k})_{\Sigma_k}$ . Une question naturelle est de se demander quelle est la structure de  $\otimes$ -monoïde sur un produit  $SM \square SN$  pour  $M$  et  $N$  des  $\Sigma$ -bimodules. Une comparaison des graphes associés montre directement que

$$SM \square SN \cong S(M \boxtimes N)$$

où  $\boxtimes$  désigne le *produit de composition connexe* des  $\Sigma$ -bimodules.

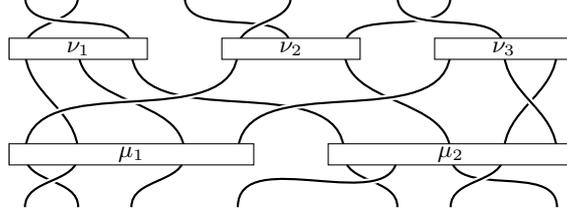


FIGURE 2. Un élément de  $M \boxtimes N$ .

On obtient de plus les formules suivantes, pour  $A$  un dg-module vu comme un  $\Sigma$ -bimodule d'arité  $(1, 0)$  :

- (1)  $M \boxtimes A \cong M \square SA$ ,
- (2)  $End_B^A \cong \text{hom}(SA, SB)$ .

Rappelons brièvement la notion de propétrade avant de plus détailler celle de copropétrade, légèrement plus complexe.

Une *propétrade* est un monoïde dans la catégorie  $\Sigma$ -bimod pour le produit  $\boxtimes$ . La catégorie des propétrades est équivalente à la catégorie des algèbres sur la monade des graphes (dirigés connexes ; avec un produit monadique donné par substitution). La *propétrade libre* sur un  $\Sigma$ -bimodule  $M$  peut être vue comme les graphes étiquetés par  $M$ .

Pour les copropétrades, commençons par considérer l'ensemble  $\tilde{G}$  des graphes connexes dirigés réduits (c-à-d sans le graphe trivial à une entrée et une sortie). On définit alors un endofoncteur  $\mathcal{G}^c$  sur les  $\Sigma$ -bimodules par

$$\mathcal{G}^c = \bigoplus_{g \in \tilde{G}} g(M)$$

où  $g(M)$  désigne le bimodule des graphes étiquetés par  $M$ . La structure de comonade est donnée par les partitions d'un graphe en sous-graphes, avec la counité donnée par la projection sur  $M$  pour les graphes à 1 sommet.

Une *copropétrade comonadique* est alors une cogèbre dans la comonade  $\mathcal{G}^c$  des graphes réduits. Une telle structure correspond à se donner un coproduit  $\Delta_{\tilde{C}} : \tilde{C} \rightarrow \mathcal{G}^c(\tilde{C})$ , qui coupe une opération en toutes les décompositions possibles.

Une *copropétrade* est un comonoïde dans la catégorie  $(\Sigma\text{-bimod}, \boxtimes, I)$ , et on peut définir comme d'habitude la notion d'augmentation dans ce cadre. On peut également définir pour une coopétrade coaugmentée un coproduit infinitésimal  $\Delta_{(1,1)}$ , qui sera largement utilisé dans la suite.

Le résultat fondamental de comparaison entre ces structures est le suivant : une structure de copropétrade comonadique (sur  $\tilde{C}$ ) induit une structure de copropétrade augmentée (sur  $C = I \oplus \tilde{C}$ ) qui induit un coproduit infinitésimal, mais il n'est pas possible de remonter cette chaîne de structures.

Les produit et coproduit infinitésimaux permettent de définir une structure d'algèbre Lie-admissible sur  $Hom_{\Sigma\text{-bimod}}(C, P)$  (pour  $P$  une propétrade et  $C$  une copropétrade coaugmentée supposée de plus conilpotente dans toute la suite), de

définir les morphismes tordants comme solution de l'équation de Maurer Cartan dans cette algèbre (on note  $Tw(C, P)$  l'ensemble de ces morphismes tordants), ainsi que des constructions bar  $B$  et cobar  $\Omega$ . Ces constructions sont reliées par la Pierre de Rosette suivante [23, Proposition 17] :

$$Hom_{dgprop}(\Omega C, P) \cong Tw(C, P) \cong Hom_{dgcoprop}(C, BP).$$

Pour  $P$  une opérade, considérons un remplacement cofibrant de la forme  $\Omega C$ , dont les algèbres sont appelées  $P$ -algèbres à homotopie près. On va en étudier les propriétés homotopiques ( $\infty$ -morphismes et théorème de transfert homotopique). Mais l'absence de  $C$ -cogèbre colibre va nous faire considérer certains  $SC$ -comodules qui nous serviront à redéfinir la notion de structure de  $\Omega C$ -algèbre puis la notion d' $\infty$ -morphismes, comme précisé dans le tableau suivant et détaillé ci-après.

OPÉRADES	PROPÉRADES
$C$ -comodules	$SC$ -comodules en monoïdes
$C$ -cogèbres colibres $C(A)$	$SC$ -comodules en monoïdes bilibres $SC \square SA \cong S(C \boxtimes A)$
$\text{Hom}_\Sigma(C, \text{End}_A) \cong \text{Coder}(C(A))$	$\text{Hom}_\Sigma(C, \text{End}_A) \cong \text{Bider}(SC \square SA)$
structure de $\Omega C$ -algèbre $\cong \text{Codiff}(C(A))$	structure de $\Omega C$ -algèbre $\cong \text{Bidiff}(SC \square SA)$
$\infty$ -morphisme de $\Omega C$ -algèbres := morphisme de dg $C$ -cogèbres quasi-libres	$\infty$ -morphisme de $\Omega C$ -algèbres := morphisme de dg $SC$ -comodules en monoïdes quasi-bilibres

La structure clé pour remplacer les  $C$ -cogèbres colibres est la suivante.

Un  $SC$ -comodule en monoïde est un comodule sur le comonoïde  $SC$  dans la catégorie monoïdale  $(\text{nuComMon}_\otimes, \square, \mathbb{K}[\Sigma])$ , c'est-à-dire un bimodule  $M$  avec une structure de monoïde pour  $\otimes$  compatible avec une structure de coaction  $\delta : M \rightarrow SC \square M$ .

L'exemple typique va être le cas bilibre, de la forme  $SC \square SA$  pour  $A$  un espace vectoriel gradué (vu comme un bimodule d'arité  $(1,0)$ ). On obtient que les morphismes entre ces objets bilibres sont en bijection avec des morphismes symétriques vers le bimodule des endomorphismes.

Pour obtenir la Pierre de Rosette complète, on considère d'abord des *bidérivations* (dérivation pour le produit et codérivation par rapport à la structure de comodule) puis les *bidifférentielles* qui sont les bidérivations qui tordent la différentielle interne en une bidérivation de carré nul. On obtient alors que les bidifférentielles sur  $SC \square SA$  sont en bijection avec les morphismes tordants de  $C$  vers  $\text{End}_A$ , ce qui donne la Pierre de Rosette complète, où  $d_\alpha$  est la différentielle tordue :

**Théorème 2.2.1.**

$$Hom_{dgprop}(\Omega C, \text{End}_A) \cong Tw(C, \text{End}_A) \cong Hom_{dgcoprop}(C, B\text{End}_A) \cong \text{Bidiff}(SC \square SA)$$

$$F_\alpha \longleftrightarrow \alpha \longleftrightarrow G_\alpha \longleftrightarrow d_\alpha,$$

On définit alors un  $\infty$ -morphisme de  $A$  vers  $B$  (avec des structures de  $\Omega C$ -algèbres données par des morphismes tordants  $\alpha$  et  $\beta$ ) comme un morphisme de  $SC$ -comodules en monoïdes

$$(SC \square SA, d_{SC \square SA} + d_\alpha) \rightarrow (SC \square SB, d_{SC \square SB} + d_\beta).$$

Ces  $\infty$ -morphismes sont donnés de façon équivalente par les flèches de  $\Sigma$ -bimodules de  $C$  vers  $\text{End}_B^A$  compatibles aux structures de  $A$  et de  $B$  (ceci demande en fait de définir des actions à gauche et à droite pour la décomposition infinitésimale). On montre ainsi que cette notion est bien naturelle et compatible à la composition.

Les  $\infty$ -isomorphismes sont par définition ceux dont la première composante est un isomorphisme, et on montre que ceux sont les isomorphismes dans la catégorie des  $\infty$ - $\Omega C$ -algèbres. De même, les  $\infty$ -quasi-isomorphismes sont ceux dont la première composante est un quasi-isomorphisme.

Passons maintenant au théorème de transfert homotopique. On suppose donnée une *contraction* de la forme

$$h \circlearrowleft (A, d_A) \begin{matrix} \xrightarrow{p} \\ \xleftarrow{i} \end{matrix} (H, d_H) \quad ,$$

vérifiant

$$pi = id_H \quad , \quad ip - id_A = d_A h + h d_A \quad , \quad hi = 0 \quad , \quad ph = 0 \quad , \quad \text{and} \quad h^2 = 0 \quad .$$

Le but est donc de transférer (homotopiquement) la structure de  $A$  en une structure sur  $H$ . Dans le cas opéradique usuel, pour  $A$  une  $P$ -algèbre, on ne peut pas obtenir en général une structure de  $P$ -algèbre sur  $H$ , mais on peut transférer une structure de  $P$ -algèbre à homotopie près. La clé pour définir explicitement une telle structure sur  $H$  est d'insérer des  $i$ ,  $p$  et  $h$  sur les arêtes appropriées des arbres représentant des opérations dans  $BEnd_A$  (cf. [22, 10.3.1 et 10.3.2]).

On applique ici la même idée, en la généralisant aux cas des graphes, que l'on doit d'abord remplacer par des graphes à niveaux. Sur ces graphes à niveaux, on peut alors définir l'équivalent de l'insertion des  $h$  entre les niveaux des graphes (d'un point de vue technique, il faut symétriser et moyenner sur toutes les insertions possibles, ce qui explique le besoin de la caractéristique nulle).

On obtient alors un morphisme tordant et donc (via la Pierre de Rosette) une application  $\varphi$  de  $\Omega BEnd_A$  vers  $End_H$  et une application de  $BEnd_A$  vers  $BEnd_H$ . Celles-ci permettent de définir les extensions  $i_\infty \in Hom_\Sigma(BEnd_A, End_H^A)$  et  $p_\infty \in Hom_\Sigma(BEnd_A, End_H^A)$  des flèches  $i$  et  $p$ , qui sont des  $\infty$ -morphisms de  $\Omega BEnd_A$ .

Ces structures universelles peuvent être tirées en arrière comme suit :

**Théorème 2.2.2.** *Pour  $\alpha$  une structure de  $\Omega C$ -algèbre sur  $A$  et une donnée de contraction, la composée*

$$\bar{C} \xrightarrow{G_\alpha} BEnd_A \xrightarrow{\varphi} End_H$$

définit une structure de  $\Omega C$ -algèbre sur  $H$  et les composées

$$\bar{C} \xrightarrow{G_\alpha} BEnd_A \xrightarrow{i_\infty} End_H^A \quad \text{et} \quad \bar{C} \xrightarrow{G_\alpha} BEnd_A \xrightarrow{p_\infty} End_H^A$$

sont des  $\infty$ -quasi-isomorphismes de  $H$  vers  $A$  étendant  $i$  et respectivement de  $A$  vers  $H$  étendant  $p$ .

Deux corollaires de ce théorèmes sont l'inversibilité des  $\infty$ -quasi-isomorphismes ainsi que le remplacement des zig-zags de quasi-isomorphismes par un  $\infty$ -quasi-isomorphisme. Nous obtenons également une théorie d'obstruction (concernant les  $\infty$ -morphisms) grâce aux actions infinitésimales à gauche et à droite.

Notre théorie permet de retrouver les cas opéradiques ou diopéradiques déjà connus. Nous retrouvons également les constructions ad hoc de [6] pour les bigèbres de Lie involutives à homotopie près. Leurs constructions sont exactement un cas particulier des nôtres, avec une différence notable : notre théorème de transfert homotopique est explicite, alors que le leur est obtenu par théorie d'obstruction.

### 3. SUR LES INFINI-OPÉRADES DENDROÏDALES

Dans ce dernier chapitre, je détaille mes résultats concernant le modèle dendroïdal des infini-opérades. Ces résultats ont été obtenus dans des travaux en collaboration avec Ieke Moerdijk, [15] et [16]. Le premier étudie des shuffles d'arbres, le second décrit notamment une dualité bar-cobar pour les infini-opérades.

Une motivation importante des shuffles d'arbres est la description combinatoire de la structure monoïdale des ensembles dendroïdaux : de même qu'en simplicial, le produit de représentables peut être décrit grâce à des shuffles.

Sauf exception, dans toute la suite, on considérera des arbres ouverts (c'est-à-dire sans sommet d'arité 0), pour éviter certaines complications techniques. Une grande partie des résultats s'obtiennent quand même dans un contexte plus général.

#### 3.1. Le monde dendroïdal.

Commençons par faire quelques rappels sur les ensembles dendroïdaux, pour lesquels on pourra trouver des détails dans [13] ou historiquement dans [24].

L'idée de base est de remplacer la catégorie  $\Delta$  par une catégorie  $\Omega$ , dont les objets sont les arbres (non-planaires, enracinés) ; ceci permettra donc de modéliser des structures avec des compositions à plusieurs entrées. Les morphismes dans  $\Omega$  consistent en une généralisation des morphismes de  $\Delta$  : des faces, des dégénérescences, mais aussi des isomorphismes d'arbres (ainsi qu'une face qui peut ou non exister en fonction de ce qui entoure le sommet racine). Les préfaisceaux sur  $\Delta$  (c'est-à-dire les ensembles simpliciaux) sont alors remplacés par les préfaisceaux sur  $\Omega$ , appelés *ensembles dendroïdaux*.

Notons  $i$  l'inclusion de  $\Delta$  dans  $\Omega$ , qui induit une adjonction

$$i_! : sSets \rightleftarrows dSets : i^*$$

L'adjoint à gauche  $i_!$  est pleinement fidèle.

Un exemple fondamental d'ensemble dendroïdal est le représentable associé à un arbre  $T$ , qu'on note  $\Omega[T]$ . Pour un entier  $n$ ,  $i[n]$  est "l'arbre-tronc" à  $n$  sommets et  $n + 1$  arêtes et il vérifie  $i_!(\Delta[n]) = \Omega(i[n])$ .

Pour un arbre  $T$ , on peut définir  $\Omega(T)$ , opérade (symétrique colorée ; on note dans ce chapitre  $Op_{col}$  cette catégorie) libre sur les sommets de  $T$  (les couleurs étant les arêtes, et les éléments de l'opérade correspondent donc à des sous-arbres de  $T$ ). Cette définition permet de donner une autre caractérisation des morphismes dans la catégorie  $\Omega$  : un morphisme de  $S$  vers  $T$  est exactement un morphisme d'opérades de  $\Omega(S)$  vers  $\Omega(T)$ .

La notion de nerf se généralise aussi au contexte dendroïdal. Pour  $P$  une opérade dans  $Op_{col}$ , son *nerf dendroïdal*  $N_d(P)$  est l'ensemble dendroïdal défini par

$$N_d(P)(T) = Op_{col}(\Omega(T), P).$$

Ceci définit un foncteur  $N_d$  pleinement fidèle, qui a un adjoint à gauche

$$\tau_d : dSets \rightarrow Op_{col}.$$

Cette adjonction généralise celle entre ensembles simpliciaux et catégories, en s'inscrivant dans le carré

$$\begin{array}{ccc} sSets & \begin{array}{c} \xleftarrow{\tau} \\ \xrightarrow{N} \end{array} & Cat \\ \begin{array}{c} \uparrow i_! \\ \downarrow i^* \end{array} & & \begin{array}{c} \uparrow \iota_! \\ \downarrow \iota^* \end{array} \\ dSets & \begin{array}{c} \xleftarrow{\tau_d} \\ \xrightarrow{N_d} \end{array} & Op_{col} \end{array}$$

doublement commutatif (commutation du diagramme avec les adjoints à gauche, et commutation du diagramme avec les adjoints à droite).

L'intérêt majeur des ensembles dendroïdaux est de donner un modèle combinatoire des  $\infty$ -opérades.

Commençons par rappeler la notion de morphisme normal. On appelle *normal* un ensemble dendroïdal  $X$  si pour tout arbre  $T$ , l'action de  $Aut(T)$  sur  $X(T)$  est libre. Et on appelle *normal* un morphisme  $X \rightarrow Y$  si pour tout arbre  $T$ ,  $Aut(T)$  agit librement sur le complémentaire de l'image de  $X(T)$  dans  $Y(T)$ .

Une *fibration de Kan interne* est un morphisme  $X \rightarrow Y$  d'ensemble dendroïdaux qui a la propriété de relèvement à droite par rapport à toutes les inclusions de cornets internes

$$\Lambda^e[T] \rightarrow \Omega[T]$$

pour tous les arbres  $T$  et toutes les arêtes internes  $e$  de  $T$ , et où les cornets se définissent en généralisant aisément le cas simplicial.

Une  $\infty$ -opérade (*dendroïdale*), ou encore *complexe de Kan dendroïdal interne*, est alors un ensemble dendroïdal  $X$  tel que la flèche terminale  $X \rightarrow 1$  est une fibration de Kan interne.

On peut maintenant faire quelques rappels sur la structure de modèle qui nous intéresse sur les ensembles dendroïdaux (il en existe d'autres, notamment celle de Nikolaus-Basic, liée à l'homotopie stable, mais nous intéressant moins ici). La structure, dite opéradique, peut être caractérisée comme suit, cf [7]:

- Les cofibrations sont les monomorphismes normaux.
- Les objets fibrants sont les  $\infty$ -opérades.

Cette structure généralise la structure dite de Joyal sur les ensembles simpliciaux, dont les objets fibrants sont les  $\infty$ -catégories.

Une propriété fondamentale de ces  $\infty$ -opérades est qu'elles correspondent aux  $\infty$ -opérades de Lurie, au sens précis suivant : En se restreignant aux  $\infty$ -opérades dendroïdales sans constante et aux  $\infty$ -préopérades de Lurie sans constante, il existe un zig-zag d'équivalences de Quillen entre ces deux catégories (voir [12], un intermédiaire pouvant être les ensembles forestiers). De plus, au niveau des catégories homotopiques, l'équivalence est monoïdale symétrique (pour les produits tensoriels respectifs).

Notamment, au niveau des  $\infty$ -opérades dendroïdales, le produit tensoriel est induit par le produit de Boardman–Vogt. Celui-ci, défini sur les opérades colorées, peut être compris comme suit : Les  $P \otimes_{BV} Q$ -algèbres sont les  $P$ -algèbres dans la catégorie des  $Q$ -algèbres, ou de façon équivalente, les  $Q$ -algèbres dans la catégorie des  $P$ -algèbres.

Une définition explicite est la suivante : Soient  $P$  et  $Q$  deux opérades, dont les ensembles de couleurs sont respectivement notés  $C$  et  $D$ . L'opérade  $P \otimes_{BV} Q$  a pour ensemble de couleurs  $C \times D$  ; ses opérations génératrices sont

$$p \otimes 1_d \in (P \otimes_{BV} Q)((c_1, d), \dots, (c_n, d); (c, d))$$

pour tout  $p \in P(c_1, \dots, c_n; c)$  et  $d \in D$ , et

$$1_c \otimes q \in (P \otimes_{BV} Q)((c, d_1), \dots, (c, d_n); (c, d))$$

pour tout  $q \in Q(d_1, \dots, d_n; d)$  et  $c \in C$  ; les relations sont celles induites par les structures opéradiques respectives de  $P$  et de  $Q$ , ainsi que par la relation d'échange (aussi appelée relation de Boardman–Vogt) :

$$(p \otimes d)(c_1 \otimes q, \dots, c_n \otimes q) = (c \otimes q)(p \otimes d_1, \dots, p \otimes d_m) \cdot \tau$$

pour  $p$  et  $q$  comme ci-dessus, et  $\tau$  la permutation réarrangeant l'ordre des couleurs des feuilles  $(c_i, d_j)$ .

Voici une image de cette relation, que l'on verra par la suite de façon orientée, comme une étape de percolation.



Ce produit de Boardman–Vogt sur les opérades colorées induit un produit tensoriel sur les ensembles dendroïdaux de la façon suivante, en deux étapes. Pour  $S$ ,  $T$  et  $R$  des arbres,

$$(\Omega[S] \otimes \Omega[T])(R) = \text{Hom}(\Omega(R), \Omega(S) \otimes_{BV} \Omega(T))$$

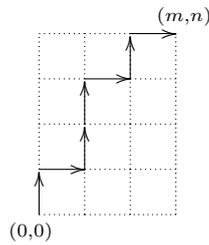
où le  $\text{Hom}$  est celui des opérades colorées. Ce produit défini sur les représentables est ensuite étendu à tous les ensembles dendroïdaux comme l'unique façon préservant les colimites dans chaque variable séparément.

### 3.2. Étude combinatoire de shuffles d'arbres.

Cette section est un résumé de l'article [15] écrit avec Ieke Moerdijk.

Notre but ici est de généraliser aux arbres la notion usuelle de shuffle. Les shuffles usuels sont ceux d'ordres totaux. Une définition possible est la suivante : pour  $A$  et  $B$  deux ordres totaux, un shuffle est un ordre total sur l'union disjointe de  $A$  et  $B$  coïncidant avec les ordres initiaux.

Une façon courante de les visualiser est de prendre  $A = (0 < 1 < \dots < m)$  et  $B = (0 < 1 < \dots < n)$ , et alors un tel shuffle a  $(0,0)$  comme plus petit élément,  $(m,n)$  comme plus grand, et peut être représenté par un chemin en escalier dans un rectangle, comme illustré ci-dessous.



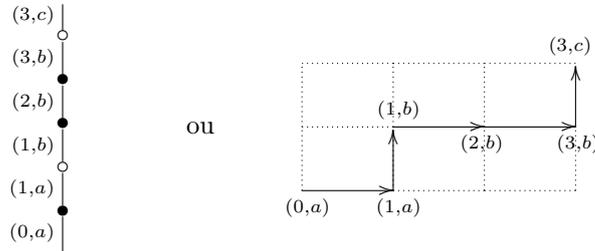
Si on considère  $A = (0 < 1 < \dots < m)$  comme un arbre linéaire avec  $m + 1$  arêtes et  $m$  sommets, et de même pour  $B$ , alors ce chemin dans le rectangle est un arbre linéaire dont les arêtes sont des  $(i, j)$  avec  $0 \leq i \leq m$  et  $0 \leq j \leq n$ , et où chaque sommet a l'une des deux formes suivantes :

$$\begin{array}{c} | \\ \bullet \\ | \\ (i+1, j) \\ | \\ (i, j) \end{array} \quad \text{ou} \quad \begin{array}{c} | \\ \circ \\ | \\ (i, j+1) \\ | \\ (i, j) \end{array}$$

Voici un petit exemple illustrant cette correspondance, en prenant

$$A : \begin{array}{c} 3 \\ | \\ \bullet z \\ | \\ 2 \\ | \\ \bullet y \\ | \\ 1 \\ | \\ \bullet x \\ | \\ 0 \end{array} \quad \text{et} \quad B : \begin{array}{c} c \\ | \\ \circ v \\ | \\ b \\ | \\ \circ u \\ | \\ a \end{array}$$

Un même shuffle peut être vu de trois façons différentes :



ou l'ordre total  $x < u < y < z < v$ .

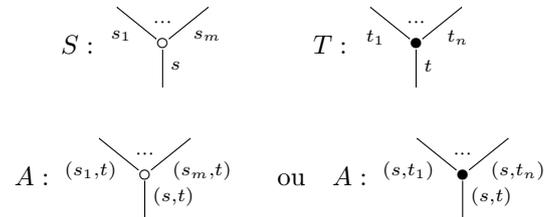
C'est la première représentation qui est la plus aisée à généraliser au cas des arbres (on rappelle qu'on suppose tous nos arbres ouverts).

**Définition 3.2.1.** Soit  $S$  et  $T$  deux arbres. Un shuffle de  $S$  et  $T$  est un arbre  $A$  tel que les quatre conditions suivantes sont vérifiées :

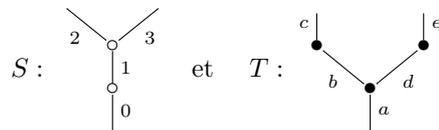
- (1) les arêtes de  $A$  sont étiquetées par des paires  $(s, t)$  où  $s$  et  $t$  sont des arêtes de  $S$  et  $T$  respectivement;
- (2) la racine de  $A$  est étiquetée par la paire  $(r_S, r_T)$  des arêtes racine de  $S$  et  $T$ ;
- (3) l'ensemble des étiquettes des feuilles de  $A$  est égal au produit cartésien des feuilles de  $S$  et de celles de  $T$ ;
- (4) Si  $(s, t)$  est l'étiquette d'une arête de  $A$  qui n'est pas une feuille, alors soit toutes les arêtes entrant sur le sommet au-dessus de  $(s, t)$  sont étiquetées  $(s_1, t), \dots, (s_m, t)$  où  $s_1, \dots, s_m$  sont les arêtes entrant sur le sommet au-dessus de  $s$  dans  $S$ ; soit ces arêtes sont étiquetées  $(s, t_1), \dots, (s, t_n)$  où  $t_1, \dots, t_n$  sont les arêtes entrant sur le sommet au-dessus de  $t$  dans  $T$ .

Notation: On notera  $Sh(S, T)$  l'ensemble des shuffles des arbres  $S$  et  $T$ .

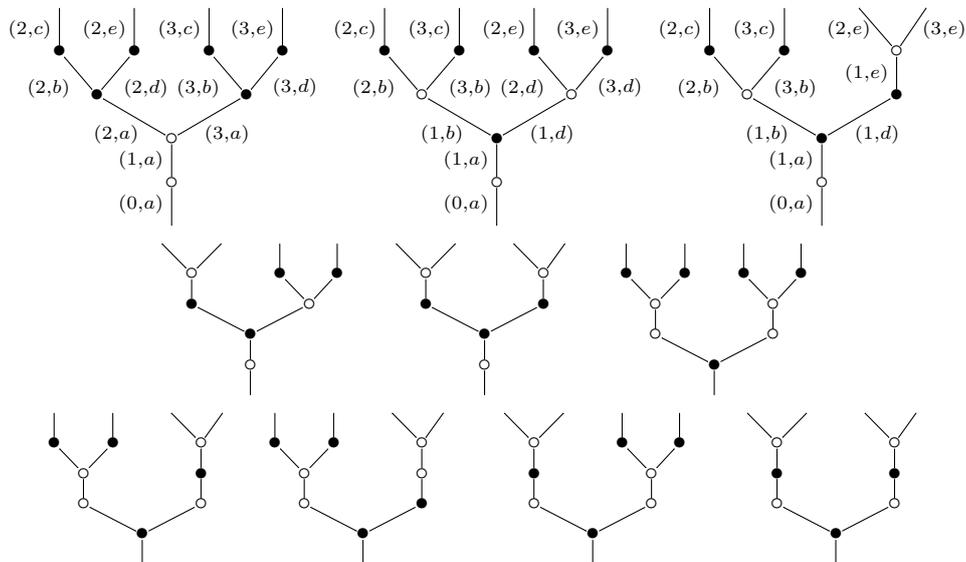
Voici une représentation graphique de la dernière condition de la définition, où le sommet de  $S$  au-dessus de l'arête  $s$  et le sommet de  $T$  au-dessus de l'arête  $t$  produit un sommet dans  $A$  au-dessus de  $(s, t)$  de l'une des deux formes suivantes :

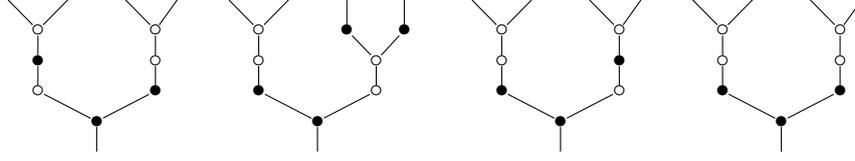


**Exemple 3.2.2.** Voici la liste complète des 14 shuffles des deux arbres suivants



issue de [25], Exemple 9.4. Les étiquettes sont indiquées pour les trois premiers shuffles.





Regardons maintenant quelques définitions équivalentes.

**Proposition 3.2.3.** Soient  $S$  et  $T$  deux arbres. Un shuffle de  $S$  et  $T$  est un arbre  $A$  vérifiant les conditions (1)-(3) de la Définition 3.2.1 (concernant les étiquettes des arêtes, les arêtes et les feuilles), ainsi que

- (4) Pour toute paire de feuilles  $s$  de  $S$  et  $t$  de  $T$ , la branche de  $A$  allant de la feuille  $(s, t)$  à la racine est un shuffle classique des deux branches allant de  $s$  à la racine de  $S$  et de  $t$  à la racine de  $T$ .

**Proposition 3.2.4.** Soient  $S$  et  $T$  deux arbres. Un shuffle de  $S$  et  $T$  est un sous-ensemble  $A \subset E(S) \times E(T)$  tel que

- (1) L'ordre partiel sur  $E(S) \times E(T)$  se réduit sur  $A$  en un ordre partiel arboré.
- (2) Les plus grands éléments dans cet ordre partiel sur  $A$  sont en bijection avec les paires  $(s, t)$  où  $s$  et  $t$  décrivent respectivement les feuilles de  $S$  et  $T$ .
- (3) L'ensemble  $A$  est maximal pour les propriétés (1) et (2).

**Proposition 3.2.5.** L'ensemble  $Sh(S, T)$  des shuffles de deux arbres  $S$  et  $T$  vérifie les trois propriétés suivantes :

- (1) (symétrie)  $Sh(S, T) \simeq Sh(T, S)$ .
- (2) (unité)  $Sh(S, \eta)$  et  $Sh(\eta, T)$  sont des singletons.
- (3) (induction) Si  $S = C_m[S_1, \dots, S_m]$  et  $T = C_n[T_1, \dots, T_n]$ , alors il y a une bijection canonique

$$\theta : Sh(S, T) \rightarrow \prod_{i=1}^m Sh(S_i, T) + \prod_{j=1}^n Sh(S, T_j).$$

(Ici  $C_m[S_1, \dots, S_m]$  désigne une corolle à  $m$  feuilles sur laquelle sont greffés des arbres  $S_1, \dots, S_m$  ;  $\prod$  et  $+$  désignent respectivement le produit cartésien et l'union disjointe.)

La description ci-dessus permet de voir que l'ensemble  $Sh(S, T)$  est muni d'un ordre partiel naturel, que l'on peut décrire par la propriété inductive suivante : Si un ordre partiel a été défini sur les shuffles des arbres plus petits, on ordonne  $Sh(S, T)$  en prenant d'abord l'ordre partiel produit sur  $\prod Sh(S_i, T)$  et  $\prod Sh(S, T_j)$ , puis en ordonnant ces deux termes en disant que tout élément du membre de gauche est plus petit que ceux du membre de droite. L'isomorphisme de symétrie inverse cet ordre.

Faisons maintenant quelques remarques d'ordre combinatoire avant de passer à une étude plus détaillée de l'ordre partiel sur  $Sh(S, T)$ .

La propriété précédente a des conséquences immédiates sur le nombre de shuffles.

**Proposition 3.2.6.** Le nombre de shuffles  $sh(S, T)$  de deux arbres  $S$  et  $T$  vérifie les propriétés suivantes :

- (1)  $sh(S, T) = sh(T, S)$ .
- (2) Si  $T$  est l'arbre unité  $\eta$ , alors  $sh(S, \eta) = 1$ .
- (3) Si  $S = C_m[S_1, \dots, S_m]$  si  $T = C_n[T_1, \dots, T_n]$ , alors

$$sh(S, T) = \prod_{i=1}^m sh(S_i, T) + \prod_{j=1}^n sh(S, T_j).$$

**Proposition 3.2.7.** *Pour des arbres  $S$  et  $T$ , on obtient les inégalités suivantes :*

$$\binom{ht(S) + ht(T)}{ht(S)} \leq sh(S, T) \leq \prod_{\alpha, \beta} \binom{|\alpha| - 1 + |\beta|}{|\beta|} + \prod_{\alpha, \beta} \binom{|\alpha| + |\beta| - 1}{|\alpha|}$$

$$\leq \prod_{\alpha, \beta} \binom{|\alpha| + |\beta|}{|\beta|}$$

où  $\alpha$  et  $\beta$  décrivent les branches de  $S$  et  $T$  respectivement, et  $|\alpha|$  est la hauteur d'une branche.

Pour  $S$  un arbre, notons  $S!$  le nombre

$$S! = \prod_{v \in S} |S_v|$$

où  $v$  décrit les sommets de  $S$ , et  $|S_v|$  est le nombre de sommets du sous-arbre  $S_v$  (le plus grand sous-arbre dont  $v$  est la racine). Par exemple pour un arbre linéaire  $L_n$ , on a  $L_n! = n!$  et pour  $S = C_m[S_1, \dots, S_m]$ , on a

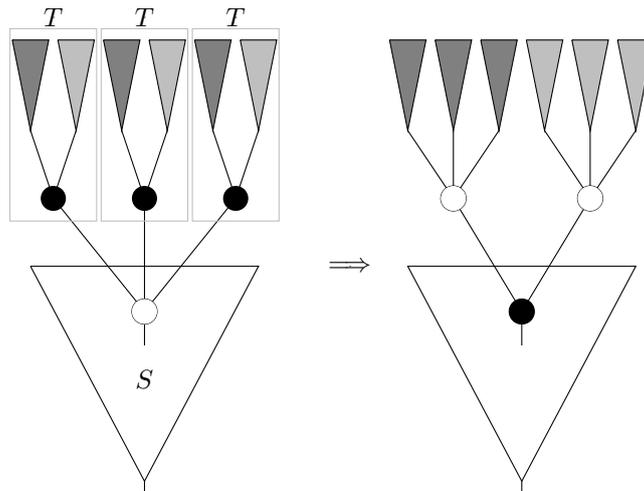
$$S! = |S| \left( \prod_{i=1}^m S_i! \right).$$

**Proposition 3.2.8.** *Pour tout arbre  $S$ , la fonction  $P_S : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  est un polynôme à coefficients rationnels de degré  $|S|$  et de terme dominant  $(S!)^{-1}$ .*

Ces propriétés combinatoires laissent cependant de nombreuses questions ouvertes, notamment l'existence de formules fermées décrivant le nombre de shuffles.

Revenons à l'ordre sur  $Sh(S, T)$ , dont nous donnons maintenant une description alternative.

Dessignons en blanc les sommets de  $S$  et en noir ceux de  $T$ . Alors l'élément minimal de  $Sh(S, T)$  est celui avec une copie de l'arbre noir  $T$  au-dessus de chaque feuille de  $S$ . Les éléments immédiatement en-dessous pour cet ordre partiel sont ceux obtenus par percolation, en descendant les copies du sommet racine de  $T$  au-dessus d'un même sommet blanc à travers celui-ci. Voici une illustration pour  $n = 2$  et  $m = 3$  :



De façon générale, on peut modifier un shuffle en remplaçant (via cette étape de percolation) un sommet blanc  $m$ -aire avec  $m$  copies du même sommet noir  $n$ -aire au-dessus par ce sommet noir avec  $n$  copies du sommet blanc au-dessus. Ce changement est purement local, et produit un shuffle plus petit pour l'ordre.

L'itération de ces étapes de percolation permet d'obtenir tous les shuffles à partir du shuffle maximal.

Donnons maintenant une autre description de cet ordre, sans induction.

Soit  $T$  un arbre, et appelons  $V(T)$  l'ensemble partiellement ordonné des sommets de  $T$ . Notons  $V(T)^\vee$  le même ensemble mais muni de l'ordre opposé.

Tout ordre partiel  $P$  possède une topologie, dite d'Alexandrov, dont les ouverts sont les idéaux supérieurs. Explicitement,  $U \subset P$  est ouvert si et seulement si

$$(p \leq q \text{ et } p \in U) \implies q \in U$$

pour tout  $p$  et  $q$  dans  $P$ . Notons  $\mathcal{O}(P)$  le treillis des ouverts de  $P$ .

**Proposition 3.2.9.** *Soit  $S$  et  $T$  deux arbres. Il y a un isomorphisme naturel d'ensembles partiellement ordonnés*

$$\varphi : Sh(S, T) \rightarrow \mathcal{O}(V(S) \times V(T)^\vee).$$

La preuve de cette proposition se fait en considérant la construction inductive de  $\varphi$  :

$$\begin{array}{ccc} Sh(S, T) & \xrightarrow[\theta]{\sim} & \prod Sh(S_i, T) + \prod Sh(S, T_j) \\ \varphi_{S, T} \downarrow & & \downarrow \prod \varphi_{S_i, T} + \prod \varphi_{S, T_j} \\ \mathcal{O}(V(S) \times V(T)^\vee) & \xrightarrow[\tau]{\sim} & \prod \mathcal{O}(V(S_i) \times V(T)^\vee) + \prod \mathcal{O}(V(S) \times V(T_j)^\vee) \end{array}$$

Les ouverts dans un ensemble partiellement ordonné sont donnés par les antichaines de cet ensemble partiellement ordonné. Celles-ci étant notoirement compliquées à dénombrer, la question de dénombrer les shuffles l'est donc également.

### 3.3. Homologie d'infini-opérades.

Le but de l'article [16] écrit avec Ieke Moerdijk est double : d'une part définir une théorie homologique pour les ensembles dendroïdaux ; d'autre part définir des constructions bar et cobar dans ce contexte. La construction bar envoie les  $\infty$ -opérades sur les  $\infty$ -coopérades, et via une construction de morphismes tordants, on obtient dans ce cadre un théorème de dualité.

Introduisons d'abord des sous-catégories de  $\mathbf{\Omega}$  qui vont nous servir ici : la sous-catégorie pleine  $\mathbf{\Omega}_r^\circ$  dont les objets sont les arbres ouverts et réduits (donc dont tous les sommets sont d'arité au moins 2), et la sous-catégorie non-pleine  $\mathbb{A} \subset \mathbf{\Omega}_r^\circ$  avec les mêmes objets mais dont les morphismes doivent préserver la racine et établir une bijection entre les ensembles de feuilles. La catégorie  $\mathbb{A}$  se décompose donc en une union disjointe de sous-catégories  $\mathbb{A}^{(\ell)}$  dont les objets sont les arbres (ouverts et réduits) à  $\ell$  feuilles (avec  $\ell \geq 2$ ).

Nous allons considérer différentes catégories de préfaisceaux sur  $\mathbb{A}$  et  $\mathbf{\Omega}_r^\circ$ . Notamment, pour  $P$  une opérade réduite (ensembliste ou linéaire par exemple), le nerf dendroïdal  $N(P)$  définit un préfaisceau de  $\mathbb{A}$  à valeurs dans  $Set$  ou  $Ch$ . Sa valeur en un arbre  $T$  est donné par un produit tensoriel de la forme

$$N(P)(T) = \bigotimes_v P(|v|) / \sim,$$

où  $v$  décrit les sommets de  $T$ ,  $|v|$  est l'arité du sommet  $v$  et  $\sim$  est l'action du groupe des automorphismes de  $T$ . Par ailleurs, pour un ensemble dendroïdal  $X : \mathbf{\Omega}^{op} \rightarrow \mathbb{C}$  à valeurs dans une catégorie  $\mathbb{C}$ , on peut considérer la restriction du préfaisceau  $X$  à  $\mathbb{A}$  ou à  $\mathbf{\Omega}_r^\circ$ , qu'on appellera encore ensemble dendroïdal.

Pour  $X$  un ensemble dendroïdal ouvert et réduit  $X : (\mathbf{\Omega}_r^\circ)^{op} \rightarrow sSets$ , on obtient un foncteur  $\mathbb{Z}[X] : (\mathbf{\Omega}_r^\circ)^{op} \rightarrow Ch$  en prenant le complexe de chaîne usuel  $\mathbb{Z}[X(T)]$  de chaque ensemble simplicial  $X(T)$ . Ce foncteur peut ensuite être restreint à  $\mathbb{A}$ .

Rappelons maintenant précisément la définition de (co)opérade dans le contexte dendroïdal.

Soient  $S$  et  $R$  deux arbres, et  $a$  une feuille de  $S$ . On note  $S \circ_a R$  l'arbre obtenu en greffant  $R$  sur la feuille  $a$  de  $S$ . Un foncteur  $X : \mathbb{A}^{op} \rightarrow Ch$  est appelé une  $\infty$ -*préopérade linéaire* si  $X$  est muni d'une structure donnée par des flèches

$$\theta = \theta_{S,R,a} : X(S \circ_a R) \rightarrow X(S) \otimes X(R)$$

qui sont naturelles en  $S$  et  $R$ , et qui vérifient des axiomes d'associativité. Le foncteur  $X$  est appelé une  $\infty$ -*opérade linéaire* si les flèches  $\theta$  sont de plus des quasi-isomorphismes.

**Exemple 3.3.1.** (1) Si  $P$  est une opérade linéaire, alors les flèches  $\theta$  pour  $X = N(P)$  sont des isomorphismes.

(2) Si  $X : \mathbb{A}^{op} \rightarrow sSets$  est un espace de Segal dendroïdal (restreint à  $\mathbb{A}$ ), alors  $\mathbb{Z}[X]$  est une  $\infty$ -opérade linéaire.

Dualement, un foncteur  $Y : \mathbb{A} \rightarrow Ch$  est une  $\infty$ -*précoopérade linéaire* s'il est muni de flèches

$$\Delta = \Delta_{S,R,a} : Y(S \circ_a R) \rightarrow Y(S) \otimes Y(R)$$

qui sont naturelles en  $S$  et  $R$  et vérifient des axiomes de coassociativité. Le foncteur  $Y$  est alors appelé  $\infty$ -*coopérade linéaire* si ces flèches  $\Delta$  sont de plus des quasi-isomorphismes.

Passons maintenant à la première notion nouvelle définie dans cet article : une notion d'homologie dendroïdale à valeurs dans les suites symétriques de groupes abéliens.

On appelle ici

$$\Sigma\text{-mod} = \prod_{\ell \geq 2} Ch_{\mathbb{Z}[\Sigma_\ell]}$$

la catégorie des suites symétriques de complexes de chaînes. On définit

$$DC : Ch^{\mathbb{A}^{op}} \rightarrow \Sigma\text{-mod}$$

le foncteur envoyant un préfaisceau  $M$  (défini sur  $\mathbb{A}^{op}$  et à valeurs dans  $Ch$ ) la suite symétrique dont la  $\ell$ -ième composante en degré  $p$  est

$$DC_p(M)^{(\ell)} = \left( \bigoplus_{T, \alpha, e} M(T) \right)_{\text{coinv}}$$

où

- $T$  décrit les arbres à exactement  $\ell$  feuilles et  $p + 1$  arêtes internes et au moins un sommet
- $\alpha : C_\ell \rightarrow T$  est un morphisme dans  $\mathbb{A}$
- $e = (e_0, \dots, e_p)$  est une énumération des arêtes internes de  $T$

et les coinvariants sont pris pour l'action du groupoïde  $H$  donné par le produit semi-direct des extensions  $C_\ell \rightarrow T$  et de leurs isomorphismes

$$\begin{array}{ccc} C_\ell & \xrightarrow{\alpha} & T \\ & \searrow & \downarrow \theta \\ & \alpha' & T' \end{array}$$

avec le groupe symétrique  $\Sigma_{[p]} = \Sigma_{\{0, \dots, p\}}$  (permutant les  $e_i$  et agissant avec la représentation signature).

*Remarque 3.3.2.* Le morphisme  $\alpha$  correspond à une énumération des feuilles de  $T$ , et la commutativité du diagramme ci-dessus correspond au fait que  $\theta$  respecte cette énumération. On pourrait donc travailler avec une catégorie d'arbres dont les feuilles sont étiquetées.

On écrit les éléments comme des quadruplets

$$(T, \alpha, e, x)$$

où  $e$  est comme ci-dessus et  $x \in M(T)$ .

Prendre les coinvariants pour l'action de  $H$  revient à faire les deux identifications suivantes : Premièrement,

$$(T, \alpha, e, \theta^* x') = (T', \theta\alpha, \theta e, x')$$

pour  $x' \in M(T')$ ,  $\theta : T \xrightarrow{\simeq} T'$  et  $\theta e$  l'énumération induite des arêtes internes de  $T'$ . Deuxièmement,

$$(T, \alpha, e, x) = (-1)^\tau (T, \alpha, e\tau, x)$$

pour toute permutation  $\tau \in \Sigma_{[p]}$  et la composition  $[p] \xrightarrow{\tau} [p] \xrightarrow{e} E(T)$ . L'action de  $\Sigma_\ell$  est donnée par précomposition, en identifiant  $\Sigma_\ell$  avec les automorphismes de  $C_\ell$ .

Dans cette construction (et plus tard dans les constructions bar et cobar), une première différentielle (appelée externe) est obtenue de façon simpliciale. Une seconde (appelée interne) est induite par la différentielle de  $M$ .

Une face simpliciale  $\partial_i : DC_p(M) \rightarrow DC_{p-1}(M)$  envoie le facteur  $M(T)$  de  $(T, \alpha, e)$  vers le facteur  $M(\partial_{e_i} T)$  de  $(\partial_{e_i} T, \partial_{e_i}^* \alpha, (e_0, \dots, \hat{e}_i, \dots, e_p))$ , où la flèche

$\partial_{e_i} : \partial_{e_i}(T) \rightarrow T$  est la face contractant  $e_i$ , la flèche  $\partial_{e_i}^*(\alpha) : C_\ell \rightarrow \partial_{e_i}(T)$  est l'unique morphisme dans  $\mathbb{A}$  vérifiant  $\alpha = \partial_{e_i} \circ \partial_{e_i}^*(\alpha)$ , et la flèche  $M(T) \rightarrow M(\partial_{e_i}T)$  est la restriction  $\partial_{e_i}^*$  donnée par la structure de préfaisceau sur  $M$ .

De plus le complexe est naturellement augmenté

$$DC_{-1}(M) = \bigoplus_{\ell \geq 2} M(C_\ell).$$

Les opérateurs simpliciaux commutant avec la différentielle de  $M$ , on obtient que  $DC(M)$  est un objet semi-simplicial augmenté de  $\Sigma$ -mod. On obtient donc un complexe double

$$\bigoplus_{p,q} DC_p(M_q)$$

où  $p \geq -1$  et  $q \geq 0$ , en prenant comme différentielle horizontale la somme alternée des faces

$$\partial = (-1)^i \partial_{e_i} : DC_p(M) \rightarrow DC_{p-1}(M)$$

et comme différentielle verticale  $\partial_{int}$  induite par celle de  $M$ ,

$$\partial_{int}(T, \alpha, e, x) = (-1)^{p+1}(T, \alpha, e, \partial_M(x)).$$

L'homologie du complexe total est notée

$$DH_*(M)$$

(avec  $* \geq -1$ ), et est appelée *homologie dendroïdale* de  $M$ .

**Exemple 3.3.3.** Soit  $P$  une opérade linéaire réduite. On a vu que  $N(P)$  est un préfaisceau sur  $\mathbb{A}$  à valeurs dans  $Ch$ . L'homologie de  $P$  (comme définie par Ginzburg et Kapranov) est l'homologie de sa construction bar  $B(P) = (T^c(s\bar{P}), \partial)$ . À un décalage de degré près, la suite symétrique (en arité plus grande que 1) est exactement le complexe défini ci-dessus. L'homologie de  $P$  est donc (à un décalage près) l'homologie dendroïdale de  $N(P)$ .

L'homologie dendroïdale vérifie des propriétés usuelles des théories d'homologie. Pour  $M \rightarrow M'$  un quasi-isomorphisme, la flèche induite  $DH_*(M) \rightarrow DH_*(M')$  est un isomorphisme ; et toute suite exacte courte induit une suite exacte longue. De plus, l'homologie dendroïdale se décompose (fonctoriellement) en fonction du nombre de feuilles (de la même façon que la catégorie  $\mathbb{A}$ ). Finalement, la définition venant d'un complexe double, on obtient deux suites spectrales convergeant vers l'homologie dendroïdale.

Calculons maintenant l'homologie des représentables.

**Proposition 3.3.4.** Pour un foncteur représentable  $\mathbb{A}(-, R)$  donné par un arbre  $R$ ,

$$DH_p^{(\ell)}(\mathbb{A}(-, R)) = \begin{cases} \mathbb{Z}[\Sigma_\ell] & \text{if } p = -1 \text{ et } R \simeq C_\ell \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

**Corollaire 3.3.5.** Pour un foncteur représentable  $\Omega_r^\circ(-, T)$  donné par un arbre  $T$ ,

$$DH_p(\mathbb{Z}\Omega_r^\circ(-, T)) = \begin{cases} \bigoplus_{v \in Vert(T)} \mathbb{Z}[\Sigma_{inputs(v)}] & \text{si } p = -1 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Ces petits calculs montrent que notre notion d'homologie est différente de celle définie par Basic et Nikolaus.

Une autre propriété de l'homologie dendroïdale est de s'exprimer en termes d'homologie de catégories.

**Proposition 3.3.6.** *Pour  $\ell \geq 2$  fixé, considérons la catégorie  $C_\ell/\mathbb{A}$  et sa sous-catégorie pleine  $C_\ell//\mathbb{A}$  au-dessus des non-isomorphismes  $C_\ell \rightarrow T$ . Alors pour  $M : \mathbb{A}^{op} \rightarrow Ab$  et sa restriction à  $C_\ell/\mathbb{A}$ ,*

$$DH_*^{(\ell)}(M) = H_{*+1}(C_\ell/\mathbb{A}, C_\ell//\mathbb{A}; M).$$

*Remarque 3.3.7.* Si  $M$  est un préfaisceau constant, alors en degré strictement positif  $DH_*^{(\ell)}(M)$  est l'homologie de l'espace classifiant de  $C_\ell//\mathbb{A}$  qui est lié au poset des partitions de  $\{1, \dots, \ell\}$ . Ceci s'applique notamment au nerf de l'opérade commutative. Ce poset de partitions est homotopiquement équivalent à un bouquet de sphères, cf. Robinson-Whitehouse [29]. Les posets de partitions opéradiques (voir [33]) peuvent être obtenus via  $C_\ell//\mathbb{A}/N(P)$ , la catégorie des objets strictement sous la corolle et au-dessus de  $N(P)$ .

Présentons maintenant quelques résultats sur l'homologie des espaces dendroïdaux.

Soit  $X$  un espace dendroïdal ouvert et réduit. On note  $DH_*(X)$  l'homologie de  $DC_*(\mathbb{Z}[X])$ . Les résultats précédents sur l'homologie dendroïdale implique les corollaires suivants.

**Corollaire 3.3.8.** *Pour  $X$  un espace dendroïdal ouvert et réduit, et un pushout le long d'un monomorphisme*

$$\begin{array}{ccc} U & \longrightarrow & X \\ \downarrow & & \downarrow \\ V & \longrightarrow & Y \end{array}$$

*on a une suite exacte longue naturelle de Mayer-Vietoris*

$$\dots \rightarrow DH_n(U) \rightarrow DH_n(V) \oplus DH_n(X) \rightarrow DH_n(Y) \rightarrow DH_{n-1}(U) \rightarrow \dots$$

**Corollaire 3.3.9.** *Pour  $X$  un espace dendroïdal ouvert et réduit, on a un isomorphisme naturel*

$$DH_*(X) = H_{*+1}(\mathbb{A}/X, \mathbb{A}_{>0}/X; \mathbb{Z}).$$

*où  $\mathbb{A}/X$  est la catégorie des éléments de  $X$  et  $\mathbb{A}_{>0}$  est la sous-catégorie pleine de  $\mathbb{A}$  des arbres avec au moins une arête interne.*

Faisons un détour rapide par les structures de modèle des catégories en jeu ici. Nous avons mentionné précédemment la structure de modèle dite opéradique sur  $dSets$ . Sur  $dSpaces$ , on peut mettre une structure de modèle dont les objets fibrants sont les espaces dendroïdaux de Segal complets. Ces deux structures de modèles sont équivalentes (au sens de Quillen) l'une à l'autre, ainsi qu'aux opérades simpliciales. Ses structures se restreignent si on considère les préfaisceaux sur  $\Omega_r^c$  (on appellera ces catégories *ordSets* and *ordSpaces* – *open and reduced dendroïdal sets and spaces*). La catégorie  $\Sigma$ -mod est ici munie de sa structure projective usuelle, où les équivalences faibles et les fibrations sont induites par celles des complexes de chaînes, et où les cofibrations sont les monomorphismes à conoyau projectif. On obtient alors le théorème suivant.

**Théorème 3.3.10.** *Le foncteur  $DC : ordSpaces \rightarrow \Sigma$ -mod est un foncteur de Quillen à gauche pour les structures de modèle rappelées ci-dessus.*

On s'intéresse maintenant au deuxième objectif de ce travail : obtenir des constructions bar et cobar, et un résultat de dualité. La construction bar s'obtient en généralisant un peu la construction précédente.

Soit  $M : \mathbb{A}^{op} \rightarrow Ch$  un préfaisceau. On définit un foncteur covariant  $\mathcal{B}_*(M)(-)$  de  $\mathbb{A}$  vers les complexes de chaînes doubles. Pour  $S \in \mathbb{A}$ , nous posons

$$\mathcal{B}_p(M)(S) = \left( \bigoplus_{\alpha: S \rightarrow T, d, e} M(T) \right) / H_S,$$

où

- $\alpha : S \rightarrow T$  est un morphisme dans  $\mathbb{A}$
- $d = (d_0, \dots, d_{q-1})$  est une énumération des arêtes internes de  $S$
- $e = (e_0, \dots, e_{p-1})$  est une énumération des arêtes internes de  $T$  qui ne sont pas dans l'image de  $\alpha$ ,

et  $H_S$  est le groupoïde agissant naturellement sur ces données : c'est le produit semi-direct du groupoïde des extensions  $S \rightarrow T$  de  $S$  et de leur isomorphismes

$$\begin{array}{ccc} S & \xrightarrow{\alpha} & T \\ & \searrow^{\alpha'} & \downarrow^{\theta} \\ & & T' \end{array}$$

par les groupes symétriques  $\Sigma_q = \Sigma_{\{0, \dots, q-1\}}$  et  $\Sigma_p$ .

Nous écrivons les éléments de  $\mathcal{B}_p(M)(S)$  comme des triples

$$(\alpha, d|e, x)$$

où  $\alpha, d, e$  sont comme ci-dessus et  $x$  est dans  $M(T)$ . (Nous nous dispensons maintenant de  $T$  dans l'écriture.)

Lorsque c'est nécessaire, nous précisons les énumérations d'arêtes :

$$(\alpha, (d_0, \dots, d_{q-1})|(e_0, \dots, e_{p-1}), x).$$

Quotienter par l'action de  $H_S$  revient à faire les identifications suivantes dans  $\mathcal{B}_p(M)(S)$  :

$$(\alpha, d|e, \theta^* x') = (\theta\alpha, d|\theta e, x')$$

pour  $x' \in M(T')$  et  $\alpha, d, e, \theta$  comme ci-dessus, et

$$(\alpha, d|e, x) = (-1)^\sigma (-1)^\tau (\alpha, d\sigma|e\tau, x)$$

pour toutes permutations  $\sigma \in \Sigma_q$  et  $\tau \in \Sigma_p$ , et où  $d\sigma$  est simplement la composition  $\{0, \dots, q-1\} \xrightarrow{\sigma} \{0, \dots, q-1\} \xrightarrow{d} E(T)$ , et où  $e\tau$  est définie de même par composition.

**Notation 3.3.11.** Dans la formule à venir pour la différentielle, nous écrivons  $(-1)^d$  au lieu de  $(-1)^q$ , le nombre  $d$  étant la longueur de la suite plutôt que la suite elle-même. Dans la suite de la section, nous continuerons cet abus de notation.

Une première différentielle (appelée extérieure)

$$\partial_{ext} : \mathcal{B}_p(M)(S) \rightarrow \mathcal{B}_{p-1}(M)(S)$$

est définie par

$$\partial_{ext}(\alpha, d|e, x) = \sum_{i=0}^{p-1} (-1)^{d+i} (\partial_{e_i}^*(\alpha), d|(e_0 \dots \hat{e}_i \dots e_{p-1}), \partial_{e_i}^*(x)),$$

où  $\partial_{e_i} : \partial_{e_i}(T) \rightarrow T$  est le morphisme dans  $\mathbb{A}$  contractant l'arête  $e_i$ , la flèche  $\partial_{e_i}^*(\alpha) : S \rightarrow \partial_{e_i}(T)$  est l'unique morphisme dans  $\mathbb{A}$  vérifiant  $\alpha = \partial_{e_i} \circ \partial_{e_i}^*(\alpha)$ , et

$\partial_{e_i}^* : M(T) \rightarrow M(\partial_{e_i}(T))$  est donné par la structure de préfaisceau sur  $M$ . Cette flèche  $\partial_{ext}$  est bien définie et est de carré nul.

La seconde différentielle  $\partial_{int}$  est induite par  $M$ , avec un signe de Koszul. Plus précisément, pour  $(\alpha, d|e, x)$  dans  $\mathcal{B}_p(M)(S)$  et  $x \in M_n(S)$ , on a

$$\partial_{int}(\alpha, d|e, x) = (-1)^{d+e}(\alpha, d|e, \partial_M x.)$$

Ces deux différentielles anti-commutent.

**Notation 3.3.12.** On appelle  $\mathcal{B}_{p,n}(M)(S)$  le complexe double, ayant pour différentielles  $\partial_{ext}$  et  $\partial_{int}$ . Nous considérerons plus tard un complexe décalé.

*Remarque 3.3.13.* On peut voir  $\mathcal{B}$  comme une généralisation de  $DC$  construit précédemment:

$$DC_*(M) = \prod_{\ell \geq 2} \mathcal{B}_{*+1}(M)(C_\ell).$$

Pour montrer de façon plus claire le côté fonctoriel de cette construction bar, commençons par en donner une description en termes d'invariants. Dans la suite du travail, nous jonglerons entre les deux descriptions, pour faciliter l'expression des résultats et des preuves.

Faisons quelques rappels sur les (co)invariants dans notre contexte. Pour  $G$  un groupoïde agissant sur une famille  $A = \{A_x; x \in Ob(G)\}$  dans  $Ch$ , on a la flèche suivante des invariants vers les coinvariants :

$$\left( \bigoplus_{x \in G} A_x \right)_{coinv} \xrightarrow{\rho} \left( \prod_{x \in G} a_x \right)^{inv}$$

donnée, pour  $x \in G$  et  $a \in A_x$ , par  $\rho([x, a])_y = 0$  s'il n'y a pas de flèche de  $x$  vers  $y$  dans  $G$  et par  $g \cdot a$  pour  $g$  un morphisme de  $x$  vers  $y$ .

Cette flèche est clairement un isomorphisme en caractéristique 0, son inverse

$$\int_{x \in G} (-) : \left( \prod_{x \in G} a_x \right)^{inv} \rightarrow \left( \bigoplus_{x \in G} A_x \right)_{coinv}$$

étant donnée par la formule

$$\int_{x \in G} \omega = \sum_C \left( \frac{1}{|C|} \sum_{x \in C} [x, \omega(x)] \right),$$

où  $C$  décrit les composantes connexes de  $G$ . Dans notre contexte, les groupoïdes  $H_S$  ne possédant au plus qu'une flèche entre deux éléments, cette formule pour l'inverse est en fait encore valable. On renvoie à l'appendice de l'article [16] pour les détails.

Nous pouvons maintenant décrire le complexe bar en termes d'invariants :

$$\bar{\mathcal{B}}_p(M)(S) = \left( \prod_{S \rightarrow T, d|e} M(T) \right)^{inv}$$

Pour un morphisme  $\gamma : S \rightarrow S'$  dans  $\mathbb{A}$ , le morphisme induit  $\bar{\gamma}_* : \bar{\mathcal{B}}_p(M)(S) \rightarrow \bar{\mathcal{B}}_{p-c}(M)(S')$  est donné par

$$\bar{\gamma}_*(\omega)_{\alpha, d|e} = (-1)^\tau \omega_{\alpha \gamma, d'|d''e}$$

où  $\tau$  est une permutation agissant sur l'énumération  $d$  de telle sorte que  $\tau d = (d', d'')$  où  $d'$  est une énumération des arêtes de  $S$  (qui peuvent être vues comme des arêtes de  $S'$  via  $\gamma$ ) et  $d''$  les arêtes de  $S'$  "contractées par  $\gamma$ ". Il préserve le degré total

$p + q$  de  $\bar{\mathcal{B}}_p(M)(S)$  (où  $q$  est le nombre d'arêtes internes de  $S$ ). Ceci montre que  $\mathcal{B}_*(M)$  est un foncteur de  $\mathbb{A}$  vers les complexes de chaînes doubles.

On dispose de plus de formules explicites pour les deux différentielles avec les deux points de vue.

Faisons maintenant un décalage de degré sur ce complexe bar, de telle sorte que les  $\infty$ -opérades soient envoyées sur des  $\infty$ -coopérades.

**Notation 3.3.14.** Soit  $M : \mathbb{A}^{op} \rightarrow Ch$  et  $S$  un arbre. On note  $\mathbb{B}(M)(S)$  le complexe total

$$\mathbb{B}_m(M)(S) = \bigoplus_{m=p+q+n} \mathcal{B}_{p,n}(sM)(S)$$

où  $q$  est le nombre d'arêtes internes de  $S$  et où  $sM$  est la suspension de  $M$ , avec la convention  $sx \in (sM)_n$  pour  $x \in M_{n-1}$ . Pour un morphisme  $\gamma : S \rightarrow S'$ , le morphisme induit  $\gamma_* : \mathbb{B}(M)(S) \rightarrow \mathbb{B}(M)(S')$  préserve le degré total.

**Proposition 3.3.15.** Soit  $M : \mathbb{A}^{op} \rightarrow Ch$  une  $\infty$ -opérade. Alors le foncteur  $\mathbb{B}(M) : \mathbb{A} \rightarrow Ch$  est une  $\infty$ -coopérade.

La preuve se base sur deux lemmes (permettant de comprendre les liens entre extensions et greffes d'arbres), et sur une description explicite du coproduit de  $\mathbb{B}(M)$ .

*Idée de preuve.* On veut définir un coproduit

$$\Delta : \mathbb{B}(M)(S \circ_a R) \rightarrow \mathbb{B}(M)(S) \otimes \mathbb{B}(M)(R),$$

à partir de flèches

$$\mathcal{B}_{p,n}(sM)(S \circ_a R) \rightarrow \bigoplus_{p_1+p_2=p, n_1+n_2=n+1} \mathcal{B}_{p_1,n_1}(sM)(S) \otimes \mathcal{B}_{p_2,n_2}(sM)(R).$$

L'idée est de composer la structure opéradique de  $M$  (en la décalant) et de découper l'arbre  $S \circ_a R$  en  $S$  et  $R$ . Fixons quelques notations pour une formule précise.

Un élément de  $\mathcal{B}_{p,n}(sM)(S \circ_a R)$  peut être représenté par

$$(S \circ_a R \xrightarrow{\alpha} T, d|e, sx)$$

où  $\alpha$  est un morphisme de codimension  $p$ , où  $d$  est une énumération des arêtes internes de  $S \circ_a R$  où  $e = (e_0, \dots, e_{p-1})$  celles de  $T$  qui ne sont pas dans l'image de  $\alpha$ , et  $x \in M_{n-1}(T)$ . De plus, on peut supposer que  $e = (e_S, e_R)$ , c'est-à-dire que dans l'énumération  $e$ , les arêtes venant de  $T_S$  sont avant celles venant de  $T_R$  (un lemme nous permet de voir  $T_S$  et  $T_R$  comme des sous-arbres de  $T$ ).

Le coproduit est alors défini par

$$\Delta(\alpha, d|e, sx) = \sum \pm(\alpha_S, d_S|e_S, s\theta_{(1)}(x)) \otimes (\alpha_R, d_R|e_R, s\theta_{(2)}(x))$$

où  $\pm$  est un signe de Koszul, et où (avec la notation de Sweedler)

$$\theta(x) = \sum \theta_{(1)}(x) \otimes \theta_{(2)}(x) \in M_{n_1-1}(S) \otimes M_{n_2-1}(R)$$

est donné par la structure opéradique de  $M$ , avec des degrés  $n_1$  et  $n_2$  vérifiant  $n-1 = (n_1-1) + (n_2-1)$ . Ce signe de Koszul est  $1 + d + e + e_S d_R + (e_R + d_R)n_1 + n_1 - 1$ .

Il reste à vérifier que  $\Delta$  vérifie bien toutes les conditions requises (bien défini, naturalité, coassociativité, compatibilité avec les différentielles, quasi-isomorphisme).  $\square$

La construction cobar se définit de façon très similaire, plus ou moins dualement. Nous définissons pour  $Y : \mathbb{A} \rightarrow Ch$  un foncteur contravariant  $\mathcal{B}^\vee(Y) : \mathbb{A}^{op} \rightarrow Ch$ , par invariants, puis  $\bar{\mathcal{B}}^\vee(Y)$  par coinvariants, chacun point de vue ayant ses avantages dans les descriptions explicites. Nous appelons alors  $\mathbb{B}^\vee(Y)$  le foncteur obtenu en prenant le complexe total, après avoir désuspendu  $Y$ .

**Proposition 3.3.16.** *Si  $Y : \mathbb{A} \rightarrow Ch$  est une  $\infty$ -coopérate linéaire, alors  $\mathbb{B}^\vee(Y) : \mathbb{A}^{op} \rightarrow Ch$  est une  $\infty$ -opérate linéaire.*

Ce résultat s'obtient de la même façon que le résultat dual précédemment mentionné : on définit explicitement la structure opéradique. Il y a une petite différence cependant. Les signes que l'on définit ne semblent pas être des signes de Koszul (bien qu'y ressemblant), mais conviennent aussi bien pour ce théorème que pour la suite.

*Idée de la preuve.* La structure d'opérate  $\Delta$  sur  $\mathbb{B}^\vee(Y)$  est induite par la structure (décalée) de coopérate sur  $Y$  et la séparation de  $S \circ_a R$  en  $S$  et  $R$  : pour un élément  $(\alpha, ad_S d_R | e_S e_R, s^{-1}y)$  dans  $\bar{\mathcal{B}}^\vee(s^{-1}Y)(S \circ_a R)$ ,

$$\Delta(\alpha, ad_S d_R | e_S e_R, s^{-1}y) = \pm tw(\alpha_S, d_S | e_S, \alpha_R, d_R | e_R, \hat{\theta}(s^{-1}y))$$

où  $\hat{\theta}$  est l'application de degré  $-1$  donnée par la composition  $(s^{-1} \otimes s^{-1})\theta_S$ , et où  $tw$  est l'application déplaçant la première composante de  $\hat{\theta}(s^{-1}y)$  au bon endroit et coupant le produit tensoriel. Le signe  $\pm$  est donné par

$$(-1)^{(d_S + e_S)(d_R + e_R) + d_{Res}}.$$

□

Les constructions bar et cobar ayant maintenant été généralisées, il reste à montrer qu'elles sont bien adjointes l'une de l'autre. Ceci va se faire au moyen de morphismes tordants (dont on peut retrouver les cas usuels dans la référence [22]). Et nous énoncerons finalement un théorème précis de dualité.

Nous procédons en plusieurs étapes. D'abord, nous montrons des bijections (sans tenir compte des différentielles) entre les flèches

$$\varphi : \mathbb{B}^\vee(Y) \rightarrow M$$

dans la catégorie des foncteurs de  $\mathbb{A}^{op}$  vers  $Ch$ , celles

$$\psi : Y \rightarrow \bar{\mathbb{B}}(M)$$

dans la catégorie des foncteurs de  $\mathbb{A}$  vers  $Ch$ , et les morphismes tordants, vus comme des applications

$$\hat{\tau} : Y(S) \rightarrow \left( \prod_b M(S) \right)^{inv}$$

ou de façon équivalente comme

$$\tau : \left( \bigoplus_b Y(S) \right)_{coinv} \rightarrow M(S).$$

(ici  $b$  est une énumération des arêtes internes de  $S$ , avec une action par la signature comme précédemment). L'argument principal pour cela est la naturalité.

Donnons un exemple de formule pour mieux visualiser cette bijection. Pour un  $\varphi$  donné, on obtient

$$\tau_S : \left( \bigoplus_b Y(S) \right)_{coinv} \rightarrow M(S)$$

par  $\tau_S(b, y) = \varphi_S(id_S, b | -, s^{-1}y)$ . Réciproquement, la flèche  $\varphi$  peut être obtenue par la formule  $\varphi_R(\beta, b | d, s^{-1}y) = \beta^* \tau_S(bd, y)$ .

Ensuite nous intégrons les différentielles, et ajoutons une condition pour les morphismes tordants.

La compatibilité de  $\varphi$  avec les différentielles est la commutation du diagramme suivant

$$\begin{array}{ccc} \left( \bigoplus_{\beta: R \rightarrow S, b|d} s^{-1}Y(S) \right)_{\text{coinv}} & \xrightarrow{\varphi_R} & M(R) \\ \downarrow \bar{\partial}_{ext} + \bar{\partial}_{int} & & \downarrow \partial_M \\ \left( \bigoplus_{\beta: R \rightarrow S, b|d} s^{-1}Y(S) \right)_{\text{coinv}} & \xrightarrow{\varphi_R} & M(R). \end{array}$$

En le considérant pour  $\beta = id$  (sans perte de généralité, par naturalité), on obtient en termes de  $\tau$  la condition suivante :

$$\int_{d: R \rightarrow R'} d^* \tau_{R'}(bd, d_*y) = \partial_M \tau_R(b, y) + (-1)^b \tau_R(b; \partial_Y y),$$

où  $d$  est à la fois le morphisme d'inclusion  $R \hookrightarrow R'$  et l'arête ajoutée pour obtenir  $R'$  à partir de  $R$ . Cette équation correspond à une équation de Maurer-Cartan.

En étudiant de même la compatibilité de  $\psi$  avec les différentielles, on trouve la même condition. Ceci donne finalement la proposition suivante, permettant d'obtenir l'adjonction cherchée entre bar et cobar :

**Proposition 3.3.17.** *Il y a des bijections*

$$\{\varphi : \mathbb{B}^\vee(Y) \rightarrow M\} \longleftrightarrow \{\psi : Y \rightarrow \mathbb{B}(M)\} \longleftrightarrow \left\{ \hat{\tau} : Y \rightarrow \left( \prod M \right)^{inv} \right\}$$

où les  $\hat{\tau}$  sont les morphismes tordants vérifiant l'équation de Maurer-Cartan ci-dessus.

On s'intéresse maintenant aux unité et counité de l'adjonction,

$$\eta : Y \rightarrow \mathbb{B}(\mathbb{B}^\vee(Y)) \quad \text{et} \quad \varepsilon : \mathbb{B}^\vee(\mathbb{B}(M)) \rightarrow M,$$

pour promouvoir celle-ci en une adjonction respectant les structures de (co)opérade.

Nous avons des formules explicites (aussi bien en termes d'invariants que de coinvariants) pour la (co)unité, qui permettent de montrer par un calcul direct que la counité  $\varepsilon$  (resp. l'unité  $\eta$ ) est une application d' $\infty$ -opérades (resp. de  $\infty$ -coopérades). Combinée au fait que la construction bar envoie les morphismes de  $\infty$ -opérades sur des morphismes de  $\infty$ -coopérades (et la cobar vérifie la propriété duale), on obtient le théorème d'adjonction.

**Proposition 3.3.18.** *Les foncteurs  $\mathbb{B}$  and  $\mathbb{B}^\vee$  réalisent une adjonction entre les  $\infty$ -opérades et les  $\infty$ -coopérades.*

Finalement, nous concluons ce travail avec un résultat de dualité, qui s'obtient via un argument spectral et la description explicite des (co)unités.

**Théorème 3.3.19.** *Pour tous foncteurs  $M : \mathbb{A}^{op} \rightarrow Ch$  et  $Y : \mathbb{A}^{op} \rightarrow Ch$ , les unité  $\eta : Y \rightarrow \mathbb{B}\mathbb{B}^\vee(Y)$  et counité  $\varepsilon : \mathbb{B}^\vee\mathbb{B}(M) \rightarrow M$  sont des quasi-isomorphismes.*

Notons que ce résultat ne s'applique pas qu'aux  $\infty$ -(co)opérades mais à des préfaisceaux en général. Ceci est à mettre en parallèle de la dualité de Koszul d'une catégorie d'arbres, comme étudiée par Livernet dans [20].

## REFERENCES

- [1] David J. Anick. On the homology of associative algebras. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 296(2):641–659, 1986.
- [2] J. Bellier-Millès, B. Delcroix-Oger, and E. Hoffbeck. Operads with compatible CL-shellable partition posets admit a Poincaré-Birkhoff-Witt basis. *accepté dans Trans. Amer. Math. Soc.*, 2019.
- [3] R. Berger. Koszulity for nonquadratic algebras. *J. Algebra*, 239(2):705–734, 2001.
- [4] G. Bergman. The diamond lemma for ring theory. *Adv. in Math.*, 29(2):178–218, 1978.
- [5] A. Burroni. Higher-dimensional word problems with applications to equational logic. *Theoret. Comput. Sci.*, 115(1):43–62, jul 1993.
- [6] K. Cieliebak, K. Fukaya, and J. Latschev. Homological algebra related to surfaces with boundary. *arXiv preprint arXiv:1508.02741*, 2015.
- [7] D.-C. Cisinski and I. Moerdijk. Dendroidal sets and simplicial operads. *J. Topol.*, 6(3):705–756, 2013.
- [8] V. Dotsenko and A. Khoroshkin. Gröbner bases for operads. *Duke Math. J.*, 153, 2010.
- [9] S. Gaussent, Y. Guiraud, and P. Malbos. Coherent presentations of Artin monoids. *Compos. Math.*, 151:957–998, 2015.
- [10] Y. Guiraud, E. Hoffbeck, and P. Malbos. Convergent presentations and polygraphic resolutions of associative algebras. *Math. Z.*, 293(1-2):113–179, 2019.
- [11] Y. Guiraud and P. Malbos. Higher-dimensional normalisation strategies for acyclicity. *Adv. Math.*, 231(3-4):2294–2351, 2012.
- [12] G. Heuts, V. Hinich, and I. Moerdijk. On the equivalence between Lurie’s model and the dendroidal model for infinity-operads. *Adv. Math.*, 302:869–1043, 2016.
- [13] G. Heuts and I. Moerdijk. *Trees in algebra and topology*. 2021.
- [14] E. Hoffbeck, J. Leray, and B. Vallette. Properadic homotopical calculus. *Int. Math. Res. Not.*, 2021(5):3866–3926, 2021.
- [15] E. Hoffbeck and I. Moerdijk. Shuffles of trees. *Eur. J. Comb.*, 71:55–72, 2018.
- [16] E. Hoffbeck and I. Moerdijk. Homology of infinity-operads. *Preprint arXiv:2105.11943*, 2021.
- [17] E. Hoffbeck and C. Vespa. Leibniz homology of Lie algebras as functor homology. *J. Pure Appl. Algebra*, 219(9):3721–3742, 2015.
- [18] Eric Hoffbeck. A Poincaré-Birkhoff-Witt criterion for Koszul operads. *Manuscripta Math.*, 131(1-2):87–110, 2010.
- [19] J. Leray. Protoperads I: Combinatorics and definitions. *arXiv preprint arXiv:1901.05653*, 2019.
- [20] M. Livernet. Koszul duality of the category of trees and bar constructions for operads. pages 107–138, 2012.
- [21] M. Livernet and B. Richter. An interpretation of  $E_n$ -homology as functor homology. *Math. Z.*, 269(1-2):193–219, 2011.
- [22] J.-L. Loday and B. Vallette. *Algebraic operads*, volume 346 of *Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften*. Springer, Heidelberg, 2012.
- [23] S. Merkulov and B. Vallette. Deformation theory of representations of prop(erad)s. I. *J. Reine Angew. Math.*, 634:51–106, 2009.
- [24] I. Moerdijk and I. Weiss. Dendroidal sets. *Algebr. Geom. Topol.*, 7:1441–1470, 2007.
- [25] I. Moerdijk and I. Weiss. On inner Kan complexes in the category of dendroidal sets. *Adv. Math.*, 221(2):343–389, 2009.
- [26] T. Mora. An introduction to commutative and noncommutative Gröbner bases. *Theoret. Comput. Sci.*, 134(1):131–173, 1994. Second International Colloquium on Words, Languages and Combinatorics (Kyoto, 1992).
- [27] T. Pirashvili and B. Richter. Hochschild and cyclic homology via functor homology. *K-Theory*, 25(1):39–49, 2002.
- [28] S. Priddy. Koszul resolutions. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 152:39–60, 1970.
- [29] A. Robinson and S. Whitehouse. Operads and  $\Gamma$ -homology of commutative rings. *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.*, 132(2):197–234, 2002.
- [30] C. Squier. Word problems and a homological finiteness condition for monoids. *J. Pure Appl. Algebra*, 49(1-2):201–217, 1987.
- [31] R. Street. Limits indexed by category-valued 2-functors. *J. Pure Appl. Algebra*, 8(2):149–181, 1976.
- [32] V. Ufnarovskij. Introduction to noncommutative Gröbner bases theory. In *Gröbner bases and applications (Linz, 1998)*, volume 251 of *London Math. Soc. Lecture Note Ser.*, pages 259–280. Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1998.
- [33] B. Vallette. Homology of generalized partition posets. *J. Pure Appl. Algebra*, 208(2):699–725, 2007.

- [34] B. Vallette. A Koszul duality for props. *Trans. of Amer. Math. Soc.*, 359:4865–4993, 2007.
- [35] M. Wachs. Poset topology: tools and applications. In *Geometric combinatorics*, volume 13 of *IAS/Park City Math. Ser.*, pages 497–615. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2007.

UNIVERSITÉ SORBONNE PARIS NORD, LAGA, CNRS, UMR 7539, 99 AVENUE JEAN-BAPTISTE  
CLÉMENT, F-93430, VILLETANEUSE, FRANCE  
*Email address:* `hoffbeck@math.univ-paris13.fr`