Institut Galilée Année 2020/2021
Licence Mathématiques 2ème année

Méthodes Numériques - TD 3, 4 et 5
Algèbre linéaire

TM : Travail à la Maison

---

1 (TD3) Matrices

Exercice 1 (Matrice transposée)

Soit $\mathbb{A} = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on note $\mathbb{A}^t \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ la *matrice transposée* de $\mathbb{A}$, définie de façon unique par

$$(\mathbb{A}^t)_{i,j} = a_{j,i},\ 1 \leqslant i,j \leqslant n. \tag{1}$$

. On veut montrer que $\mathbb{A}^t$ est également l'unique matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, vérifiant

$$(\mathbb{A}\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = (\boldsymbol{u}, \mathbb{A}^t\boldsymbol{v}), \quad \forall \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^n, \tag{2}$$

où $(\cdot,\cdot)$ désigne le produit scalaire euclidien de $\mathbb{R}^n$.

1. Montrer que (1) implique (2).
2. Montrer que (2) implique (1) (*Indication : prendre $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{e}^{(i)}$ et $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{e}^{(j)}$, où $\boldsymbol{e}^{(i)}$ et $\boldsymbol{e}^{(j)}$ sont les i-ème et j-ème vecteurs de la base canonique de $\mathbb{R}^n$*).

Exercice 2 (Matrice adjointe) (TM)

Soit $\mathbb{A} = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on note $\mathbb{A}^* \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ la *matrice adjointe* de $\mathbb{A}$, définie de façon unique par

$$(\mathbb{A}^*)_{i,j} = \overline{a_{j,i}},\ 1 \leqslant i,j \leqslant n. \tag{3}$$

. En procédant comme dans l'exercice 1 (questions 1. et 2.), montrer que $\mathbb{A}^*$ est l'unique matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, vérifiant

$$(\mathbb{A}\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = (\boldsymbol{u}, \mathbb{A}^*\boldsymbol{v}), \quad \forall \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in \mathbb{C}^n, \tag{4}$$

où $(\cdot,\cdot)$ désigne le produit scalaire hermitien de $\mathbb{C}^n$.

Exercice 3 (Matrice inversible)

Soient $\mathbb{A}$ et $\mathbb{B}$, deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Montrer que

$$\mathbb{A}\mathbb{B} = \mathbb{I} \Rightarrow \mathbb{B}\mathbb{A} = \mathbb{I}.$$

Que peut-on en conclure ?

Exercice 4 (Matrice inversible) (TM)

On suppose que $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

1. Soit $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice inversible et symétrique, montrer que $\mathbb{A}^{-1}$ est symétrique.
2. Soit $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $\mathbb{I} - \mathbb{A}$ est inversible. Montrer que $\mathbb{A}$ et $(\mathbb{I} - \mathbb{A})^{-1}$ commutent.
3. Soient $\mathbb{A}, \mathbb{B} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ inversibles telle que leur somme $\mathbb{A} + \mathbb{B}$ soit inversible. Montrer que

$$\mathbb{A}\,(\mathbb{A} + \mathbb{B})^{-1}\,\mathbb{B} = \mathbb{B}\,(\mathbb{A} + \mathbb{B})^{-1}\,\mathbb{A} = \left(\mathbb{A}^{-1} + \mathbb{B}^{-1}\right)^{-1}.$$

Exercice 5 (Matrice triangulaire)

Soient $\mathbb{A} = (a_{ij})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2}$ une matrice triangulaire inférieure de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1. Quelle est la structure de la matrice $\mathbb{A}^t$?
2. Calculer $\det(\mathbb{A})$ (*Indication : faire une récurrence sur la taille de la matrice $\mathbb{A}$*).
   A quelle(s) condition(s) la matrice $\mathbb{A}$ est-elle inversible ?
3. Déterminer les valeurs propres de $\mathbb{A}$, puis tr$(\mathbb{A})$ et $\det(\mathbb{A})$ en fonction des valeurs propres de $\mathbb{A}$.
4. (TM) Refaire les questions 1) à 3) lorsque $\mathbb{A}$ est triangulaire supérieure.

2 (TD4) Valeurs propres, vecteurs propres, rayon spectral

Exercice 6

Soit $\mathbb{A}$ et $\mathbb{B}$ les matrices définies par

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \qquad \mathbb{B} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Les matrices $\mathbb{A}$ et $\mathbb{B}$ sont-elles inversibles ?
2. Calculer les valeurs propres, ainsi que le rayon spectral, de $\mathbb{A}$, puis de $\mathbb{B}$.

Exercice 7 (Valeurs propres d'une matrice symétrique, définie positive)

Soit $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique.

1. (a) Montrer que $(\mathbb{A}\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}) \in \mathbb{R},\ \forall \boldsymbol{u} \in \mathbb{C}^n$.
   (b) Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ une valeur propre de $\mathbb{A}$ et $\boldsymbol{x} \in \mathbb{C}^n$ un vecteur propre de $\mathbb{A}$ associé à λ. Déduire de (a) que $(\mathbb{A}\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) \in \mathbb{R}$, puis que $\lambda \in \mathbb{R}$.
2. On suppose que $\mathbb{A}$ est définie positive. Montrer que les valeurs propres de $\mathbb{A}$ sont strictement positives. En déduire que $\mathbb{A}$ est inversible.
3. On suppose à nouveau que $\mathbb{A}$ est définie positive (donc inversible, d'après 2.). On note $\{\lambda_i\}_{i \in [\![1,n]\!]}$ les valeurs propres de $\mathbb{A}$. On admet le résultat suivant (à la question 2. on a montré le sens " $\Rightarrow$ ") :

$$\mathbb{A} \text{ est définie positive} \iff \lambda_i > 0,\ \forall i \in [\![1, n]\!].$$

   (a) Montrer que $\mathbb{A}^{-1}$ est symétrique.
   (b) Calculer les valeurs propres de $\mathbb{A}^{-1}$ en fonction de celles de $\mathbb{A}$. En déduire que $\mathbb{A}^{-1}$ est définie positive.

3 (TD5) Normes vectorielles et normes matricielles

Exercice 8 (Inégalité de Cauchy-Schwarz) (TM)

1. Montrer l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$\forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n, \qquad |(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})| \leqslant \|\boldsymbol{x}\|_2 \|\boldsymbol{y}\|_2. \tag{5}$$

2. Montrer que l'on a l'égalité dans (5) si et seulement si $\boldsymbol{y} = \alpha \boldsymbol{x}$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$.

Exercice 9 (Normes matricielles)

On considère la matrice $\mathbb{B} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, de l'exercice 6.

1. Calculer $\|\mathbb{B}\|_1$ et $\|\mathbb{B}\|_\infty$.
2. Calculer $\|\mathbb{B}\|_2$.

Exercice 10 (Suites de vecteurs et de matrices)

Soit $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes :

1. $\lim_{k\to\infty} \mathbb{B}^k = 0$,
2. $\lim_{k\to\infty} \mathbb{B}^k \boldsymbol{v} = 0$ pour tout vecteur $\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^n$,
3. $\rho(\mathbb{B}) < 1$,
4. $\|\mathbb{B}\|_s < 1$ pour au moins une norme matricielle subordonnée $\| \bullet \|_s$.