Notes de cours de Méthodes Numériques 2
Interpolation polynomiale

Caroline Japhet

Version du 13 février 2021

Table des matières

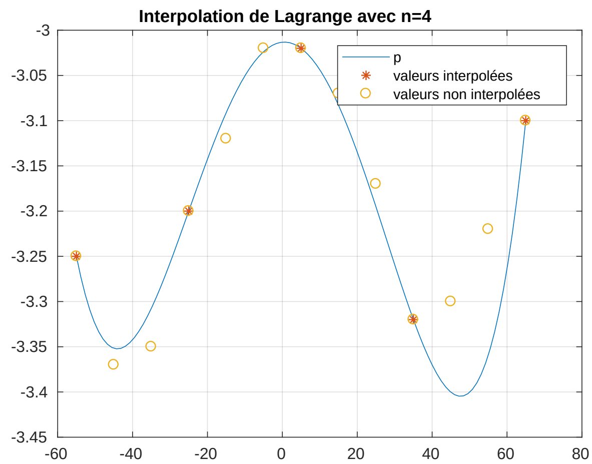
Dans ce chapitre on étudie l'approximation d'une fonction dont on ne connaît les valeurs qu'en certains points. Ceci ce produit par exemple lorsque

- une fonction analytique est difficile à évaluer, intégrer ou différencier sur un ordinateur,
- on dispose d'un nombre fini de données expérimentales (par exemple le relevé de la température d'une réaction chimique à différents instants, ...).

Plus précisément, étant donné des points (x_i, y_i), $i \in [\![0, n]\!]$, on cherche des fonctions "simples" (polynômes, polynômes par morceaux, ...) passant par (x_i, y_i), $i \in [\![0, n]\!]$, c'est-à-dire qu'on cherche une fonction $p = p(x)$ telle que

$$p(x_i) = y_i, \quad \forall i \in [\![0, n]\!].$$

On dit alors que p *interpole* $\{y_i\}_{1 \leqslant i \leqslant n}$ aux *nœuds* $\{x_i\}_{1 \leqslant i \leqslant n}$.



Références :

[1] F. Cuvelier, Analyse numérique élémentaire, Notes de cours Ingénieurs MACS 1ère année, 2020
`https://www.math.univ-paris13.fr/~cuvelier/`
[2] A. Quarteroni, R. Sacco, and F. Saleri, Méthodes numériques, Springer, 2007
[3] A. Quarteroni, F. Saleri, and R. Gervasio, Calcul scientifique, Springer, 2010.

1 Interpolation de Lagrange

1.1 Définition du polynôme d'interpolation

On note $\mathbb{P}_n[X]$ l'espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à n.

Soient $(n+1)$ couples (x_i, y_i), $i \in [\![0, n]\!]$.. On cherche un polynôme $\Pi_n \in \mathbb{P}_n[X]$, s'écrivant sous la forme $\Pi_n(x) = a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0$, tel que

$$\Pi_n(x_i) = y_i, \quad \forall i \in [\![0, n]\!].$$

Définition 1.1 *Le polynôme Π_n est appelé polynôme d'interpolation des valeurs $\{y_i\}_{1 \leqslant i \leqslant n}$ aux nœuds $\{x_i\}_{1 \leqslant i \leqslant n}$. Les points x_i sont appelés nœuds d'interpolation.*

Lorsque $y_i = f(x_i)$, f étant une fonction donnée, le polynôme d'interpolation Π_n est noté $\Pi_n f$.

Définition 1.2 *On appelle polynôme caractéristique de Lagrange, le polynôme ℓ_i, $i \in [\![0, n]\!]$, défini par*

$$\ell_i(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}.$$

Exercice 1.1 *Les polynômes $\{\ell_i\}_{i \in [\![0,n]\!]}$ forment une base de $\mathbb{P}_n[X]$.*

Théorème 1.1 *(Existence et unicité du polynôme d'interpolation de Lagrange)*

Etant donné $(n+1)$ points distincts $x_0, x_1, \ldots, x_n$, et $(n+1)$ valeurs correspondantes $y_0, y_1, \ldots, y_n$, il existe un unique polynôme $\Pi_n \in \mathbb{P}_n[X]$, de degré inférieur ou égal à n, tel que

$$\Pi_n(x_i) = y_i, \quad \forall i \in [\![0, n]\!]. \tag{1.1}$$

Ce polynôme interpole $\{y_i\}_{1 \leqslant i \leqslant n}$ aux nœuds $\{x_i\}_{1 \leqslant i \leqslant n}$, et s'écrit dans la base $\{\ell_i\}_{1 \leqslant i \leqslant n}$ de la façon suivante :

$$\Pi_n(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i \ell_i(x). \tag{1.2}$$

Il est appelé polynôme d'interpolation de Lagrange.

Preuve. Voir les transparents du cours (sur Discord). ∎

Exemple : sur la Figure 1 on représente, à droite, le polynôme d'interpolation de Lagrange Π_2 interpolant les points $y_0 = 11$, $y_1 = 3$ et $y_2 = 5$ aux nœuds $x_0 = -2$, $x_1 = -1$ et $x_2 = 1$, et à gauche les polynômes caractéristiques de Lagrange associés.

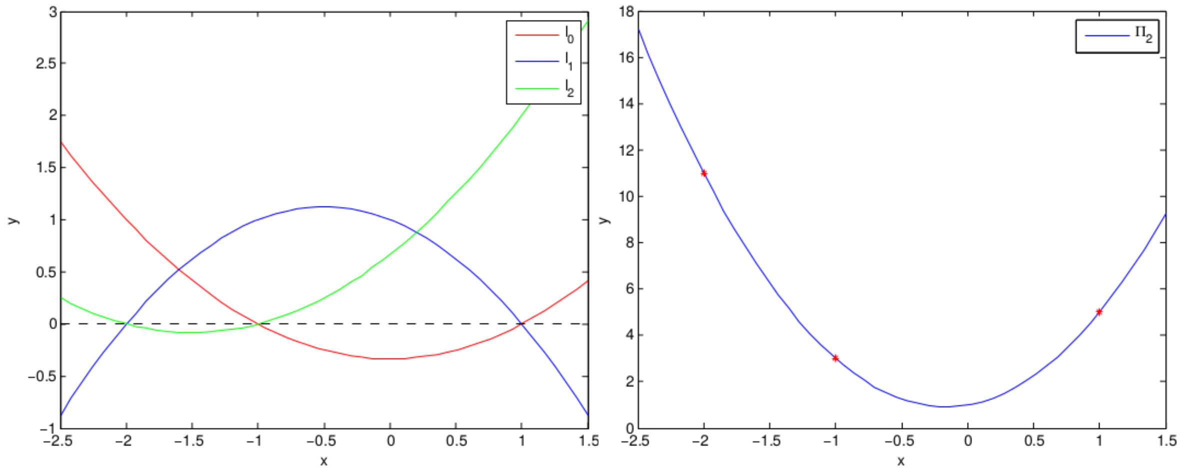


FIGURE 1 – Polynômes caractéristiques de Lagrange, ℓ_0, ℓ_1 et ℓ_2 (à gauche), et polynôme d'interpolation de Lagrange Π_2 (à droite)

En pratique, pour calculer le polynôme Π_n (ou $\Pi_n f$), on utilise une forme alternative à (1.2), la formule de Newton, dont le coût de calcul est moins élevé (voir le complément de cours).

1.2 Erreur d'interpolation

Définition 1.3 *Le polynôme nodal, noté ω_n, est défini par*

$$\omega_n(x) = \prod_{i=0}^{n-1}(x - x_i), \quad \forall x \in \mathbb{R}. \tag{1.3}$$

Théorème 1.2 *Soient $\{x_0, \ldots, x_n\}$ $n+1$ nœuds distincts et x un point appartenant au domaine de définition de f. Si $f \in \mathcal{C}^{n+1}(I_x)$, où I_x est le plus petit intervalle contenant les nœuds $x_0, \ldots, x_n$ et le point x, alors, l'erreur d'interpolation au point x est donnée par : $\exists \xi \in I_x$ tel que*

$$E_n(x) = f(x) - \Pi_n f(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\omega_{n+1}(x). \tag{1.4}$$

Preuve. Voir les transparents du cours (sur Discord). ■

Exercice 1.2 *Avec quelle précision peut-on calculer $\sqrt{115}$ à l'aide du polynôme interpolant la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ aux nœuds $x_0 = 100, x_1 = 121$ et $x_2 = 144$?*

1.3 Les défauts de l'interpolation polynomiale

Phénomène de Runge

Supposons qu'on approche la fonction $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ pour $x \in [-5, 5]$ par le polynôme d'interpolation de Lagrange avec des nœuds équirépartis. On représente sur la Figure 2 (à gauche) la fonction f, et $\Pi_n f$, pour $n = 3, 4, 5, 10$. On observe qu'il existe des points x dans $[-5, 5]$ tels que $\lim_{n\to\infty} |f(x) - \Pi_n f(x)| \neq 0$.

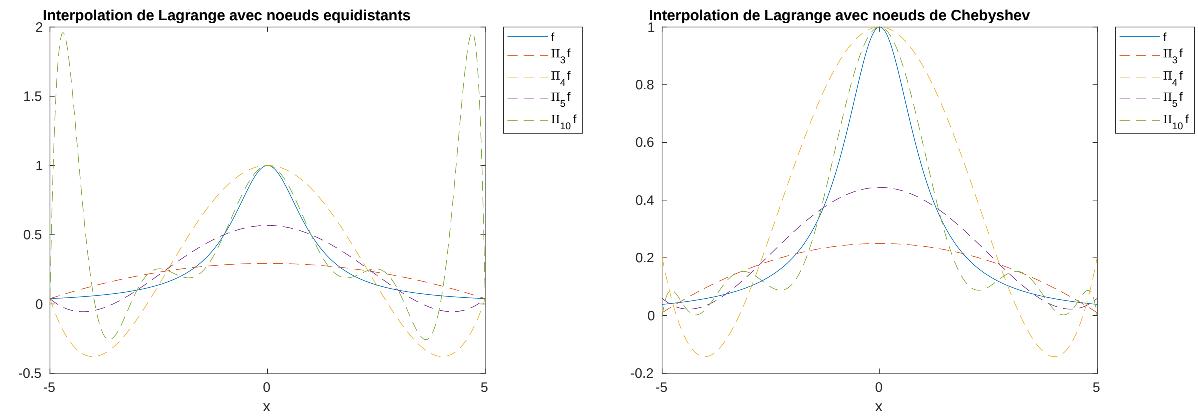


FIGURE 2 – Exemple de Runge avec les nœuds équirépartis (à gauche) et avec les nœuds de Chebyshev (à droite)

En particulier, l'interpolation de Lagrange diverge au voisinage des extrémités de l'intervalle d'interpolation. Cela est dû au fait que les nœuds sont équirépartis. Il s'agit d'un exemple où f est continue sur $[-5, 5]$ et $\Pi_n f$ ne converge pas uniformément vers f.

D'après (1.4), pour une fonction f donnée, pour un degré d'interpolation fixé, c'est ω_{n+1} qui dépend des $\{x_i\}_{1\leqslant i\leqslant n}$, et l'erreur est d'autant plus faible que ω_{n+1} est petit. La question naturelle qui se pose alors est comment choisir les nœuds $x_0, \ldots, x_n$ pour que $\|\omega_{n+1}\|_\infty := \sup_{x\in[a,b]} |\omega_{n+1}(x)|$ soit le plus petit possible ?

Théorème 1.3 *(Nœuds de Chebyshev) La norme $\|\omega_{n+1}\|_\infty$ est minimale pour le choix suivant :*

$$x_i^C = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2}\cos\left(\frac{2i+1}{2(n+1)}\pi\right), \quad i = 0, \ldots, n.$$

On représente sur la Figure 2 (à droite) la fonction f, et $\Pi_n f$, pour $n = 3, 4, 5, 10$. On observe maintenant que $\Pi_n f$ converge uniformément vers f sur $[-1, 1]$.

Remarque 1.1 *Néanmoins, de façon générale, quels que soient les points $x_0, \ldots, x_n$, on peut toujours trouver une fonction continue f sur un intervalle $[a, b]$ telle que $\Pi_n f$ ne converge pas uniformément vers f (voir la référence [2]).*

2 Interpolation de Lagrange $\mathbb{P}_1$ par morceaux

On a vu dans les sections précédentes que l'on ne peut garantir la convergence uniforme de $\Pi_n f$ vers f, en particulier avec des nœuds équirépartis. Cependant, l'interpolation de Lagrange de bas degré est suffisamment précise lorsqu'elle est utilisée sur des intervalles assez petits, avec des nœuds équirépartis.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On introduit une partition de $[a,b]$ en n sous-intervalles $I_i = [x_i, x_{i+1}],\ i \in [\![0, n-1]\!]$ de longueur $h = \frac{b-a}{n}$, avec les points $x_i = a + ih,\ 0 \leqslant i \leqslant n$, tels que $[a,b] = \bigcup_{i=0}^{n-1} I_i$. On note $y_i = f(x_i),\ \forall i \in [\![0, n]\!]$.

Définition 2.1 (Polynôme d'interpolation $\mathbb{P}_1$ par morceaux) *Pour $i \in [\![0, n-1]\!]$, soit $\Pi_{1,i} f$ le polynôme d'interpolation de Lagrange aux nœuds $(x_i, y_i),\ (x_{i+1}, y_{i+1})$, défini par*

$$\Pi_{1,i} f(x) = y_i + \frac{y_{i+1} - y_i}{h}(x - x_i).$$

Le polynôme d'interpolation $\mathbb{P}_1$ par morceaux, noté $\Pi_1^h f$, est défini sur $\mathbb{R}$ de la façon suivante : sa restriction sur chaque intervalle $I_i,\ i \in [\![0, n-1]\!]$, est :

$$\Pi_1^h f(x) = \Pi_{1,i} f(x),\ \forall x \in I_i.$$

C'est-à-dire que l'on a :

$$\Pi_1^h f(x) = \begin{cases} y_0 + \frac{y_1 - y_0}{h}(x - x_0),\ \forall x \in [x_0, x_1], \\ y_1 + \frac{y_2 - y_1}{h}(x - x_1),\ \forall x \in [x_1, x_2], \\ \vdots \\ y_{n-1} + \frac{y_n - y_{n-1}}{h}(x - x_{n-1}),\ \forall x \in [x_{n-1}, x_n]. \end{cases}$$

Notons que l'on peut bien définir $\Pi_1^h f$ comme ci-dessus. En effet, on a $\Pi_{1,i-1} f(x_i) = \Pi_{1,i} f(x_i) = y_i$, donc $\Pi_1^h f$ n'a qu'une seule valeur en x_i, qui vaut y_i, pour $i \in [\![0, n]\!]$. Par conséquent $\Pi_{1,i} f$ est continue sur $\mathbb{R}$. En revanche $\Pi_{1,i} f$ n'est a priori pas dérivable aux points x_i (sauf cas particuliers).

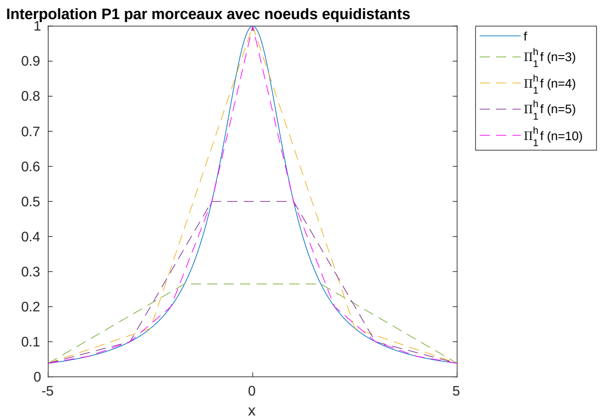


FIGURE 3 – Exemple de Runge avec l'interpolation par morceaux, et des nœuds équirépartis

Théorème 2.1 *Si $f \in C^2([a,b])$, et $x \in [a,b]$, alors*

$$\max_{x \in [a,b]} |f(x) - \Pi_1^h f(x)| \leqslant \frac{h^2}{8} \max_{x \in [a,b]} |f''(x)|.$$

Exercice 2.1
1. *En utilisant le Théorème 1.2 (sur $I_i,\ i \in [\![0, n-1]\!]$), démontrer le théorème 2.1.*
2. *Soit $f(x) = \cos(\frac{\pi}{2} x), \forall x \in [0,1]$. Représenter graphiquement, f et $\Pi_1^h f$ pour $n = 3$.*