Sup'Galilée
MACS1

Année 2020/2021

Analyse numérique - TD6 & TD 7 - Corrigé
Méthodes directes pour la résolution des systèmes linéaires

---

1 Méthode de Gauss et factorisation $\mathbb{LU}$

Exercice 1 : un exemple

Soient $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$. On considère le système linéaire suivant d'inconnues x_1, x_2, x_3 :

$$\left\{\begin{array}{rcl} x_1 + 2x_2 - 3x_3 & = & \alpha \\ 2x_1 + 6x_2 - 5x_3 & = & \beta \\ x_1 - 2x_2 + 7x_3 & = & \gamma \end{array}\right. \tag{1}$$

1. Écrire le système (1) sous la forme $\mathbb{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$, avec $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3$, et $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^3$, que l'on explicitera.
2. Est-ce que le système (1) admet une unique solution pour tout $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$?
3. Montrer que $\mathbb{A}$ admet une unique factorisation $\mathbb{LU}$.
   Dans la suite on choisit $\alpha = 1$, $\beta = -1$ et $\gamma = 2$ et on va résoudre le système $\mathbb{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ de plusieurs façons :
   (a) Résoudre le système (1) par l'algorithme de Gauss sans pivot.
   (b) Calculer la factorisation $\mathbb{LU}$ de $\mathbb{A}$ puis résoudre le système (1) en utilisant cette factorisation $\mathbb{LU}$.
   (c) Résoudre le système (1) par l'algorithme de Gauss avec pivot partiel.
   (d) Calculer la factorisation $\bar{\mathbb{L}}\bar{\mathbb{U}}$ de $\mathbb{PA}$ (où $\mathbb{P}$ est la matrice produit des matrices de permutations effectuées dans l'algorithme de Gauss avec pivot partiel), puis résoudre le système (1) en utilisant cette factorisation.

Correction

1. On a

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 6 & -5 \\ 1 & -2 & 7 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix},$$

$\mathbb{A}$ et $\boldsymbol{b}$ étant les données, et $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3$ le vecteur inconnu.

2. On calcule $\det(\mathbb{A}) = 24 \neq 0$ donc $\mathbb{A}$ est inversible. Le système admet donc une unique solution : $\boldsymbol{x} = \mathbb{A}^{-1}\boldsymbol{b}$, Pour tout $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^3$, c'est-à-dire pour tout $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$.

3. On choisit $\alpha = 1$, $\beta = -1$ et $\gamma = 2$. Vérifions que $\mathbb{A}$ admet une unique factorisation $\mathbb{LU}$. D'après le cours (ou l'exercice 3 ci-dessous), une condition suffisante est que les sous matrices principales de $\mathbb{A}$ sont inversibles. Ceci est bien le cas car : $\det(\Delta_1) = \det(1) = 1 \neq 0$, $\det(\Delta_2) = \det \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 6 \end{pmatrix} = 2 \neq 0$, et $\det(\Delta_3) = \det(\mathbb{A}) \neq 0$.

3. (a) Le fait que $\mathbb{A}$ admet une (unique) factorisation $\mathbb{LU}$ revient à dire que l'on peut effectuer l'algorithme de Gauss sans pivot. On regroupe $\mathbb{A}$ et $\boldsymbol{b}$ (en ajoutant $\boldsymbol{b}$ à droite de $\mathbb{A}$) :

$$\underbrace{\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 1 \\ 2 & 6 & -5 & -1 \\ 1 & -2 & 7 & 2 \end{array}\right)}_{\mathbb{A}^{(0)} = \mathbb{A} \quad \boldsymbol{b}^{(0)} = \boldsymbol{b}} \xrightarrow[\mathcal{L}_3 \leftarrow \mathcal{L}_3 - \mathcal{L}_1]{\mathcal{L}_2 \leftarrow \mathcal{L}_2 - 2\mathcal{L}_1} \underbrace{\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & -3 \\ 0 & -4 & 10 & 1 \end{array}\right)}_{\mathbb{A}^{(1)} \quad \boldsymbol{b}^{(1)}} \xrightarrow[\mathcal{L}_3 \leftarrow \mathcal{L}_3 + 2\mathcal{L}_2]{} \underbrace{\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 12 & -5 \end{array}\right)}_{\mathbb{A}^{(2)} \quad \boldsymbol{b}^{(2)}}$$

En posant $\mathbb{U} = \mathbb{A}^{(2)}$ et $\boldsymbol{c} = \boldsymbol{b}^{(2)}$ on est ramené à résoudre le système triangulaire supérieur $\mathbb{U}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{c}$, que l'on résout par remontée :

$$\left\{\begin{array}{rcl} 12x_3 & = & -5 \\ 2x_2 + x_3 & = & -3 \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 & = & 1 \end{array}\right. \quad \begin{array}{l} \Rightarrow \text{permet de calculer } x_3 \ : \ x_3 = -\frac{5}{12} \\ \Rightarrow \text{permet de calculer } x_2 \text{ connaissant } x_3 \ : x_2 = -\frac{31}{24} \\ \Rightarrow \text{permet de calculer } x_1 \text{ connaissant } x_2, x_3 \ : x_1 = \frac{7}{3} \end{array}$$

(b) Pour trouver la factorisation $\mathbb{LU}$ de $\mathbb{A}$ on reprend les étapes de l'algorithme de Gauss :

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 6 & -5 \\ 1 & -2 & 7 \end{pmatrix}}_{\mathbb{A}=\mathbb{A}^{(0)}} \xrightarrow[\substack{\mathcal{L}_2 \leftarrow \mathcal{L}_2 - \mathbf{2} * \mathcal{L}_1 \\ \mathcal{L}_3 \leftarrow \mathcal{L}_3 - \mathbf{1} * \mathcal{L}_1}]{} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & -4 & 10 \end{pmatrix}}_{\mathbb{A}^{(1)}} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\mathbb{E}^{(1)}} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 6 & -5 \\ 1 & -2 & 7 \end{pmatrix}}_{\mathbb{A}^{(0)}}$$

$$\xrightarrow[\mathcal{L}_3 \leftarrow \mathcal{L}_3 - (\mathbf{-2}) * \mathcal{L}_2]{} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 12 \end{pmatrix}}_{\mathbb{A}^{(2)}} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}}_{\mathbb{E}^{(2)}} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & -4 & 10 \end{pmatrix}}_{\mathbb{A}^{(1)}}$$

Notons que $\mathbb{E}^{(1)}$ est inversible, et $(\mathbb{E}^{(1)})^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. De même, $\mathbb{E}^{(2)}$ est inversible, et $(\mathbb{E}^{(2)})^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$.
Ainsi, à la fin de la 1ère étape de la méthode de Gauss on a :

$$\mathbb{A}^{(1)} = \mathbb{E}^{(1)}\mathbb{A},$$

et à la fin de la 2ème étape on obtient :

$$\mathbb{U} \underset{\text{def}}{=} \mathbb{A}^{(2)} = \mathbb{E}^{(2)}\mathbb{A}^{(1)} = \mathbb{E}^{(2)}\mathbb{E}^{(1)}\mathbb{A}.$$

De l'égalité ci-dessus, on a

$$\begin{aligned} \mathbb{E}^{(2)}\mathbb{E}^{(1)}\mathbb{A} = \mathbb{U} &\iff \mathbb{A} = (\mathbb{E}^{(2)}\mathbb{E}^{(1)})^{-1}\mathbb{U} \\ &\iff \mathbb{A} = \left((\mathbb{E}^{(1)})^{-1}(\mathbb{E}^{(2)})^{-1}\right)\mathbb{U} \\ &\iff \mathbb{A} = \mathbb{LU} \end{aligned}$$

avec $\mathbb{L} \underset{\text{def}}{=} = (\mathbb{E}^{(1)})^{-1}(\mathbb{E}^{(2)})^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$.

Notons que pour obtenir $\mathbb{L}$ il suffit de partir de la matrice identité $\mathbb{I}$ puis de recopier dans cette matrice, en les changeant de signe, les coefficients utilisés à chaque opération élémentaire

$$\underset{\mathbb{I}}{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}} \longrightarrow \underset{\mathbb{L} = (\mathbb{E}^{(1)})^{-1}(\mathbb{E}^{(2)})^{-1}}{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \mathbf{2} & 1 & 0 \\ \mathbf{1} & \mathbf{-2} & 1 \end{pmatrix}}.$$

Si l'on souhaite directement trouver la factorisation $\mathbb{LU}$ de $\mathbb{A}$ sans passer par les étapes de l'algorithme de Gauss, alors on cherche $\mathbb{L} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \ell_{21} & 1 & 0 \\ \ell_{31} & \ell_{32} & 1 \end{pmatrix}$ et $\mathbb{U} = \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ 0 & u_{22} & u_{23} \\ 0 & 0 & u_{33} \end{pmatrix}$ telles que $\mathbb{LU} = \mathbb{A}$. Identifions les coefficients ligne par ligne :

Étape 1 : identification de la première ligne de $\mathbb{LU} = \mathbb{A}$:

$$u_{11} = a_{11} = 1, \quad u_{12} = a_{12} = 2, \quad u_{13} = a_{13} = -3.$$

Étape 2 : identification de la deuxième ligne de $\mathbb{LU} = \mathbb{A}$:

$$\begin{aligned} \ell_{21}u_{11} = a_{21} = 2 \quad &\Rightarrow \quad \ell_{21} = 2, \\ \ell_{21}u_{12} + u_{22} = a_{22} = 6 \quad &\Rightarrow \quad u_{22} = 2, \\ \ell_{21}u_{13} + u_{23} = a_{23} = -5 \quad &\Rightarrow \quad u_{23} = 1. \end{aligned}$$

Étape 2 : identification de la troisième ligne de $\mathbb{LU} = \mathbb{A}$:

$$\begin{aligned} \ell_{31}u_{11} = a_{31} = 1 \quad &\Rightarrow \quad \ell_{31} = 1, \\ \ell_{31}u_{12} + \ell_{32}u_{22} = a_{32} = -2 \quad &\Rightarrow \quad \ell_{32} = -2, \\ \ell_{31}u_{13} + \ell_{32}u_{23} + u_{33} = a_{33} = 7 \quad &\Rightarrow \quad u_{33} = 12. \end{aligned}$$

C'est cette méthode que l'on généralisera ci-dessous, dans l'exercice 2, pour écrire l'algorithme de calcul de la factorisation $\mathbb{LU}$ d'une matrice $\mathbb{A}$ de dimension quelconque.

Utilisons maintenant cette factorisation $\mathbb{LU}$ pour résoudre le système $\mathbb{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$. On a

$$\begin{aligned} \mathbb{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} &\iff \mathbb{LU}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \\ &\iff \mathbb{L}\boldsymbol{y} = \boldsymbol{b} \text{ puis } \mathbb{U}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y} \end{aligned}$$

On résout par descente $\mathbb{L}\boldsymbol{y} = \boldsymbol{b}$ et on trouve $\boldsymbol{y} = (1, -3, -5)^t$ (notons que $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{c}$ de la question (a)). Puis on résout $\mathbb{U}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}$ par remontée, et on trouve $\boldsymbol{x} = (\frac{7}{3}, -\frac{31}{24}, -\frac{5}{12})^t$.

(c) Effectuons maintenant l'algorithme de Gauss avec pivot partiel. On commence par chercher dans la colonne 1 le plus grand nombre en valeur absolue : ici 2 (à la 2ème ligne) et on permute la 2ème ligne avec la 1ère :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 1 \\ 2 & 6 & -5 & -1 \\ 1 & -2 & 7 & 2 \end{array}\right) \underset{\mathcal{L}_2 \leftrightarrow \mathcal{L}_1}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 6 & -5 & -1 \\ 1 & 2 & -3 & 1 \\ 1 & -2 & 7 & 2 \end{array}\right)$$

Ensuite on effectue la 1ère étape de la méthode de Gauss :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 6 & -5 & -1 \\ 1 & 2 & -3 & 1 \\ 1 & -2 & 7 & 2 \end{array}\right) \underset{\substack{\mathcal{L}_2 \leftarrow \mathcal{L}_2 - \frac{1}{2}\mathcal{L}_1 \\ \mathcal{L}_3 \leftarrow \mathcal{L}_3 - \frac{1}{2}\mathcal{L}_1}}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 6 & -5 & -1 \\ 0 & -1 & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ 0 & -5 & \frac{19}{2} & \frac{5}{2} \end{array}\right)$$

On cherche maintenant dans la colonne 2 à partir de la ligne 2 le plus grand nombre en valeur absolue : ici -5 (à la 3ème ligne) et on permute la 3ème ligne avec la 2ème :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 6 & -5 & -1 \\ 0 & -1 & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ 0 & -5 & \frac{19}{2} & \frac{5}{2} \end{array}\right) \underset{\mathcal{L}_3 \leftrightarrow \mathcal{L}_2}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 6 & -5 & -1 \\ 0 & -5 & \frac{19}{2} & \frac{5}{2} \\ 0 & -1 & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{array}\right)$$

Puis on effectue la 2ème (et dernière) étape de la méthode de Gauss :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 6 & -5 & -1 \\ 0 & -5 & \frac{19}{2} & \frac{5}{2} \\ 0 & -1 & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{array}\right) \underset{\mathcal{L}_3 \leftarrow \mathcal{L}_3 - \frac{1}{5}\mathcal{L}_2}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 6 & -5 & -1 \\ 0 & -5 & \frac{19}{2} & \frac{5}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{12}{5} & 1 \end{array}\right)$$

En posant $\bar{\mathbb{U}} = \begin{pmatrix} 2 & 6 & -5 \\ 0 & -5 & \frac{19}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{12}{5} \end{pmatrix}$ et $\bar{\boldsymbol{c}} = \begin{pmatrix} -1 \\ \frac{5}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$ on est ramené à résoudre le système triangulaire supérieur $\bar{U}\boldsymbol{x} = \bar{\boldsymbol{c}}$, que l'on résout par remontée. On retrouve alors $\boldsymbol{x} = (\frac{7}{3}, -\frac{31}{24}, -\frac{5}{12})^t$.

(d) Pour trouver la factorisation $\bar{\mathbb{L}}\bar{\mathbb{U}}$ de $\mathbb{PA}$ on reprend les étapes de l'algorithme de Gauss avec pivot partiel :

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 6 & -5 \\ 1 & -2 & 7 \end{pmatrix}}_{\mathbb{A} = \mathbb{A}^{(0)}} \underset{\mathcal{L}_2 \leftrightarrow \mathcal{L}_1}{\longrightarrow} \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 6 & -5 \\ 1 & 2 & -3 \\ 1 & -2 & 7 \end{pmatrix}}_{\mathbb{P}_1\mathbb{A}} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\mathbb{P}_1} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 6 & -5 \\ 1 & -2 & 7 \end{pmatrix}}_{\mathbb{A}^{(0)}}$$

$$\underset{\substack{\mathcal{L}_2 \leftarrow \mathcal{L}_2 - \frac{1}{2}\mathcal{L}_1 \\ \mathcal{L}_3 \leftarrow \mathcal{L}_3 - \frac{1}{2}\mathcal{L}_1}}{\longrightarrow} \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 6 & -5 \\ 0 & -1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & -5 & \frac{19}{2} \end{pmatrix}}_{\mathbb{A}^{(1)}} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\bar{\mathbb{E}}^{(1)}} \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 6 & -5 \\ 1 & 2 & -3 \\ 1 & -2 & 7 \end{pmatrix}}_{\mathbb{P}_1\mathbb{A}^{(0)}}$$

$$\underset{\mathcal{L}_3 \leftrightarrow \mathcal{L}_2}{\longrightarrow} \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 6 & -5 \\ 0 & -5 & \frac{19}{2} \\ 0 & -1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}}_{\mathbb{P}_2\mathbb{A}^{(1)}} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}}_{\mathbb{P}_2} \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 6 & -5 \\ 0 & -1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & -5 & \frac{19}{2} \end{pmatrix}}_{\mathbb{A}^{(1)}}$$

$$\underset{\mathcal{L}_3 \leftarrow \mathcal{L}_3 - (-\frac{1}{5}) * \mathcal{L}_2}{\longrightarrow} \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 6 & -5 \\ 0 & -5 & \frac{19}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{12}{5} \end{pmatrix}}_{\mathbb{A}^{(2)}} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{5} & 1 \end{pmatrix}}_{\bar{\mathbb{E}}^{(2)}} \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 6 & -5 \\ 0 & -5 & \frac{19}{2} \\ 0 & -1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}}_{\mathbb{P}_2\mathbb{A}^{(1)}} =$$

Notons que $\bar{\mathbb{E}}^{(1)}$ est inversible, et $(\bar{\mathbb{E}}^{(1)})^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 1 \end{pmatrix}$. De même, $\bar{\mathbb{E}}^{(2)}$ est inversible, et $(\bar{\mathbb{E}}^{(2)})^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{5} & 1 \end{pmatrix}$.

Ainsi, à la fin de la 1ère étape de la méthode de Gauss on a :

$$\mathbb{A}^{(1)} = \bar{\mathbb{E}}^{(1)}\mathbb{P}_1\mathbb{A},$$

et à la fin de la 2ème étape on obtient :

$$\begin{aligned} &\bar{\mathbb{U}} \underset{\text{def}}{=} \mathbb{A}^{(2)} = \bar{\mathbb{E}}^{(2)}\mathbb{P}_2\mathbb{A}^{(1)} = \bar{\mathbb{E}}^{(2)}\mathbb{P}_2\bar{\mathbb{E}}^{(1)}\mathbb{P}_1\mathbb{A} \\ \iff\ &\bar{\mathbb{U}} = (\bar{\mathbb{E}}^{(2)}\bar{\mathbb{E}}^{(1)})(\mathbb{P}_2\mathbb{P}_1)\mathbb{A} \qquad\qquad \text{(car } \mathbb{P}_2 \text{ et } \bar{\mathbb{E}}^{(1)} \text{ commutent)} \end{aligned}$$

De l'égalité ci-dessus, on a

$$\begin{aligned} (\bar{\mathbb{E}}^{(2)}\bar{\mathbb{E}}^{(1)})(\mathbb{P}_2\mathbb{P}_1)\mathbb{A} = \bar{\mathbb{U}} &\iff (\mathbb{P}_2\mathbb{P}_1)\mathbb{A} = (\bar{\mathbb{E}}^{(2)}\bar{\mathbb{E}}^{(1)})^{-1}\bar{\mathbb{U}} \\ &\iff (\mathbb{P}_2\mathbb{P}_1)\mathbb{A} = \left((\bar{\mathbb{E}}^{(1)})^{-1}(\bar{\mathbb{E}}^{(2)})^{-1}\right)\bar{\mathbb{U}} \\ &\iff \mathbb{P}\mathbb{A} = \bar{\mathbb{L}}\bar{\mathbb{U}} \end{aligned}$$

avec $\mathbb{P} = \mathbb{P}_2\mathbb{P}_1$ et $\bar{\mathbb{L}} \underset{\text{def}}{=} (\bar{\mathbb{E}}^{(1)})^{-1}(\bar{\mathbb{E}}^{(2)})^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{5} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{5} & 1 \end{pmatrix}$.

Notons que pour obtenir $\mathbb{L}$ et $\mathbb{P}$ il suffit de partir de la matrice identité $\mathbb{I}$ puis :

— pour obtenir $\bar{\mathbb{L}}$: de recopier dans $\mathbb{I}$, en les changeant de signe, les coefficients utilisés à chaque opération élémentaire :

$$\underset{\mathbb{I}}{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}} \longrightarrow \underset{\bar{\mathbb{L}}}{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \mathbf{\frac{1}{2}} & 1 & 0 \\ \mathbf{\frac{1}{2}} & \mathbf{\frac{1}{5}} & 1 \end{pmatrix}}.$$

— pour obtenir $\bar{\mathbb{P}}$: de faire, à partir de $\mathbb{I}$, chaque permutation élémentaire :

$$\underset{\mathbb{I}}{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}} \underset{\mathcal{L}_2 \leftrightarrow \mathcal{L}_1}{\longrightarrow} \underset{\mathbb{P}_1}{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}} \underset{\mathcal{L}_3 \leftrightarrow \mathcal{L}_2}{\longrightarrow} \underset{\mathbb{P} = \mathbb{P}_2\mathbb{P}_1}{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}},$$

on a alors $\mathbb{P}\mathbb{A} = \bar{\mathbb{L}}\bar{\mathbb{U}}$.

Utilisons maintenant cette factorisation $\mathbb{P}\mathbb{A} = \bar{\mathbb{L}}\bar{\mathbb{U}}$ pour résoudre le système $\mathbb{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$. On a, puisque $\mathbb{P}$ est inversible

$$\begin{aligned} \mathbb{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \iff \mathbb{P}\mathbb{A}\boldsymbol{x} = \mathbb{P}\boldsymbol{b} &\iff \bar{\mathbb{L}}\bar{\mathbb{U}}\boldsymbol{x} = \mathbb{P}\boldsymbol{b} \\ &\iff \bar{\mathbb{L}}\bar{\boldsymbol{y}} = \mathbb{P}\boldsymbol{b} \text{ puis } \bar{\mathbb{U}}\boldsymbol{x} = \bar{\boldsymbol{y}} \end{aligned}$$

On résout par descente $\bar{\mathbb{L}}\boldsymbol{y} = \mathbb{P}\boldsymbol{b}$ et on trouve $\bar{\boldsymbol{y}} = (-1, \frac{5}{2}, 1)^t$ (notons que $\bar{\boldsymbol{y}} = \bar{\boldsymbol{c}}$ de la question (c)). Puis on résout $\bar{\mathbb{U}}\boldsymbol{x} = \bar{\boldsymbol{y}}$ par remontée, et on trouve $\boldsymbol{x} = (\frac{7}{3}, -\frac{31}{24}, -\frac{5}{12})^t$.

Exercice 2 : généralités

Soit $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice inversible admettant une factorisation $\mathbb{L}\mathbb{U}$ où $\mathbb{L}$ est une matrice triangulaire inférieure à diagonale unité et $\mathbb{U}$ est une matrice triangulaire supérieure.

1. Montrer que si la factorisation $\mathbb{L}\mathbb{U}$ existe alors elle est unique.
2. Décrire une méthode permettant de calculer explicitement les coefficients des matrices $\mathbb{L}$ et $\mathbb{U}$.
3. (*algo*) Ecrire une fonction FactLU permettant de calculer les matrices $\mathbb{L}$ et $\mathbb{U}$. Quel est le coût de cette méthode ? (on évaluera le nombre d'opérations élémentaires)
4. Soit $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice inversible. Est-il toujours possible de décomposer $\mathbb{A}$ sous la forme $\mathbb{A} = \mathbb{L}\mathbb{U}$ où $\mathbb{L}$ est une matrice triangulaire inférieure à diagonale unité et $\mathbb{U}$ est une matrice triangulaire supérieure ?

5. *(algo)* Soit $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice inversible admettant une factorisation $\mathbb{LU}$. Expliquer comment résoudre le système $\mathbb{A}x = b$ en utilisant cette factorisation et écrire l'algorithme (fonction ResFactLU) correspondant. Calculer le coût de cet algorithme.

Correction

1. Supposons que la matrice $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifie

$$\mathbb{A} = \mathbb{L}_1\mathbb{U}_1 = \mathbb{L}_2\mathbb{U}_2, \tag{2}$$

où

- $\mathbb{U}_1 \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $\mathbb{U}_2 \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ sont des matrices triangulaires supérieures,
- $\mathbb{L}_1 \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $\mathbb{L}_2 \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ sont des matrices triangulaires inférieures à diagonale unité (leurs coefficients diagonaux sont tous égaux à 1).

Nous allons montrer que $\mathbb{L}_1 = \mathbb{L}_2$ et $\mathbb{U}_1 = \mathbb{U}_2$. Comme $\mathbb{A}$ est inversible, alors

$$\text{det}(\mathbb{A}) = \text{det}(\mathbb{L}_1\mathbb{U}_1) = \text{det}(\mathbb{L}_1)\text{det}(\mathbb{U}_1) \neq 0.$$

Cela signifie donc que $\text{det}(\mathbb{L}_1) \neq 0$ et $\text{det}(\mathbb{U}_1) \neq 0$, autrement dit que les matrices $\mathbb{L}_1$ et $\mathbb{U}_1$ sont inversibles (on savait déjà en fait que $\mathbb{L}_1$ était inversible puisque $\det(\mathbb{L}_1) = 1$). De manière similaire, on montre que $\mathbb{L}_2$ et $\mathbb{U}_2$ sont inversibles.

Ainsi, la seconde égalité de (2) est équivalente à

$$(\mathbb{L}_2)^{-1}\mathbb{L}_1 = \mathbb{U}_2(\mathbb{U}_1)^{-1}. \tag{3}$$

La matrice $\mathbb{L}_2$ est triangulaire inférieure à diagonale unité. Par conséquent, d'après l'exercice 4 du TD2, la matrice $\mathbb{L}_2^{-1}$ est triangulaire inférieure à diagonale unité. Donc comme $\mathbb{L}_2^{-1}\mathbb{L}_1$ est le produit de deux matrices triangulaires inférieures à diagonale unité, le terme de gauche de l'égalité (3) est une matrice triangulaire inférieure à diagonale unité.

De manière similaire, comme la matrice $\mathbb{U}_1$ est triangulaire supérieure, son inverse $(\mathbb{U}_1)^{-1}$ est triangulaire supérieure. Donc, le terme de droite de l'égalité (3) est une matrice triangulaire supérieure.

Ainsi, l'égalité (3) implique que $(\mathbb{L}_2)^{-1}\mathbb{L}_1$ triangulaire inférieure est égale à et $\mathbb{U}_2(\mathbb{U}_1)^{-1}$ triangulaire supérieure, donc ce sont deux matrices diagonales identiques. De plus, $(\mathbb{L}_2)^{-1}\mathbb{L}_1$ étant à diagonale unité, elle est égale à la matrice identité :

$$(\mathbb{L}_2)^{-1}\mathbb{L}_1 = \mathbb{U}_2(\mathbb{U}_1)^{-1} = \mathbb{I},$$

ou de façon équivalente

$$\mathbb{L}_2 = \mathbb{L}_1 \quad \text{et} \quad \mathbb{U}_2 = \mathbb{U}_1.$$

Autrement dit, si $\mathbb{A}$ admet une factorisation $\mathbb{LU}$ (avec $\mathbb{L}$ triangulaire inférieure à diagonale unité et $\mathbb{U}$ triangulaire inférieure), alors cette factorisation est unique.

Remarque. *Ce résultat repose de manière essentielle sur le fait que $\mathbb{L}$ est à diagonale unité. Sans cette hypothèse, il n'y a pas unicité de la décomposition $\mathbb{LU}$.*

2. On suppose que $\mathbb{A}$ admet une décomposition $\mathbb{LU}$. L'objectif de cette question de calculer $\mathbb{L}$ et $\mathbb{U}$.
On pose $\mathbb{A} = (a_{ij})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2}$, $\mathbb{L} = (\ell_{ij})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2}$, $\mathbb{U} = (u_{ij})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2}$:

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad \mathbb{L} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \ell_{21} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ \ell_{n1} & \ell_{n2} & \cdots & \cdots & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbb{U} = \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & \cdots & \cdots & u_{1n} \\ 0 & u_{22} & u_{23} & \cdots & u_{2n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & 0 & \ddots & \ddots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & u_{nn} \end{pmatrix}$$

Comme $\mathbb{L}$ est triangulaire inférieure à diagonale unité, on sait que, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$

$$\ell_{ii} = 1 \quad \text{et} \quad \ell_{ik} = 0 \quad \forall k > i. \tag{4}$$

De manière similaire, comme $\mathbb{U}$ est triangulaire supérieure, pour tout $j \in [\![1, n]\!]$,

$$u_{kj} = 0 \quad \forall k > j. \tag{5}$$

Ainsi les inconnues du problèmes sont :

- les nombres ℓ_{ik}, pour tout $i \in [\![1,n]\!]$ et pour tout $k < i$.
- les nombres u_{kj}, pour tout $j \in [\![1,n]\!]$ et pour tout $k \leqslant j$.

Comme $\mathbb{A} = \mathbb{L}\mathbb{U}$, et en utilisant (4) et (5),

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2, a_{ij} = \sum_{k=1}^{n} \ell_{ik} u_{kj} = \sum_{k=1}^{\min(i,j)} \ell_{ik} u_{kj}. \tag{6}$$

De plus, comme $\mathbb{A}$ est inversible, on a $\det(\mathbb{A}) \neq 0$, et ainsi l'égalité $\mathbb{A} = \mathbb{L}\mathbb{U}$ implique que $\det(\mathbb{L})\det(\mathbb{U}) \neq 0$ donc $\mathbb{U}$ est inversible. Or $\det(\mathbb{U}) = \prod_{j=1}^{n} u_{jj}$ (car $\mathbb{U}$ est triangulaire supérieure), donc

$$u_{jj} \neq 0, \quad \forall j \in [\![1,n]\!]. \tag{7}$$

La question est donc la suivante : comment utiliser la formule (6) pour touver un algorithme de calcul des inconnues ℓ_{ik} ($i \in [\![1,n]\!]$, $k < i$) et u_{kj} ($j \in [\![1,n]\!]$, $k \leqslant j$) ? Pour déterminer ces coefficients, nous allons utiliser une identification des coefficients de $\mathbb{A} = \mathbb{L}\mathbb{U}$ **ligne par ligne** :

Étape 1 : identification de la première ligne de $\mathbb{A} = \mathbb{L}\mathbb{U}$

Nous allons voir que cette étape va nous permettre de calculer la première ligne de $\mathbb{U}$ (i.e les coefficient u_{1j} pour tout $j \in [\![1,n]\!]$) et la première ligne de $\mathbb{L}$ (il n'y a en fait rien à calculer puisque $\ell_{11} = 1$ et $\ell_{1k} = 0$ sinon).

L'equation (6) pour $i = 1$ donne

$$a_{1j} = \sum_{k=1}^{1} \ell_{1k} u_{kj} = \ell_{11} u_{1j} = u_{1j}$$

car $\min(1,j) = 1$ et $\ell_{11} = 1$. Ainsi, pour tout $j \in [\![1,n]\!]$,

$$u_{1j} = a_{1j} \tag{8}$$

ce qui nous permet de calculer la première ligne de $\mathbb{U}$. A l'issue de cette première étape, la première ligne de $\mathbb{L}$ et la première ligne de $\mathbb{U}$ sont intégralement déterminées.

Étape 2 : identification de la deuxième ligne de $\mathbb{A} = \mathbb{L}\mathbb{U}$

Nous allons voir que cette étape va nous permettre de calculer la deuxième ligne de $\mathbb{L}$ (i.e, le coefficient ℓ_{21}) **puis** la deuxième ligne de $\mathbb{U}$ (i.e les coefficient u_{2j} pour tout $j \geqslant 2$).

L'equation (6) pour $i = 2$ donne

$$a_{2j} = \sum_{k=1}^{\min(2,j)} \ell_{2k} u_{kj} \tag{9}$$

Nous discutons deux cas, suivant la valeur de $\min(2,j)$:

a- $j < 2$ ($\min(2,j) = j$) : dans ce cas, $j = 1$, et on a $a_{21} = \ell_{21} u_{11}$. Comme u_{11} a été calculé à la première étape, et $u_{11} \neq 0$ d'après (7), on en déduit que

$$\ell_{21} = \frac{a_{21}}{u_{11}} \tag{10}$$

si bien que la deuxième ligne de $\mathbb{L}$ est maintenant déterminée.

b- $j \geqslant 2$ ($\min(2,j) = 2$) : la formule (9) devient $a_{2j} = \ell_{21} u_{1j} + \ell_{22} u_{2j}$, ou encore, puisque $\ell_{22} = 1$, pour tout $j \in [\![2,n]\!]$,

$$u_{2j} = a_{2j} - \ell_{21} u_{1j}. \tag{11}$$

Le terme de droite de l'equation précédente est connu intégralement : ℓ_{21} a été calculé lors de l'étape 2-a ((10)) et les termes u_{1j}, $j \geqslant 2$, sont connus depuis l'étape 1. La seconde ligne de $\mathbb{U}$ est maintenant complètement déterminée.

Remarque. *Dans le processus d'identification ci dessus, il n'est pas possible d'intervertir les étapes 2-a et 2-b.*

Étape i : identification de la ligne i de $\mathbb{A} = \mathbb{L}\mathbb{U}$

Dans cette étape, nous allons calculer la ligne i de $\mathbb{L}$ (i.e, le coefficient ℓ_{ij}, $j < i$) (Étape i-a) **puis** la ligne i de $\mathbb{U}$ (i.e les coefficient u_{ij} pour tout $j \geqslant i$) (Étape i-b)).

Nous faisons l'hypothèse que les étapes précédentes (étapes k pour $k < i$) ont permis de calculer les $i - 1$ premières lignes de $\mathbb{L}$ et les $i - 1$ premières lignes de $\mathbb{U}$. On rappelle que l'equation (6) donne

$$a_{ij} = \sum_{k=1}^{\min(i,j)} \ell_{ik} u_{kj}. \tag{12}$$

Nous discutons deux cas, suivant la valeur de $\min(i, j)$:

a- $j < i$ ($\min(i, j) = j$) : L'équation (12) devient

$$a_{ij} = \sum_{k=1}^{j} \ell_{ik} u_{kj}. \tag{13}$$

On remarque que, comme $k \leqslant j < i$, les nombres u_{kj} sont connus. Pour $j = 1$, nous obtenons alors $a_{i1} = \ell_{i1}u_{11}$ ce qui nous permet de déterminer ℓ_{i1} par la formule

$$\ell_{i1} = \frac{a_{i1}}{u_{11}}$$

ℓ_{i1} étant déterminé, nous allons pouvoir déterminer ℓ_{i2}. En effet, l'équation (13) pour $j = 2$ donne

$$a_{i2} = \ell_{i1}u_{12} + \ell_{i2}u_{22}$$

Puisque les termes u_{12} et u_{22} ont été calculés lors d'étapes précédentes et que ℓ_{i1} vient d'être calculé, la seule inconnue de l'équation précédente est ℓ_{i2}. On obtient alors (puisque $\mathbb{A}$ est inversible et $\mathbb{A} = \mathbb{L}\mathbb{U}$, $u_{22} \neq 0$)

$$\ell_{i2} = \frac{a_{i2} - \ell_{i1}u_{12}}{u_{22}}.$$

On peut ainsi continuer à déterminer ℓ_{ij} de proche en proche pour tout $j < i$. En effet, supposons ℓ_{ik} connu pour tout $k \leqslant j - 1$. D'après (7) on a $u_{jj} \neq 0$, $\forall j \in [\![1, n]\!]$. On peut donc réécrire l'équation (13) comme

$$\ell_{ij} = \frac{a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} \ell_{ik} u_{kj}}{u_{jj}} \quad (\forall j \leqslant i - 1). \tag{14}$$

Le terme de droite de l'équation précédente est connu : en effet u_{kj} est connu pour tout $k < i$ (donc en particulier pour $k \leqslant j$). De même, les termes ℓ_{ik} sont connus, par conqéquent ℓ_{ij} est déterminé.
A l'issue de cette étape i-a, les coefficients ℓ_{ij} pour $j < i$ sont déterminés.

b- $j \geqslant i$ ($\min(i, j) = i$) : l'équation L'équation (12) devient

$$a_{ij} = \sum_{k=1}^{i} \ell_{ik} u_{kj} = \sum_{k=1}^{i-1} \ell_{ik} u_{kj} + \ell_{ii} u_{ij}, \tag{15}$$

qui, comme $\ell_{ii} = 1$ donne

$$u_{ij} = a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} \ell_{ik} u_{kj} \quad (\forall j \geqslant i). \tag{16}$$

Puisque les coefficients u_{kj} pour $k \leqslant i - 1$ ont été déterminés lors des étapes précédentes et que les coefficients ℓ_{ik} ($k \geqslant i$) sont connus depuis l'étape i-a, le terme de droite de (16) est connu et l'équation (16) permet de construire u_{ij} pour tout $j \geqslant i$.

Algorithm 1 Fonction FactLU : Calcule (en identifiant par lignes) les matrices $\mathbb{L}$ et $\mathbb{U}$ de la factorisation $\mathbb{L}\mathbb{U}$ d'une matrice $\mathbb{A}$

Données : $\mathbb{A}$: matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ inversible et admettant une factorisation $\mathbb{L}\mathbb{U}$
Résultat : $\mathbb{L}$: matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ triangulaire inférieure à diagonale unité
$\mathbb{U}$: matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ trianguaire supérieure inversible

1: **Fonction** $[\mathbb{L}, \mathbb{U}] \leftarrow \text{FactLU}(\mathbb{A})$

$n \leftarrow size(\mathbb{A}, 1)$
$\mathbb{L} \leftarrow \mathbb{I}_n$ ▷ matrice identité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$
$\mathbb{U} \leftarrow \mathbb{O}_n$ ▷ matrice nulle de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$
Pour $i \leftarrow 1$ **à** n **faire**
  Pour $j \leftarrow 1$ **à** $i-1$ **faire** ▷ Calcul de la ligne i de $\mathbb{L}$ ($\ell_{ij},\ j < i$) (formule (14))
    $\mathbb{L}(i,j) \leftarrow \mathbb{A}(i,j)$
    Pour $k \leftarrow 1$ **à** $j-1$ **faire**
      $\mathbb{L}(i,j) \leftarrow \mathbb{L}(i,j) - \mathbb{L}(i,k) * \mathbb{U}(k,j)$
    fin Pour
    $\mathbb{L}(i,j) \leftarrow \mathbb{L}(i,j)/\mathbb{U}(j,j)$
  fin Pour
  Pour $j \leftarrow i$ **à** n **faire** ▷ Calcul de la ligne i de $\mathbb{U}$ ($u_{ij},\ j \geqslant i$) (formule (16))
    $\mathbb{U}(i,j) \leftarrow \mathbb{A}(i,j)$
    Pour $k \leftarrow 1$ **à** $i-1$ **faire**
      $\mathbb{U}(i,j) \leftarrow \mathbb{U}(i,j) - \mathbb{L}(i,k) * \mathbb{U}(k,j)$
    fin Pour
  fin Pour
fin Pour
fin Fonction

Remarque.

1. *Une autre méthode est proposée en cours, pour calculer $\mathbb{L}$ et $\mathbb{U}$. Elle consiste à calculer, à chaque étape i, la i-ème ligne de $\mathbb{U}$ et la i-ème colonne de $\mathbb{L}$.*
2. *Dans le processus d'identification de l'étape i-a, il n'est pas possible d'intervertir les sous étapes : dans l'égalité (14), il faut connaitre ℓ_{ik} pour $k \leqslant j-1$ pour pouvoir calculer ℓ_{ij}. Il faut donc commencer par calculer ℓ_{i1}, puis ℓ_{i2} et ainsi de suite jusqu à $\ell_{i,i-1}$. Par contre, la définition (16) de u_{ij} ne fait pas appel à u_{ik} pour $k \leqslant j-1$. Les calculs (16) peuvent donc être effectués en parallèle.*
3. *On aurait aussi pu identifier les équations (6) colonne par colonne.*