Institut Galilée
Licence Mathématiques 2ème année

Année 2020/2021

Méthodes Numériques 2 - TD 1, 2, 3
Interpolation polynomiale

TM : Travail à la Maison

---

1 Interpolation de Lagrange

Exercice 1 (Calcul du polynôme d'interpolation)

Considérons une fonction f dont le graphe passe par les points $P_0 = (0, 0)$, $P_1 = (1, 2)$, $P_2 = (2, 16)$, et $P_3 = (3, 36)$.

1. (Interpolation de Lagrange $\mathbb{P}_1$)
   (a) Déterminer "à la main" le polynôme de Lagrange $\Pi_1 f$ coïncidant avec f aux points P_0 et P_1.
   (b) Retrouver le résultat de 1-(a) en utilisant la formule du polynôme d'interpolation dans la base des $\{\ell_i\}_{i\in[\![0,1]\!]}$.
   (c) Soit $f(x) = \cos\big(\pi(x-1)\big) + 1,\ \forall x \in [0, 1]$. Réprésenter graphiquement f et $\Pi_1 f$ (oïncidant avec f en P_0 et P_1) sur $[0, 1]$.
2. (Interpolation de Lagrange $\mathbb{P}_2$)
   (a) Déterminer "à la main" le polynôme de Lagrange $\Pi_2 f$ coïncidant avec f aux points P_0, P_1, et P_2.
   (b) Retrouver le résultat de 2-(a) en utilisant la formule du polynôme d'interpolation dans la base des $\{\ell_i\}_{i\in[\![0,2]\!]}$.
3. (Interpolation de Lagrange $\mathbb{P}_3$) (**TM**)
   (a) Déterminer "à la main" le polynôme de Lagrange $\Pi_3 f$ coïncidant avec f aux points P_0, P_1, P_2, et P_3.
   (b) Retrouver le résultat de 3-(a) en utilisant la formule du polynôme d'interpolation dans la base des $\{\ell_i\}_{i\in[\![0,3]\!]}$.

Exercice 2 (Identification)

On considère les nœuds $x_0 = -2$, $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = 2$, et les valeurs $y_0 = 4$, $y_1 = 0$, $y_2 = 0$, $y_3 = 4$. Parmi les polynômes suivants, lequel est le polynôme d'interpolation de Lagrange de $\{y_i\}_{0\leqslant i\leqslant 3}$ aux nœuds $\{x_i\}_{0\leqslant i\leqslant 3}$?

1. $P(x) = x^4 - \frac{2}{3}x^3 - 3x^2 + \frac{8}{3}x$
2. $Q(x) = \frac{4}{3}x^2 - \frac{4}{3}$
3. $R(x) = \frac{1}{3}x^3 + x^2 - \frac{4}{3}x.$

2 Erreur d'interpolation

Exercice 3

On rappelle que si $\{x_0, \ldots, x_n\}$ $n+1$ sont nœuds distincts et x un point appartenant au domaine de définition de f, et si $f \in \mathcal{C}^{n+1}(I_x)$, où I_x est le plus petit intervalle contenant les nœuds $x_0, \ldots, x_n$ et le point x, alors, l'erreur d'interpolation au point x est donnée par : $\exists \xi \in I_x$ tel que

$$E_n(x) = f(x) - \Pi_n f(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\omega_{n+1}(x). \tag{1}$$

Posons $f(x) = \sqrt{x}, \forall x \in \mathbb{R}$. Avec quelle précision peut-on calculer $\sqrt{115}$ à l'aide du polynôme d'interpolation de Lagrange interpolant la fonction f aux nœuds $x_0 = 100, x_1 = 121$ et $x_2 = 144$?

Exercice 4 (**TM**)

Soit $f(x) = \cos(x)$, pour $x \in [0, 1]$. Estimer le nombre minimum de nœuds d'iterpolation pour que l'erreur entre f et son polynôme d'interpolation de Lagrange soit inférieure à 0.01.

3 Interpolation de Lagrange par morceaux

Dans l'exemple du cours sur les variations de température, on a vu que l'on ne peut garantir la convergence uniforme de Π_n vers f (c'est-à-dire que $\sup_{x\in[a,b]} |f(x)-\Pi_n(x)|$ ne semble pas tendre vers 0), avec des nœuds équirépartis. Cependant, comme nous l'avons vu dans cet exemple, l'interpolation de Lagrange de bas degré (degré 1 dans l'exemple) est suffisamment précise lorsqu'elle est utilisée sur des intervalles assez petits, avec des nœuds équirépartis. Cela s'appelle l'*interpolation de Lagrange par morceaux*.

Exercice 4

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On introduit une partition de $[a,b]$ en n sous-intervalles $I_i = [x_i, x_{i+1}],\ i \in [\![0, n-1]\!]$, de longueur $h = \frac{b-a}{n}$, avec les points $x_i = a + ih,\ i \in [\![0,n]\!]$.
Soit f une fonction continue sur $[a,b]$. On note $y_i = f(x_i),\ i \in [\![0,n]\!]$.

Définition : Pour $i \in [\![0, n-1]\!]$, soit $\Pi_{1,i}f$ le polynôme d'interpolation de Lagrange aux nœuds $(x_i, y_i),\ (x_{i+1}, y_{i+1})$. Le *polynôme d'interpolation par morceaux* $\Pi_1^h f$ est défini par : pour tout $i \in [\![0, n-1]\!]$,

$$\Pi_1^h f(x) = \Pi_{1,i} f(x),\ \forall x \in I_i.$$

1. Donner l'expression de $\Pi_1^h f$ sur chaque intervalle I_i, pour $i \in [\![0, n-1]\!]$, en fonction de x_i, y_i, y_{i+1} et h (on le fera de deux façons : directement et par la formule du cours).
2. Vérifier que la fonction $\Pi_1^h f$ est continue sur $[a,b]$. Est-elle dérivable sur $[a,b]$?
3. Soit $i \in [\![0, n-1]\!]$, et $x \in I_i$. On suppose que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur I_i. Donner l'erreur d'interpolation $f(x) - \Pi_{1,i}f(x)$, pour $x \in I_i$.
4. On suppose que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[a,b]$, et soit $x \in [a,b]$. Montrer que l'on a l'erreur d'interpolation suivante
$$|f(x) - \Pi_1^h f(x)| \leqslant \frac{h^2}{8} \sup_{x\in[a,b]} |f''(x)|.$$
5. On considère la fonction $f(x) = \cos(\frac{\pi}{2}x)$ sur $[0,1]$. Représenter graphiquement sur $[0,1]$ la fonction f, ainsi que $\Pi_1^h f$ avec $n = 3$ sous-intervalles.

4 Autre type d'interpolation : interpolation d'Hermite

On considère $n+1$ points $x_i \in \mathbb{R}$, deux à deux distincts et f une fonction de classe $\mathcal{C}^1$. On cherche un polynôme $H_n f$ tel que
$$H_n f(x_i) = f(x_i), \quad \text{et} \quad (H_n f)'(x_i) = f'(x_i), \qquad \forall i \in [\![0,n]\!]. \tag{2}$$

1. Quel est a priori le degré de $H_n f$?
2. **Unicité.** Montrer que s'il existe un polynôme $H_n f \in \mathbb{P}_{2n+1}[X]$ vérifiant (2), alors ce polynôme est unique.
3. **Existence.** On introduit les polynômes définis par, pour tout $i \in [\![0,n]\!]$:
$$A_i(x) = \ell_i(x)^2(1 - 2\ell_i'(x_i)(x - x_i)), \tag{3}$$
$$B_i(x) = \ell_i(x)^2(x - x_i), \tag{4}$$
où les $\{\ell_i\}_{i\in[\![0,n]\!]}$ sont les polynômes caractéristiques de Lagrange.
Vérifier que pour tout $i, j \in [\![0,n]\!]$:
$$A_i(x_j) = \delta_{ij}, \quad A_i'(x_j) = 0, \quad B_i(x_j) = 0, \quad B_i'(x_j) = \delta_{ij}. \tag{5}$$
En déduire que le polynôme $H_n f$ défini par
$$H_n f(x) = \sum_{i=0}^{n} \big(f(x_i)A_i(x) + f'(x_i)B_i(x)\big) \tag{6}$$
est dans $\mathbb{P}_{2n+1}[X]$ et vérifie (2).
4. **Conclusion.** Déduire des questions précédentes qu'il existe unique polynôme de $H_n f \in \mathbb{P}_{2n+1}[X]$ vérifiant (2) et donner l'expression de $H_n f$.