Solution de l'exercice 2.3. page 1

(i) Pour $l \in \{1, 2, 3, \dots\}$ soit N_l tq $\|D_{N_l}\|_{L^1} \geq 4 \times 5^l$.

Il existe donc une fonction continue $h_l \in C(\mathbb{T})$ telle que

$$\|h_l\|_{L^\infty} \leqslant \frac{9}{10} \quad \text{et}$$

$$|(S_{N_l} h_l)(0)| = \left| \int_0^1 D_{N_l}(x)\, h_l(-x)\, dx \right| \geq \frac{7}{2} \times 5^l$$

(on utilise ici le fait que $\frac{9}{10} \times 4 > \frac{7}{2}$).

Par la densité des polynômes trigonométrique dans $C(\mathbb{T})$, il existe un polynôme trigonométrique f_l tel que

$$\|f_l\|_{L^\infty} \leqslant 1 \quad \text{et} \quad |(S_{N_l} f_l)(0)| \geq 3 \times 5^l.$$

(ii) Soit f_l le polynôme construit dans (i).

Soit $K_l \geq 0$ tq $\hat{f}_l(n) = 0$ si $n < -K_l$ ou $n > K_l$.

Soit $h_1(x) := \sum_{n=-K_l}^{N_l - 1} \hat{f}_l(n)\, e^{2\pi i n x}$,

$h_2(x) := \sum_{n=N_l+1}^{K_l} \hat{f}_l(n)\, e^{2\pi i n x}$.

On a $|h_1(0) + (S_{N_l} f)(0) + h_2(0)| = |f(0)| \leqslant 1$,

donc $|h_1(0)| \geq 5^l$ ou $|h_2(0)| \geq 5^l$.

- Supposons d'abord que $|h_1(0)| \geq 5^l$.

On pose $g_l(x) := e^{2\pi i K_l x} f_l(x)$,

On a alors $\|g_l\|_{L^\infty} = \|f_l\|_{L^\infty} \leqslant 1$ et

$$|(S_{\tilde{N}_l} g_l)(0)| = |h_1(0)| \geq 5^l, \text{ où } \tilde{N}_l := K_l - N_l - 1$$

Il est clair que $\hat{g}_l(n) = 0$ si $n < 0$.

- Supposons maintenant que $|h_2(0)| \geq 5^l$.

On pose $g_l(x) := e^{2\pi i K_l x}\, \overline{f_l(x)}$. On a $\|g_l\|_{L^\infty} \leqslant 1$ et

$$|(S_{\tilde{N}_l} g_l)(0)| = |\overline{h_2(0)}| = |h_2(0)| \geq 5^l$$

Solution de l'exercice 2.3, page 2

Dans (i) et (ii) il peut arriver que

$$|(S_{N_L} f_L)(0)| \neq \|S_{N_L} f_L\|_{L^\infty}$$

ou $|(S_{\tilde N_L} g_L)(0)| \neq \|S_{\tilde N_L} g_L\|_{L^\infty}$,

mais dans ce cas-là c'est "encore mieux" :

par exemple, si $|(S_{N_L} f_L)(\theta)| = \|S_{N_L} f_L\|_{L^\infty} > |(S_{N_L} f_L)(0)| \geq 3\times 5^L$,

alors il suffit de considérer une translation de f_L par $-\theta$. Comme S_{N_L} est un multiplicateur de Fourier, on a

$$|(S_{N_L}(\tau_{\theta} f_L))(0)| = |(\tau_{-\theta}(S_{N_L} f_L))(0)|$$
$$= |(S_{N_L} f_L)(\theta)| = \|S_{N_L} f_L\|_{L^\infty} = \|S_{N_L}(\tau_{-\theta} f_L)\|_{L^\infty}.$$

(iii) On voit que $\hat{g}_L(n) = 0$ si $n < 0$ ou $n > 2K_L$.

On pose $M_L := \sum_{k=1}^{L-1} (2K_k + 1)$,

ce qui implique que les supports de Fourier des fonctions $e(M_L x) g_L(x)$ sont disjoints.

Pour $N = M_L + \tilde{N}_L$ on trouve

$$(S_N f)(0) = \sum_{k=1}^{L-1} 2^{-k} g_k(0) + 2^{-L}(S_{\tilde N_L} g_L)(0)$$
$$\geq \left(\frac{5}{2}\right)^L - 1 \longrightarrow \infty \quad \text{quand } L \to \infty.$$

Rqe La série qui définit f converge uniformément, donc $f \in C(\mathbb{T})$ et on peut calculer $\hat{f}(n)$ terme par terme, càd

$$\hat{f}(n) = \sum_{L=1}^{\infty} 2^{-L} \hat{g}_L(n - M_L),$$

et dans la dernière somme il y a au plus un terme non nul.