Optimisation en dimension finie : avec contrainte égalité

TM : Travail à la Maison

Exercice 1 – **(Cas quadratique avec une contrainte égalité affine)**
On considère la fonction sur $\mathbb{R}^2$ *suivante :*

$$f(x,y) = \frac{3}{2}x^2 - xy + \frac{3}{2}y^2 - 8x + 6y.$$

1. *Déterminer le(s) point(s) de minimum de* f *sous la contrainte* $-2x + y = -3$*, à l'aide des multiplicateurs de Lagrange.*
2. *(**TM**) Retrouver le résultat de la question précédente en substituant* y *par* $y = \frac{3-x}{4}$ *et en se ramenant à un problème de minimisation dans* $\mathbb{R}$*.*

Exercice 2 – **(Un problème d'optimisation avec contrainte)**
Une entreprise fabrique deux modèles de V.T.T. : le modèle X *à 500€ l'unité, et le modèle* Y *(de meilleur qualité) à 1000€ l'unité. La fonction*

$$c(x,y) = 5x^2 + 5y^2 - \frac{5}{2}xy + 10000$$

représente le coût de fabrication en euros (par mois), pour fabriquer un nombre x *de V.T.T. du modèle* X *et* y *du modèle* Y*. On suppose que tous les V.T.T. fabriqués sont vendus sur le marché.*

1. *Soit* $(x,y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$*. Déterminer le profit* $p(x,y)$ *réalisé par l'entreprise lorsqu'elle a vendu* x *V.T.T. de modèle de* X *et* y *V.T.T. de modèle* Y*.*
2. *On pose* $f = -p$*. La hessienne de* f *est-elle définie positive sur* $\mathbb{R}^2$ *?*
3. *L'entreprise produit, à pleine capacité, 150 V.T.T. par mois. Trouver la répartition optimale entre les modèles de type* X *et* Y *permettant de maximiser le profit quotidien et calculer le profit réalisé (indication : pour simplifier on ne tiendra pas compte des contraintes naturelles "*$x \geq 0$*" et "*$y \geq 0$*" et on expliquera ensuite pourquoi cela ne change en réalité rien).*
4. *(**à chercher pour le TD3**) Le conseil d'administration de l'entreprise s'interroge sur la pertinence de vouloir produire à pleine capacité, et se demande s'il ne peut pas augmenter le profit en produisant autrement. Pouvez-vous aider le conseil d'administration ?*

Exercice 3 – **(Boite parallélépipédique)**
Soit $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$*. Trouver les dimensions* x, y *et* z *d'une boîte parallélépipédique droite, sans couvercle, réalisant le plus grand volume, sachant que sa surface latérale vaut* a^2*, et que* $0 \leq x \leq a$, $0 \leq y \leq a$ *et* $0 \leq z \leq a$*.*
(indication : pour simplifier on ne tiendra pas compte des contraintes $0 \leq x \leq a$, $0 \leq y \leq a$ *et* $0 \leq z \leq a$ *et on expliquera ensuite pourquoi cela ne change en réalité rien).*

Exercice 4 – **(Cas quelconque avec deux contraintes égalité)**
On considère la fonction sur $\mathbb{R}^3$ *suivante :*

$$f(x,y) = xyz.$$

Déterminer le(s) point(s) de minimum de f*, ainsi que le minimum de* f*, sous les deux contraintes* $x + y + z = 1$ *et* $x^2 + y^2 + z^2 = 1$*, à l'aide des multiplicateurs de Lagrange.*