

Algèbre linéaire

Caroline Japhet

Version simplifiée du 19 novembre 2020

Table des matières

1	Vecteurs	1
2	Matrices	2
2.1	Généralités	2
2.2	Matrices carrées	3
2.3	Matrices particulières	6
2.4	Lien entre le déterminant / la trace, et les valeurs propres d'une matrice	6
3	Normes vectorielles et normes matricielles	7
4	Suites de vecteurs et de matrices	8
5	Complément : réduction des matrices	8

Références :

- [1] F. Cuvelier, Analyse numérique élémentaire, Notes de cours Ingénieurs MACS 1ère année, 2020
<https://www.math.univ-paris13.fr/~cuvelier/>
 - [2] A. Quarteroni, R. Sacco, and F. Saleri, Méthodes numériques, Springer, 2007
 - [3] P.G. Ciarlet, Introduction à l'analyse numérique matricielle et à l'optimisation, Dunod
 - [4] P. Lascaux & R. Théodor, Analyse numérique matricielle appliquée à l'art de l'ingénieur, Masson
-

Soit E un **espace vectoriel** de dimension finie n , sur le corps $\mathbb{R}$ des nombres réels, ou sur le corps $\mathbb{C}$ des nombres complexes. Notons plus généralement $\mathbb{K}$ le corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1 Vecteurs

Une **base** de E est un ensemble $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n\}$ de n **vecteurs linéairement indépendants**. Le vecteur $\mathbf{v} = \sum_{i=1}^n v_i \mathbf{e}_i$ sera représenté par le **vecteur colonne**

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}.$$

On désigne par v_i ou $\mathbf{v}(i)$ la i -ème composante du vecteur $\mathbf{v}$, et par $\mathbf{v}^t$ et $\mathbf{v}^*$ les **vecteurs lignes** suivants

$$\mathbf{v}^t = (v_1 \quad v_2 \quad \cdots \quad v_n), \quad \mathbf{v}^* = (\overline{v_1} \quad \overline{v_2} \quad \cdots \quad \overline{v_n})$$

où $\overline{\alpha}$ est le nombre **complexe conjugué** du nombre α .

Définition 1.1 — Le vecteur ligne $\mathbf{v}^t$ est le **vecteur transposé** du vecteur colonne $\mathbf{v}$.

— Le vecteur ligne $\mathbf{v}^*$ est le **vecteur adjoint** du vecteur colonne $\mathbf{v}$.

Définition 1.2 L'application $\langle \bullet, \bullet \rangle : E \times E \rightarrow \mathbb{K}$ définie par

$$\begin{aligned}\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle &= \mathbf{u}^t \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v}^t \cdot \mathbf{u} = \sum_{i=1}^n u_i v_i, \quad \text{si } \mathbb{K} = \mathbb{R} \\ \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle &= \mathbf{u}^* \cdot \mathbf{v} = \overline{\mathbf{v}^* \cdot \mathbf{u}} = \overline{\langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle} = \sum_{i=1}^n \overline{u_i} v_i, \quad \text{si } \mathbb{K} = \mathbb{C}\end{aligned}$$

est appelée **produit scalaire** euclidien si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, hermitien si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Pour rappeler la dimension de l'espace, on écrit

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle_n.$$

Dans la suite de cette section, on considère $E = \mathbb{R}^n$ muni du produit scalaire euclidien, ou $E = \mathbb{C}^n$ muni du produit scalaire hermitien.

Définition 1.3 $\diamond$ Deux vecteurs $\mathbf{u} \in E$ et $\mathbf{v} \in E$ sont **orthogonaux** si $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = 0$.

$\diamond$ Un vecteur $\mathbf{v} \in E$ est **orthogonal à une partie** U de E si $\forall \mathbf{u} \in U, \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = 0$. On note $\mathbf{v} \perp U$.

$\diamond$ Un ensemble de vecteurs $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k\}$ de l'espace E est dit **orthonormal** si

$$\langle \mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j \rangle = \delta_{ij}, \quad \forall (i, j) \in \llbracket 1, k \rrbracket^2$$

$$\text{où } \delta_{ij} \text{ est le } \mathbf{symbole de Kronecker} : \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j, \\ 0 & \text{si } i \neq j. \end{cases}$$

Définition 1.4 Le vecteur nul est représenté par la lettre $\mathbf{0}_n$, ou $\mathbf{0}$ lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté.

Définition 1.5 Soit $\mathbf{u} \in E$ non nul. On définit l'**opérateur de projection** sur $\mathbf{u}$ par

$$\text{proj}_{\mathbf{u}}(\mathbf{v}) = \frac{\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle}{\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle} \mathbf{u}, \quad \forall \mathbf{v} \in E.$$

Propriété 1.1 (Procédé de Gram-Schmidt) Soit $\{\mathbf{v}_i\}_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket}$ une base de E . On construit successivement les vecteurs $\mathbf{u}_i$

$$\mathbf{u}_i = \mathbf{v}_i - \sum_{k=1}^{i-1} \text{proj}_{\mathbf{u}_k}(\mathbf{v}_i) = \mathbf{v}_i - \sum_{k=1}^{i-1} \frac{\langle \mathbf{u}_k, \mathbf{v}_i \rangle}{\langle \mathbf{u}_k, \mathbf{u}_k \rangle} \mathbf{u}_k, \quad \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket.$$

Ils forment une **base orthogonale** de E .

En posant $\mathbf{z}_i = \frac{\mathbf{u}_i}{\sqrt{\langle \mathbf{u}_i, \mathbf{u}_i \rangle}}$, $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on obtient une **base orthonormale** $\{\mathbf{z}_i\}_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket}$ de E .

2 Matrices

2.1 Généralités

Soit $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Une matrice à m lignes et n colonnes est appelée **matrice de type** (m, n) , et on note $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ l'espace vectoriel sur le corps $\mathbb{K}$ formé par les matrices de type (m, n) à éléments dans $\mathbb{K}$.

Une matrice $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ d'éléments $a_{i,j} \in \mathbb{K}$ est notée

$$\mathbb{A} = (a_{i,j})_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n},$$

le premier indice i correspond aux lignes et le second j aux colonnes. On désigne aussi par $(\mathbb{A})_{i,j}$ ou $\mathbb{A}(i, j)$ l'élément de la $i^{\text{ème}}$ ligne et de la $j^{\text{ème}}$ colonne.

Définition 2.1 (voir TD)

$\diamond$ Soit une matrice $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$, on note $\mathbb{A}^t \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R})$ la **matrice transposée** de la matrice $\mathbb{A}$, définie de façon unique par $(\mathbb{A}^t)_{i,j} = a_{j,i}$, $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$, ce qui équivaut à

$$\langle \mathbb{A}\mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle_m = \langle \mathbf{u}, \mathbb{A}^t \mathbf{v} \rangle_n, \quad \forall \mathbf{u} \in \mathbb{R}^m, \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n.$$

◇ Soit une matrice $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$, on note $\mathbb{A}^* \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{C})$ la **matrice adjointe** de la matrice $\mathbb{A}$, définie de façon unique par $(\mathbb{A}^*)_{i,j} = \overline{a_{j,i}}$, $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$, ce qui équivaut à

$$\langle \mathbb{A}\mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle_m = \langle \mathbf{u}, \mathbb{A}^*\mathbf{v} \rangle_n, \quad \forall \mathbf{u} \in \mathbb{C}^n, \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbb{C}^m.$$

Définition 2.2 La matrice nulle de $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ est représentée par $\mathbb{O}_{m,n}$ ou $\mathbb{O}$ lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté. Si $m = n$ on note aussi $\mathbb{O}_n$ cette matrice.

Définition 2.3 Si $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ et $\mathbb{B} \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$, leur **somme** $\mathbb{A} + \mathbb{B} \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ est définie par

$$(\mathbb{A} + \mathbb{B})_{i,j} = a_{i,j} + b_{i,j}, \quad \forall i \in \llbracket 1, m \rrbracket, \quad \forall j \in \llbracket 1, n \rrbracket.$$

Définition 2.4 Si $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$, sa **multiplication par un scalaire** $\alpha \in \mathbb{K}$ est la matrice $\alpha\mathbb{A} \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ définie par

$$(\alpha\mathbb{A})_{i,j} = \alpha a_{i,j}, \quad \forall i \in \llbracket 1, m \rrbracket, \quad \forall j \in \llbracket 1, n \rrbracket.$$

Définition 2.5 Si $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_{m,p}(\mathbb{K})$ et $\mathbb{B} \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$, leur **produit** $\mathbb{A}\mathbb{B} \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ est défini par

$$(\mathbb{A}\mathbb{B})_{i,j} = \sum_{k=1}^p a_{i,k} b_{k,j}, \quad \forall i \in \llbracket 1, m \rrbracket, \quad \forall j \in \llbracket 1, n \rrbracket.$$

Propriété 2.1 On a

$$\begin{aligned} (\mathbb{A}\mathbb{B})^t &= \mathbb{B}^t \mathbb{A}^t, \quad (\mathbb{A} + \mathbb{B})^t = \mathbb{A}^t + \mathbb{B}^t, \quad (\mathbb{A}^t)^t = \mathbb{A}, \quad (\alpha\mathbb{A})^t = \alpha\mathbb{A}^t, \quad \forall \alpha \in \mathbb{R} \quad (\text{si } \mathbb{K} = \mathbb{R}), \\ (\mathbb{A}\mathbb{B})^* &= \mathbb{B}^* \mathbb{A}^*, \quad (\mathbb{A} + \mathbb{B})^* = \mathbb{A}^* + \mathbb{B}^*, \quad (\mathbb{A}^*)^* = \mathbb{A}, \quad (\alpha\mathbb{A})^* = \overline{\alpha}\mathbb{A}^*, \quad \forall \alpha \in \mathbb{C}, \quad (\text{si } \mathbb{K} = \mathbb{C}). \end{aligned}$$

2.2 Matrices carrées

Définition 2.6 Une matrice de type (n, n) est dite **matrice carrée**, ou **matrice d'ordre n** . On note

$$\mathcal{M}_n(\mathbb{K}) = \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{K})$$

l'ensemble des matrices carrées d'ordre n , à éléments dans le corps $\mathbb{K}$.

Définition 2.7 On dit que deux matrices $\mathbb{A}, \mathbb{B} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ **commutent** si $\mathbb{A}\mathbb{B} = \mathbb{B}\mathbb{A}$.

Les matrices considérées jusqu'à la fin de ce chapitre sont dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Définition 2.8 Si $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ alors les éléments $a_{i,i} = (\mathbb{A})_{i,i}$ sont appelés **éléments diagonaux** et les éléments $a_{i,j} = (\mathbb{A})_{i,j}$, $i \neq j$ sont appelés **éléments hors-diagonaux**.

Définition 2.9 On appelle **matrice identité** de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ la matrice dont les éléments diagonaux sont tous égaux à 1 et les éléments hors-diagonaux nuls. On la note $\mathbb{I}$ ou encore $\mathbb{I}_n$ et on a

$$(\mathbb{I})_{i,j} = \delta_{i,j}, \quad \forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2,$$

où $\delta_{i,j}$ est défini dans la Définition 1.3.

Définition 2.10 Une matrice $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est **invertible** s'il existe une **unique** matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, notée $\mathbb{A}^{-1}$ et appelée **matrice inverse** de la matrice $\mathbb{A}$, telle que

$$\mathbb{A}\mathbb{A}^{-1} = \mathbb{A}^{-1}\mathbb{A} = \mathbb{I}$$

Dans le cas contraire, on dit que la matrice $\mathbb{A}$ est **singulière** ou **non invertible**.

Propriété 2.2 Soit $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On a

$$\begin{aligned}(\mathbb{A}^t)^{-1} &= (\mathbb{A}^{-1})^t, \\ (\mathbb{A}^{-1})^{-1} &= \mathbb{A}.\end{aligned}$$

De plus, si $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $\mathbb{B} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ sont inversibles, alors leur produit $\mathbb{A}\mathbb{B}$ est inversible et

$$(\mathbb{A}\mathbb{B})^{-1} = \mathbb{B}^{-1}\mathbb{A}^{-1}.$$

Définition 2.11 Une matrice $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est

- ◊ **symétrique** si $\mathbb{A} = \mathbb{A}^t$,
- ◊ **orthogonale** si $\mathbb{A}\mathbb{A}^t = \mathbb{A}^t\mathbb{A} = \mathbb{I}$. Alors $\mathbb{A}$ est inversible et $\mathbb{A}^{-1} = \mathbb{A}^t$
- ◊ $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est **unitaire** si $\mathbb{A}\mathbb{A}^* = \mathbb{A}^*\mathbb{A} = \mathbb{I}$. Alors $\mathbb{A}$ est inversible et $\mathbb{A}^{-1} = \mathbb{A}^*$.

Définition 2.12 Soit $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice **symétrique**. On dit que $\mathbb{A}$ est **définie positive** si

$$\langle \mathbb{A}\mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle > 0, \quad \forall \mathbf{u} \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}.$$

Exercice 2.1 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Considérons la matrice du problème de l'élastique : $\mathbb{A}_h = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par : $a_{i,i} = 2, \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, a_{i,i+1} = -1, \forall i \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket, a_{i,i-1} = -1, \forall i \in \llbracket 2, n \rrbracket, a_{i,j} = 0, \forall i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket$ avec $|i-j| > 2$, c'est-à-dire

$$\mathbb{A}_h = \frac{1}{h^2} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & -1 & 2 & -1 \\ 0 & \dots & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

1. Montrer que $\mathbb{A}_h$ est symétrique.
2. Montrer, par récurrence sur n (i.e. la taille de $\mathbb{A}_h$), que

$$\langle \mathbb{A}_h \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle = \frac{1}{h^2} \left(u_1^2 + \sum_{i=1}^{n-1} (u_{i+1} - u_i)^2 + u_n^2 \right), \quad \forall \mathbf{u} \in \mathbb{R}^n.$$

3. En déduire que $\mathbb{A}_h$ est symétrique définie positive.

Exercice 2.2 Soit $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique définie positive.

1. Montrer que les éléments diagonaux de $\mathbb{A}$ sont strictement positifs.
2. Montrer que les sous matrices principales de $\mathbb{A}$ (voir la définition 2.24) sont elles aussi symétriques et définies positives.

Définition 2.13 La **trace** d'une matrice $\mathbb{A} = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est définie par

$$\text{tr}(\mathbb{A}) = \sum_{i=1}^n a_{i,i}.$$

Définition 2.14 Soit $\mathcal{T}_n$ le **groupe des permutations** de l'ensemble $\{1, 2, \dots, n\}$. A tout élément $\sigma \in \mathcal{T}_n$, on associe la **matrice de permutation**

$$P_\sigma = (\delta_{i\sigma(j)}).$$

Remarque 2.3 Une matrice de permutation est orthogonale.

Définition 2.15 Le **déterminant** d'une matrice $\mathbb{A} = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est défini par

$$\det(\mathbb{A}) = \sum_{\sigma \in \mathcal{T}_n} \varepsilon_\sigma \prod_{j=1}^n a_{\sigma(j),j}$$

où ε_σ désigne la signature de la permutation σ . Pour calculer le déterminant de $\mathbb{A}$, on utilise la formule suivante (loi de Laplace) : on note $\mathbb{A}_{ij} \in \mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{R})$ la matrice obtenue à partir de $\mathbb{A}$ en supprimant la ligne i et la colonne j . On a alors le développement par rapport à la colonne $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$:

$$\det(\mathbb{A}) = \begin{cases} a_{1,1}, & \text{si } n = 1, \\ \sum_{i=1}^n (-1)^{i+j} a_{i,j} \det(\mathbb{A}_{ij}), & \text{pour } n > 1. \end{cases} \quad (2.1)$$

Notons que l'on a aussi le développement par rapport à la ligne $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$:

$$\det(\mathbb{A}) = \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} a_{i,j} \det(\mathbb{A}_{ij}), \quad \text{pour } n > 1.$$

Le terme $(-1)^{i+j} \det(\mathbb{A}_{ij})$ est appelé le **cofacteur** de $a_{i,j}$.

Propriété 2.4 Soient $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\mathbb{B} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, et $\lambda \in \mathbb{R}$. On a alors les relations suivantes

$$\begin{aligned} \operatorname{tr}(\mathbb{A}\mathbb{B}) &= \operatorname{tr}(\mathbb{B}\mathbb{A}), \\ \operatorname{tr}(\mathbb{A} + \mathbb{B}) &= \operatorname{tr} \mathbb{A} + \operatorname{tr} \mathbb{B}, \\ \det(\mathbb{A}\mathbb{B}) &= \det(\mathbb{A}) \det(\mathbb{B}) = \det(\mathbb{B}\mathbb{A}), \\ \det(\mathbb{A}^t) &= \det(\mathbb{A}), \\ \det(\lambda \mathbb{A}) &= \lambda^n \det(\mathbb{A}), \\ \det(\mathbb{A}^{-1}) &= \frac{1}{\det(\mathbb{A})}, \quad \text{si } \mathbb{A} \text{ est inversible.} \end{aligned}$$

Définition 2.16 Soit $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

- ◇ On note $\operatorname{Ker}(\mathbb{A}) = \{\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n \text{ t.q. } \mathbb{A}\mathbf{v} = \mathbf{0}\}$ le **noyau** de la matrice $\mathbb{A}$.
- ◇ On note $\operatorname{Im}(\mathbb{A}) = \{\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n \text{ t.q. } \exists \mathbf{w} \in \mathbb{R}^n, \mathbf{v} = \mathbb{A}\mathbf{w}\}$ l'**image** de $\mathbb{A}$.

Définition 2.17 Soit $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On dit que $\lambda \in \mathbb{C}$ est **valeur propre** de $\mathbb{A}$ s'il existe $\mathbf{u} \in \mathbb{C}^n$ non nul tel que

$$\mathbb{A}\mathbf{u} = \lambda\mathbf{u}.$$

Le vecteur $\mathbf{u}$ est appelé **vecteur propre** associé à la valeur propre λ .

Le couple $(\lambda, \mathbf{u})$ est appelé **élément propre** de $\mathbb{A}$.

Définition 2.18 Soit $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ une valeur propre de $\mathbb{A}$. Le sous-espace

$$E_\lambda = \{\mathbf{u} \in \mathbb{C}^n : \mathbb{A}\mathbf{u} = \lambda\mathbf{u}\} = \operatorname{Ker}(\mathbb{A} - \lambda\mathbb{I})$$

est appelé **sous-espace propre** associé à la valeur propre λ .

Définition 2.19 Soit $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Le polynôme de degré n défini par

$$\mathcal{P}_\mathbb{A}(\lambda) = \det(\mathbb{A} - \lambda\mathbb{I})$$

est appelé **polynôme caractéristique** de la matrice $\mathbb{A}$.

Propriété 2.5 Les racines complexes du polynôme caractéristique $\mathcal{P}_\mathbb{A}$ sont les valeurs propres de la matrice $\mathbb{A}$:

$$\lambda \in \mathbb{C} \text{ est une valeur propre de } \mathbb{A} \iff \det(\mathbb{A} - \lambda\mathbb{I}) = 0.$$

Propriété 2.6 Soit $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

- ◇ La matrice $\mathbb{A}$ possède n valeurs propres distinctes ou non ($\mathcal{P}_\mathbb{A}$ est de degré n par rapport à λ).
- ◇ Comme $\mathbb{A}$ est à coefficients réels, alors $\mathcal{P}_\mathbb{A}(\lambda)$ est à coefficients réels et les valeurs propres complexes sont donc deux à deux conjuguées.
- ◇ Si $\mathbb{A}$ est symétrique, ses valeurs propres sont réelles.

Définition 2.20 Soit $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On note λ_i , $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, les valeurs propres de $\mathbb{A}$. Le **spectre** de $\mathbb{A}$ est défini par

$$\operatorname{Sp}(\mathbb{A}) = \bigcup_{i=1}^n \{\lambda_i\}$$

Définition 2.21 Le **rayon spectral** d'une matrice $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est le nombre ≥ 0 défini par

$$\rho(\mathbb{A}) = \max_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket} \{|\lambda_i|\},$$

où $|\lambda_i|$ désigne le module de λ_i .

Soient $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On a alors les relations suivantes

$$\begin{aligned}\rho(\mathbb{A}) &= \rho(\mathbb{A}^t), \\ \rho(\alpha \mathbb{A}) &= |\alpha| \rho(\mathbb{A}), \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}, \\ \rho(\mathbb{A}^k) &= (\rho(\mathbb{A}))^k, \quad \forall k \in \mathbb{N}.\end{aligned}$$

Exercice 2.3 Soit $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique.

1. (a) Montrer que $(\mathbb{A}\mathbf{u}, \mathbf{u}) \in \mathbb{R}, \quad \forall \mathbf{u} \in \mathbb{C}^n$.
- (b) Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ une valeur propre de $\mathbb{A}$ et $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^n$ un vecteur propre de $\mathbb{A}$ associé à λ . Dédurre de (a) que $(\mathbb{A}\mathbf{x}, \mathbf{x}) \in \mathbb{R}$, puis que $\lambda \in \mathbb{R}$.
2. On suppose que $\mathbb{A}$ est définie positive. Montrer que les valeurs propres de $\mathbb{A}$ sont strictement positives. En déduire que $\mathbb{A}$ est inversible.

Définition 2.22 On appelle **déterminant extrait d'ordre** q ($q \geq 1$), celui de n'importe quelle matrice d'ordre q obtenue à partir de $\mathbb{A}$ en éliminant $n - q$ lignes et $n - q$ colonnes.

Définition 2.23 Soit $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Le **rang** de $\mathbb{A}$ est l'ordre maximum des déterminants extraits non nuls de $\mathbb{A}$.

On a alors les propriétés suivantes :

$$\begin{aligned}\text{rg}(\mathbb{A}) &= \text{nombre maximum de vecteurs colonnes de } \mathbb{A} \text{ linéairement indépendants,} \\ \text{rg}(\mathbb{A}) &= \text{nombre maximum de vecteurs lignes de } \mathbb{A} \text{ linéairement indépendants,} \\ \text{rg}(\mathbb{A}) + \dim(\text{Ker}(\mathbb{A})) &= n, \\ \text{rg}(\mathbb{A}) &= \text{rg}(\mathbb{A}^t), \\ \det(\mathbb{A}) \neq 0 &\iff \mathbb{A} \text{ inversible} \iff \text{Ker}(\mathbb{A}) = \{\mathbf{0}\} \iff \text{rg}(\mathbb{A}) = n.\end{aligned}$$

2.3 Matrices particulières

Définition 2.24 On appelle **sous-matrice** d'une matrice donnée, la matrice obtenue en supprimant certaines lignes et certaines colonnes. En particulier, la **sous matrice principale** d'ordre k de $\mathbb{A}$ est définie par

$$\Delta_k = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} \end{pmatrix}, \quad 1 \leq k \leq n.$$

Définition 2.25 Une matrice carrée $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est :

- ◇ **diagonale** si $a_{i,j} = 0$ pour $i \neq j$,
- ◇ **triangulaire supérieure** si $a_{i,j} = 0$ pour $i > j$,
- ◇ **triangulaire inférieure** si $a_{i,j} = 0$ pour $i < j$,
- ◇ **triangulaire** si elle est triangulaire supérieure ou triangulaire inférieure.

Exercice 2.4 Soient $\mathbb{A} = (a_{ij})_{(i,j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2}$ une matrice triangulaire supérieure de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1. Quelle est la structure de la matrice $\mathbb{A}^t$?
2. Calculer $\det(\mathbb{A})$ (Indication : faire une récurrence sur la taille de la matrice $\mathbb{A}$).
A quelle(s) condition(s) la matrice $\mathbb{A}$ est-elle inversible ?
3. Déterminer les valeurs propres de $\mathbb{A}$.

2.4 Lien entre le déterminant / la trace, et les valeurs propres d'une matrice

Théorème 2.7 (admis) Soit $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On a alors les relations suivantes

$$\text{tr}(\mathbb{A}) = \sum_{i=1}^n \lambda_i, \quad \det(\mathbb{A}) = \prod_{i=1}^n \lambda_i.$$

Pour la preuve de ce résultat, voir la section 5.

3 Normes vectorielles et normes matricielles

Définition 3.1 Une **norme** sur $V = \mathbb{R}^n$ est une application $\|\bullet\| : V \rightarrow \mathbb{R}^+$ qui vérifie les propriétés suivantes

- ◇ $\|\mathbf{v}\| = 0 \iff \mathbf{v} = \mathbf{0}$,
- ◇ $\|\alpha\mathbf{v}\| = |\alpha| \|\mathbf{v}\|$, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$, $\forall \mathbf{v} \in V$,
- ◇ $\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\| \leq \|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\|$, $\forall (\mathbf{u}, \mathbf{v}) \in V^2$ (inégalité triangulaire).

Une norme sur V est également appelée **norme vectorielle**.

Les normes suivantes sont les plus couramment utilisées sur $\mathbb{R}^n$:

$$\|\mathbf{v}\|_1 = \sum_{i=1}^n |v_i|, \quad \|\mathbf{v}\|_2 = \langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle^{\frac{1}{2}} = \left(\sum_{i=1}^n |v_i|^2 \right)^{1/2}, \quad \|\mathbf{v}\|_\infty = \max_{i \in [1, n]} |v_i|,$$

$$\|\mathbf{v}\|_{\mathbb{A}} = (\mathbb{A}\mathbf{v}, \mathbf{v})^{\frac{1}{2}}, \text{ avec } \mathbb{A} \in \mathcal{M}_n, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n, \text{ et } \mathbb{A} \text{ symétrique définie positive.}$$

Théorème 3.1 Inégalité de Cauchy-Schwarz.

Pour tout $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$, $|\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle| \leq \|\mathbf{x}\|_2 \|\mathbf{y}\|_2$. On a l'égalité si et seulement si $\mathbf{y} = \alpha \mathbf{x}$ pour un $\alpha \in \mathbb{R}$.

Définition 3.2 Deux **normes** $\|\bullet\|$ et $\|\bullet\|'$ sur V , sont **équivalentes** s'il existe des constantes $C > 0$ et $C' > 0$ telles que

$$C \|\mathbf{v}\|' \leq \|\mathbf{v}\| \leq C' \|\mathbf{v}\|' \text{ pour tout } \mathbf{v} \in V.$$

Remarque 3.2 Sur $\mathbb{R}^n$ toutes les normes sont équivalentes.

Définition 3.3 Une **norme matricielle** sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est une application $\|\bullet\| : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^+$ vérifiant

1. $\|\mathbb{A}\| = 0 \iff \mathbb{A} = \mathbb{O}_n$,
2. $\|\alpha\mathbb{A}\| = |\alpha| \|\mathbb{A}\|$, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$, $\forall \mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$,
3. $\|\mathbb{A} + \mathbb{B}\| \leq \|\mathbb{A}\| + \|\mathbb{B}\|$, $\forall (\mathbb{A}, \mathbb{B}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2$ (inégalité triangulaire)
4. $\|\mathbb{A}\mathbb{B}\| \leq \|\mathbb{A}\| \|\mathbb{B}\|$, $\forall (\mathbb{A}, \mathbb{B}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2$

Théorème 3.3 Etant donné une norme vectorielle $\|\bullet\|$ sur $\mathbb{R}^n$, l'application $\|\bullet\|_s : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^+$ définie par

$$\|\mathbb{A}\|_s = \sup_{\substack{\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n \\ \mathbf{v} \neq \mathbf{0}}} \frac{\|\mathbb{A}\mathbf{v}\|}{\|\mathbf{v}\|} = \sup_{\substack{\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n \\ \|\mathbf{v}\| \leq 1}} \|\mathbb{A}\mathbf{v}\| = \sup_{\substack{\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n \\ \|\mathbf{v}\| = 1}} \|\mathbb{A}\mathbf{v}\|,$$

est une norme matricielle, appelée **norme matricielle subordonnée** (à la norme vectorielle donnée).

Par définition de $\|\mathbb{A}\|_s$, on a

$$\|\mathbb{A}\mathbf{v}\| \leq \|\mathbb{A}\|_s \|\mathbf{v}\|, \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n,$$

$$\|\mathbb{I}\|_s = 1.$$

Théorème 3.4 (admis) Soit $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On a

$$\|\mathbb{A}\|_1 \stackrel{\text{déf.}}{=} \sup_{\substack{\mathbf{v} \in \mathbb{C}^n \\ \mathbf{v} \neq \mathbf{0}}} \frac{\|\mathbb{A}\mathbf{v}\|_1}{\|\mathbf{v}\|_1} = \max_{j \in [1, n]} \sum_{i=1}^n |a_{i,j}|$$

$$\|\mathbb{A}\|_2 \stackrel{\text{déf.}}{=} \sup_{\substack{\mathbf{v} \in \mathbb{C}^n \\ \mathbf{v} \neq \mathbf{0}}} \frac{\|\mathbb{A}\mathbf{v}\|_2}{\|\mathbf{v}\|_2} = \sqrt{\rho(\mathbb{A}^t \mathbb{A})} = \sqrt{\rho(\mathbb{A} \mathbb{A}^t)} = \|\mathbb{A}^t\|_2$$

$$\|\mathbb{A}\|_\infty \stackrel{\text{déf.}}{=} \sup_{\substack{\mathbf{v} \in \mathbb{C}^n \\ \mathbf{v} \neq \mathbf{0}}} \frac{\|\mathbb{A}\mathbf{v}\|_\infty}{\|\mathbf{v}\|_\infty} = \max_{i \in [1, n]} \sum_{j=1}^n |a_{i,j}|$$

Remarque 3.5 1. Si une matrice $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est symétrique, alors on a $\|\mathbb{A}\|_2 = \rho(\mathbb{A})$.

2. Si une matrice $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est orthogonale, alors on a $\|\mathbb{A}\|_2 = 1$.

Exercice 3.1 Montrer les théorèmes 3.1 et 3.3, ainsi que la remarque 3.5.

Exercice 3.2 (Norme de Frobenius) On considère l'application $\|\bullet\|_F : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^+$ définie, pour $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ par

$$\|\mathbb{A}\|_F = \left(\sum_{(i,j) \in \llbracket 1,n \rrbracket^2} |a_{ij}|^2 \right)^{1/2} = \sqrt{\text{tr}(\mathbb{A}^* \mathbb{A})}. \quad (3.1)$$

1. Montrer que $\|\bullet\|_F : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^+$ est une norme matricielle.
2. Calculer $\|\mathbb{I}_n\|_F$ où $\mathbb{I}_n$ est la matrice identité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

Théorème 3.6 1. Soit $\mathbb{A}$ une matrice carrée quelconque et $\|\bullet\|_s$ une norme matricielle subordonnée à la norme vectorielle $\|\bullet\|$. Alors

$$\rho(\mathbb{A}) \leq \|\mathbb{A}\|_s. \quad (3.2)$$

2. (admis) Etant donné une matrice $\mathbb{A}$ et un nombre $\varepsilon > 0$, il existe au moins une norme matricielle subordonnée $\|\bullet\|_*$ (dépendant $\mathbb{A}$ et ε), telle que

$$\|\mathbb{A}\|_* \leq \rho(\mathbb{A}) + \varepsilon. \quad (3.3)$$

4 Suites de vecteurs et de matrices

Définition 4.1 (Convergence d'une suite de vecteurs) Soit E un espace vectoriel muni d'une norme $\|\bullet\|$. On dit qu'une suite $\{\mathbf{v}^{(k)}\}_{k \in \mathbb{N}}$ d'éléments de E converge vers un élément $\mathbf{v} \in E$, si

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|\mathbf{v}^{(k)} - \mathbf{v}\| = 0$$

et on écrit

$$\mathbf{v} = \lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{v}^{(k)}.$$

Définition 4.2 (Convergence d'une suite de matrices) On dit qu'une suite de matrices $\{\mathbb{A}^{(k)}\}_{k \in \mathbb{N}}$, avec $\mathbb{A}^{(k)} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, converge vers $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ si :

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|\mathbb{A}^{(k)} - \mathbb{A}\| = 0,$$

et on écrit

$$\mathbb{A} = \lim_{k \rightarrow \infty} \mathbb{A}^{(k)}.$$

Théorème 4.1 Soit $\mathbb{B} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Les conditions suivantes sont équivalentes :

1. $\lim_{k \rightarrow \infty} \mathbb{B}^k = \mathbb{O}_n$,
2. $\lim_{k \rightarrow \infty} \mathbb{B}^k \mathbf{v} = \mathbf{0}$ pour tout vecteur $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$,
3. $\rho(\mathbb{B}) < 1$,
4. $\|\mathbb{B}\|_s < 1$ pour au moins une norme matricielle subordonnée $\|\bullet\|_s$.

Exercice 4.1 Montrer le théorème 4.1.

5 Complément : réduction des matrices

Définition 5.1 On dit que la matrice carrée $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est **diagonalisable sur** $\mathbb{R}$ s'il existe une matrice inversible $\mathbb{P} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que la matrice $\mathbb{D} = \mathbb{P}^{-1} \mathbb{A} \mathbb{P} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ soit diagonale. Notons que dans ce cas

$$\mathbb{A} = \mathbb{P} \mathbb{D} \mathbb{P}^{-1}. \quad (5.1)$$

Propriété 5.1 Dans le cas où $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est diagonalisable, c'est-à-dire de la forme (5.1), alors

- les éléments diagonaux de la matrice $\mathbb{D}$ sont les valeurs propres $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ de la matrice $\mathbb{A}$,
- le j -ème vecteur colonne $\mathbf{p}_j$ de la matrice $\mathbb{P}$ est un vecteur propre de $\mathbb{A}$ associé à la valeur propre λ_j , pour $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$.

En effet, soit $\mathbb{D}$ la matrice diagonale, dont les éléments diagonaux sont $d_{i,i} = \lambda_i$, $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$. On a

$$\mathbb{P}^{-1} \mathbb{A} \mathbb{P} = \mathbb{D} \iff \mathbb{A} \mathbb{P} = \mathbb{D} \mathbb{P} \iff \mathbb{A} \mathbf{p}_j = \lambda_j \mathbf{p}_j, \quad \forall j \in \llbracket 1, n \rrbracket.$$

Une matrice $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est diagonalisable si, et seulement si, il existe une base de $\mathbb{R}^n$ formée de vecteurs propres de $\mathbb{A}$.

On admettra les deux résultats suivants :

Théorème 5.2 (Décomposition de Schur) (*admis*) Soit $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Alors il existe une matrice **unitaire** $\mathbb{U} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que la matrice $\mathbb{T} = \mathbb{U}^{-1}\mathbb{A}\mathbb{U} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ soit **triangulaire supérieure** :

$$\mathbb{T} = \mathbb{U}^* \mathbb{A} \mathbb{U} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & t_{1,2} & \cdots & t_{1,n} \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & t_{n-1,n} \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Les valeurs propres de $\mathbb{A}$ sont les éléments diagonaux de $\mathbb{T}$.

Théorème 5.3 (*admis*) Soit $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice dont **toutes les valeurs propres sont réelles**. Alors il existe une matrice **orthogonale** $\mathbb{Q} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que la matrice $\mathbb{T} = \mathbb{Q}^{-1}\mathbb{A}\mathbb{Q}$ soit **triangulaire supérieure** :

$$\mathbb{T} = \mathbb{Q}^t \mathbb{A} \mathbb{Q} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & t_{1,2} & \cdots & t_{1,n} \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & t_{n-1,n} \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Les valeurs propres de $\mathbb{A}$ sont les éléments diagonaux de $\mathbb{T}$.

Corollaire 5.4 Soit $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice **symétrique**. Alors il existe une matrice **orthogonale** $\mathbb{Q}$ telle que la matrice $\mathbb{D} = \mathbb{Q}^{-1}\mathbb{A}\mathbb{Q}$ soit **diagonale** :

$$\mathbb{D} = \mathbb{Q}^t \mathbb{A} \mathbb{Q} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$$

La matrice $\mathbb{A}$ est donc diagonalisable sur $\mathbb{R}$. Les valeurs propres de $\mathbb{A}$ sont les éléments diagonaux de $\mathbb{D}$, et les vecteurs propres de $\mathbb{A}$ sont les vecteurs colonnes de $\mathbb{Q}$. Ils forment une base orthonormale de $\mathbb{R}^n$.

Preuve. Comme $\mathbb{A}$ est symétrique, d'après l'exercice 2.3, question 1), les valeurs propres de $\mathbb{A}$ sont toutes réelles. Alors, d'après le Théorème 5.3, on a $\mathbb{T} = \mathbb{Q}^t \mathbb{A} \mathbb{Q}$, avec $\mathbb{Q}$ orthogonale et $\mathbb{T}$ triangulaire supérieure, dont les éléments diagonaux sont les valeurs propres de $\mathbb{A}$. La matrice $\mathbb{A}$ étant symétrique, on a aussi $\mathbb{A} = \mathbb{A}^t$, c'est-à-dire

$$\mathbb{T} = \mathbb{Q}^t \mathbb{A} \mathbb{Q} = \mathbb{T} = \mathbb{Q}^t \mathbb{A}^t \mathbb{Q} = \mathbb{T}^t.$$

$\mathbb{T}$ étant triangulaire, l'égalité $\mathbb{T} = \mathbb{T}^t$ implique que $\mathbb{T}$ est diagonale. ■

Corollaire 5.5 Soit $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On a alors les relations suivantes

$$\text{tr}(\mathbb{A}) = \sum_{i=1}^n \lambda_i, \quad \det(\mathbb{A}) = \prod_{i=1}^n \lambda_i.$$

Preuve. Si les toutes valeurs propres de $\mathbb{A}$ sont réelles, le résultat découle du Théorème 5.3 et des propriétés 2.4 :

$$\text{tr}(\mathbb{A}) = \text{tr}(\mathbb{Q} \mathbb{T} \mathbb{Q}^t) = \text{tr}(\mathbb{Q}^t \mathbb{Q} \mathbb{T}) = \text{tr}(\mathbb{T}) = \sum_{i=1}^n \lambda_i \quad (\text{vu en TD pour la dernière égalité}),$$

$$\det(\mathbb{A}) = \det(\mathbb{Q} \mathbb{T} \mathbb{Q}^t) = \det(\mathbb{Q}^t \mathbb{Q} \mathbb{T}) = \det(\mathbb{T}) = \prod_{i=1}^n \lambda_i \quad (\text{vu en TD pour la dernière égalité}).$$

Si $\mathbb{A}$ a des valeurs propres complexes, on utilise le Théorème 5.2. ■