Exercice 1. Soit $0 < \alpha < 1$. Montrer qu'il existe une fonction $f \in C^{0,\alpha}(\mathbb{T})$ telle que

$$\sup_{N\to\infty} \|S_N f\|_{C^{0,\alpha}} = \infty.$$

(Indication : Vous pourrez commencer par construire une suite de polynômes trigonométriques g_k telle que $\|g_k\|_{L^\infty} \le 1$, $\widehat{g_k}(n) = 0$ pour tout $k \in \mathbb{N}$ et $n < 0$, et $\lim_{k\to\infty} \sup_N \|S_N g_k\|_{L^\infty} = \infty$. Si vous ne vous souvenez pas comment en construire une, admettez s'il vous plaît que c'est possible. Ensuite, vous pourrez définir $f(x) := \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-\alpha j_k} \exp(2\pi i \times 3 \times 2^{j_k-1} x) g_k(x)$, pour une suite (j_k) bien choisie.)

Exercice 2. Le but de l'exercice est de démontrer le résultat suivant.
Théorème. Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ une suite de nombres complexes. Il existe une mesure de probabilité μ sur $\mathbb{T}$ telle que $a_n = \widehat{\mu}(n)$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$ si, et seulement si, (a_n) vérifie les trois conditions suivantes :

(C1) $a_0 = 1$,

(C2) $a_{-n} = \overline{a_n}$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$,

(C3) $\sum_{n,k\in\mathbb{Z}} a_{n-k} z_n \overline{z_k} \ge 0$ pour toute suite de nombres complexes (z_n) qui ne contient qu'un nombre fini de termes non nuls.

Démonstration.

(i) Montrer que $a_n = \widehat{\mu}(n)$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$ implique (C1), (C2) et (C3). (Indication : Utiliser la définition de la transformée de Fourier d'une mesure. Pour montrer (C3), transformer l'expression pour obtenir l'intégrale d'une fonction positive.)

(ii) Jusqu'à la fin de l'exercice, on suppose que les conditions (C1), (C2) et (C3) sont vérifiées, et on essaie de montrer qu'il existe une mesure de probabilité μ telle que $a_n = \widehat{\mu}(n)$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$.

(iii) Montrer que $|a_n| \le 1$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$. (Indication : Poser $z_0 = -|a_n|$, $z_n = \overline{a_n}$ et $z_m = 0$ pour $m \notin \{0, n\}$.)

(iv) Montrer que pour toute suite $(z_n) \in l^1(\mathbb{Z})$ la somme $\sum_{n,k\in\mathbb{Z}} a_{n-k} z_n \overline{z_k} \ge 0$ converge absolument vers un nombre positif.

(v) Fixons $0 < r < 1$. Posons $b_n := \mathcal{F}(\sqrt{P_r})(n)$. Est-ce que $(b_n) \in l^1(\mathbb{Z})$?

(vi) Montrer que $b_{-n} = \overline{b_n}$ et que pour tout $n \in \mathbb{Z}$ on a $\sum_{k\in\mathbb{Z}} b_k b_{n-k} = r^{|n|}$.

(vii) Fixons $\theta \in \mathbb{T}$ et soit $z_n := b_n e^{2\pi i n\theta}$ pour $n \in \mathbb{Z}$. Montrer que

$$0 \le \sum_{k,n\in\mathbb{Z}} a_{n-k} z_n \overline{z_k} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n r^{|n|} e^{2\pi i n\theta}.$$

(viii) Pour tout $z \in \mathbb{D}$ posons $F(z) := \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n r^{|n|} e^{2\pi i n\theta}$, où $z = re^{2\pi i\theta}$. En utilisant des résultats du cours montrer qu'il existe une mesure de probabilité μ telle que $F_r = P_r * \mu$ pour tout $0 < r < 1$. Conclure.