Exercice 1. Soit $0 < \alpha < 1$. Montrer qu'il existe une fonction $f \in C^{0,\alpha}(\mathbb{T})$ telle que

$$\sup_{N\to\infty} \|S_N f\|_{C^{0,\alpha}} = \infty.$$

(Indication : Vous pourrez commencer par construire une suite de polynômes trigonométriques g_k telle que $\|g_k\|_{L^\infty} \leq 1$, $\widehat{g_k}(n) = 0$ pour tout $k \in \mathbb{N}$ et $n < 0$, et $\lim_{k\to\infty} \sup_N \|S_N g_k\|_{L^\infty} = \infty$. Si vous ne vous souvenez pas comment en construire une, admettez s'il vous plaît que c'est possible. Ensuite, vous pourrez définir $f(x) := \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-\alpha j_k} \exp(2\pi i \times 3 \times 2^{j_k-1}x) g_k(x)$, pour une suite (j_k) bien choisie.)

Exercice 2. Le but de l'exercice est de démontrer le résultat suivant.

Théorème. Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ une suite de nombres complexes. Il existe une mesure de probabilité μ sur $\mathbb{T}$ telle que $a_n = \widehat{\mu}(n)$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$ si, et seulement si, (a_n) vérifie les trois conditions suivantes :

(C1) $a_0 = 1$,

(C2) $a_{-n} = \overline{a_n}$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$,

(C3) $\sum_{n,k\in\mathbb{Z}} a_{n-k} z_n \overline{z_k} \geq 0$ pour toute suite de nombres complexes (z_n) qui ne contient qu'un nombre fini de termes non nuls.

Démonstration.

(i) Montrer que $a_n = \widehat{\mu}(n)$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$ implique (C1), (C2) et (C3). (Indication : Utiliser la définition de la transformée de Fourier d'une mesure. Pour montrer (C3), transformer l'expression pour obtenir l'intégrale d'une fonction positive.)

(ii) Jusqu'à la fin de l'exercice, on suppose que les conditions (C1), (C2) et (C3) sont vérifiées, et on essaie de montrer qu'il existe une mesure de probabilité μ telle que $a_n = \widehat{\mu}(n)$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$.

(iii) Montrer que $|a_n| \leq 1$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$. (Indication : Poser $z_0 = -|a_n|$, $z_n = \overline{a_n}$ et $z_m = 0$ pour $m \notin \{0, n\}$.)

(iv) Montrer que pour toute suite $(z_n) \in l^1(\mathbb{Z})$ la somme $\sum_{n,k\in\mathbb{Z}} a_{n-k} z_n \overline{z_k} \geq 0$ converge absolument vers un nombre positif.

(v) Fixons $0 < r < 1$. Posons $b_n := \mathcal{F}(\sqrt{P_r})(n)$. Est-ce que $(b_n) \in l^1(\mathbb{Z})$?

(vi) Montrer que $b_{-n} = \overline{b_n}$ et que pour tout $n \in \mathbb{Z}$ on a $\sum_{k\in\mathbb{Z}} b_k b_{n-k} = r^{|n|}$.

(vii) Fixons $\theta \in \mathbb{T}$ et soit $z_n := b_n \mathrm{e}^{2\pi i n\theta}$ pour $n \in \mathbb{Z}$. Montrer que

$$0 \leq \sum_{k,n\in\mathbb{Z}} a_{n-k} z_n \overline{z_k} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n r^{|n|} \mathrm{e}^{2\pi i n\theta}.$$

(viii) Pour tout $z \in \mathbb{D}$ posons $F(z) := \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n r^{|n|} \mathrm{e}^{2\pi i n\theta}$, où $z = r\mathrm{e}^{2\pi i\theta}$. En utilisant des résultats du cours montrer qu'il existe une mesure de probabilité μ telle que $F_r = P_r * \mu$ pour tout $0 < r < 1$. Conclure.

Solution de l'Execice 1.
1. Comme $\lim_{N\to\infty}\|D_N\|_{L^1}=\infty$, on sait qu'il existe une suite (f_k) de polynômes trigonométriques telle que $\|f_k\|_{L^\infty}\leq 1$ et $\|S_{N_k}f_k\|_{L^\infty}\geq 2k$. Soit M_k tel que $\widehat{f_k}(n)=0$ pour $|n|>M_k$ et posons $g_k(x):=\mathrm{e}^{2\pi iM_kx}f_k(x)$. Bien sûr, $\|g_k\|_{L^\infty}=\|f_k\|_{L^\infty}\leq 1$. On remarque aussi que $\widehat{g}_k(n)=0$ si $n<0$ ou $n>2M_k$. On observe que

$$\begin{aligned}(S_{N_k}f_k)(x)&=\sum_{n=-M_k}^{N_k}\widehat{f_k}(n)\mathrm{e}^{2\pi inx}-\sum_{n=-M_k}^{-N_k-1}\widehat{f_k}(n)\mathrm{e}^{2\pi inx}\\&=\sum_{n=-M_k}^{N_k}\widehat{g_k}(M_k+n)\mathrm{e}^{2\pi inx}-\sum_{n=-M_k}^{-N_k-1}\widehat{g_k}(M_k+n)\mathrm{e}^{2\pi inx}\\&=\mathrm{e}^{-2\pi iM_kx}\big((S_{M_k+N_k}g_k)(x)-(S_{M_k-N_k-1}g_k)(x)\big).\end{aligned}$$

On en déduit que $\|S_{M_k+N_k}g_k\|_{L^\infty}\geq k$ ou $\|S_{M_k-N_k-1}g_k\|_{L^\infty}\geq k$, en tout cas il existe $L_k\in\mathbb{N}$ tel que $\|S_{L_k}g_k\|_{L^\infty}\geq k$.
2. Soit $j_1<j_2<\ldots$ une suite telle que $3\times 2^{j_k-1}+2M_k\leq 2^{j_k+1}$, et posons $f(x):=\sum_{k=1}^\infty 2^{-\alpha j_k}\exp(2\pi i\times 3\times 2^{j_k-1}x)g_k(x)$. La série converge uniformément, définit donc bien une fonction continue. Si $j=j_k\in\mathbb{N}$, alors $(P_jf)(x)=2^{-\alpha j}\exp(2\pi i\times 3\times 2^{j-1}x)g_k(x)$, donc $\|P_jf\|_{L^\infty}\leq 2^{-\alpha j}\|g_k\|_{L^\infty}\leq 2^{-\alpha j}$. Si $j\neq j_k$ pour tout k, alors $P_jf=0$. On obtient donc $\sup_j 2^{\alpha j}\|P_jf\|_{L^\infty}\leq 1$, ce qui implique $f\in C^{0,\alpha}(\mathbb{T})$.
3. Soit $k\in\{1,2,\ldots\}$ et $N:=3\times 2^{j_k-1}+L_k$. On observe que

$$(P_{j_k}S_Nf)(x)=2^{-\alpha j_k}\exp(2\pi i\times 3\times 2^{j_k-1}x)(S_{L_k}g_k)(x),$$

donc $\|P_{j_k}S_Nf\|_{L^\infty}=2^{-\alpha j_k}\|S_{L_k}g_k\|_{L^\infty}\geq k\times 2^{-\alpha j_k}$, en particulier $\sup_j 2^{\alpha j}\|P_jS_Nf\|_{L^\infty}\geq k$, d'où on conclut que $\|S_Nf\|_{C^{0,\alpha}}\geq\frac{1}{C}k$, pour une constante $C>0$ qui dépend uniquement de α. Cela montre bien que $\sup_{N\in\mathbb{N}}\|S_Nf\|_{C^{0,\alpha}}=\infty$.

Solution de l'Execice 2.

1.Soit $\mu \in \mathcal{M}(\mathbb{T})$ une mesure de probabilité (donc $\mu \geq 0$ et $\mu(\mathbb{T}) = 1$), et soit $a_n := \widehat{\mu}(n)$ pour $n \in \mathbb{N}$. On a $a_0 = \widehat{\mu}(0) = \int_0^1 \mu(\mathrm{d}\theta) = 1$ et $a_{-n} = \int_0^1 \mathrm{e}^{2\pi in\theta}\mu(\mathrm{d}\theta) = \int_0^1 \overline{\mathrm{e}^{-2\pi in\theta}}\mu(\mathrm{d}\theta) = \overline{\int_0^1 \mathrm{e}^{-2\pi in\theta}\mu(\mathrm{d}\theta)} = \overline{a_n}$, donc les conditions (C1) et (C2). Soit $(z_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ une suite de nombres complexes où tous les termes sauf un nombres fini valent 0. Pour vérifier (C3) on écrit

$$\begin{aligned}\sum_{n,k\in\mathbb{Z}} a_{n-k}z_n\overline{z_k} &= \sum_{n,k\in\mathbb{Z}} \int_0^1 \mathrm{e}^{-2\pi i(n-k)\theta}\mu(\mathrm{d}\theta)z_n\overline{z_k} \\ &= \int_0^1 \Big(\sum_{n,k\in\mathbb{Z}} \mathrm{e}^{-2\pi i(n-k)\theta} z_n\overline{z_k}\Big)\mu(\,\mathrm{d}\theta) \\ &= \int_0^1 \Big(\sum_{n,k\in\mathbb{Z}} \mathrm{e}^{-2\pi in\theta} z_n\overline{\mathrm{e}^{-2\pi ik\theta} z_k}\Big)\mu(\,\mathrm{d}\theta) \\ &= \int_0^1 \Big| \sum_n \mathrm{e}^{-2\pi in\theta} z_n\Big|^2 \mu(\,\mathrm{d}\theta) \geq 0.\end{aligned}$$

2. On fixe $n \in \mathbb{Z}$. Les conditions (C1), (C2) et (C3) avec $z_0 = -|a_n|$, $z_n = \overline{a_n}$ et $z_m = 0$ pour $m \notin \{0, n\}$ donnent

$$0 \leq a_0z_0\overline{z_0} + a_nz_n\overline{z_0} + a_{-n}z_0\overline{z_n} + a_0z_n\overline{z_n} = |a_n|^2 - |a_n|^3 - |a_n|^3 + |a_n|^2,$$

donc $|a_n|^3 \leq |a_n|^2$, ce qui implique $|a_n| \leq 1$.

3. Comme $|a_n| \leq 1$ pour tout n, on obtient $\sum_{n,k\in\mathbb{Z}} |a_{n-k}z_n\overline{z_k}| \leq \big(\sum_{n\in\mathbb{Z}} |z_n|\big)^2$. Si $(z_n) \in l^1(\mathbb{Z})$, cela implique $\lim_{N\to\infty} \sum_{|n|,|k|>N} a_{n-k}z_n\overline{z_k} = 0$. La condition (C3) implique $\sum_{|n|,|k|\leq N} a_{n-k}z_n\overline{z_k} \geq 0$ pour tout N, donc en passant à la limite on a $\sum_{n,k\in\mathbb{Z}} a_{n-k}z_n\overline{z_k} \geq 0$.

4. L'idée du reste de la preuve est de montrer, en choisissant convenablement la suite (z_n), que $\sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n r^{|n|}\mathrm{e}^{2\pi in\theta} \geq 0$ pour tout $0 < r < 1$ et $\theta \in \mathbb{T}$, et conclure en utilisant des propriétés des fonctions harmoniques sur le disque.

Fixons $0 < r < 1$. Le noyau de Poisson P_r est une fonction lisse et strictement positive, donc $\sqrt{P_r}$ aussi. La suite $b_n := \widehat{\sqrt{P_r}}(n)$ décroit donc plus vite que l'inverse de tout polynôme, en particulier appartient à $l^1(\mathbb{Z})$. On peut donc écrire

$$\sqrt{P_r}(\theta) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} b_n\mathrm{e}^{2\pi in\theta}, \qquad \text{pour tout } \theta \in \mathbb{T},$$

où la somme converge uniformément. Il est clair que $b_{-n} = \overline{b_n}$, car $\sqrt{P_r}$ est une fonction à valeurs réelles. On a aussi

$$\begin{aligned}P_r(\theta) &= \Big(\sum_{n\in\mathbb{Z}} b_n\mathrm{e}^{2\pi in\theta}\Big)^2 = \Big(\sum_{n\in\mathbb{Z}} b_n\mathrm{e}^{2\pi in\theta}\Big)\Big(\sum_{k\in\mathbb{Z}} b_k\mathrm{e}^{2\pi ik\theta}\Big) \\ &= \sum_{n,k\in\mathbb{Z}} b_nb_k\mathrm{e}^{2\pi i(n+k)\theta} = \sum_{n,k\in\mathbb{Z}} b_{n-k}b_k\mathrm{e}^{2\pi in\theta} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \Big(\sum_{k\in\mathbb{Z}} b_{n-k}b_k\Big)\mathrm{e}^{2\pi in\theta}\end{aligned}$$

(toutes les sommes convergent absolument). Cela implique $\sum_{k\in\mathbb{Z}} b_{n-k}b_k = \widehat{P_r}(n) = r^{|n|}$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$.

5. Fixons $\theta \in \mathbb{T}$ et posons $z_n := b_n \mathrm{e}^{2\pi i n\theta}$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$. On a

$$\begin{aligned}\sum_{k,n\in\mathbb{Z}} a_{n-k} z_n \overline{z_k} &= \sum_{k,n\in\mathbb{Z}} a_{n-k} b_n \mathrm{e}^{2\pi i n\theta} b_{-k} \mathrm{e}^{-2\pi i k\theta} \\ &= \sum_{k,n\in\mathbb{Z}} a_n b_{n+k} \mathrm{e}^{2\pi i (n+k)\theta} b_{-k} \mathrm{e}^{-2\pi i k\theta} \\ &= \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n \mathrm{e}^{2\pi i n\theta} \sum_{k\in\mathbb{Z}} b_{n+k} b_{-k} \\ &= \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n \mathrm{e}^{2\pi i n\theta} \sum_{k\in\mathbb{Z}} b_{n-k} b_k = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n \mathrm{e}^{2\pi i n\theta} r^{|n|}.\end{aligned}$$

On a montré dans **3.** que le membre de gauche était positif, donc on obtient $\sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n r^{|n|} \mathrm{e}^{2\pi i n\theta} \geq 0$ pour tout $0 < r < 1$ et $\theta \in \mathbb{T}$.

6. Soit $F(z) := \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n r^{|n|} \mathrm{e}^{2\pi i n\theta}$. C'est une fonction harmonique sur $\mathbb{D}$, et on vient de montrer qu'elle prend uniquement des valeurs réelles positives. Par l'égalité de la moyenne, pour tout $0 < r < 1$

$$\|F_r\|_{L^1} = \int_0^1 |F_r(\theta)| \,\mathrm{d}\theta = \int_0^1 F_r(\theta) \,\mathrm{d}\theta = F(0) = a_0 = 1,$$

donc $F \in h^1(\mathbb{D})$, et sa norme vaut 1. Soit μ la mesure correspondante, $F_r = P_r * \mu$ pour tout $0 < r < 1$. Comme limite faible-* d'une suite de fonctions réelles positives, c'est une mesure positive, et $\|\mu\|_{\mathcal{M}}$ vaut 1 (la norme de F dans l'espace $h^1(\mathbb{D})$). C'est donc une mesure de probabilité. Prenons n'importe quel $0 < r < 1$. On sait que $\widehat{F_r}(n) = \widehat{P_r}(n)\widehat{\mu}(n) = r^{|n|}\widehat{\mu}(n)$. D'un autre côté, par la définition de F on a $\widehat{F_r}(n) = a_n r^{|n|}$, et on conclut que $a_n = \widehat{\mu}(n)$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$, ce qu'il fallait démontrer.