Solution de l'exercice 3.5

(i) Il faut montrer que

$$\frac{1-r^2}{1-2r\cos(2\pi(\phi-\psi))+r^2} \leqslant A\,\frac{1-r^2}{1-2r\cos(2\pi\phi)+r^2}$$

$$\Leftrightarrow \quad 1-2r\cos(2\pi\phi)+r^2 \leqslant A\big(1-2r\cos(2\pi(\phi-\psi))+r^2\big)$$

$$\Leftrightarrow \quad (1-r)^2+2r(1-\cos(2\pi\phi)) \leqslant A(1-r)^2+2Ar\big(1-\cos(2\pi(\phi-\psi))\big)$$

$$(*) \Leftrightarrow \quad 2r(1-\cos(2\pi\phi)) \leqslant (A-1)(1-r)^2+2Ar\big(1-\cos(2\pi(\phi-\psi))\big).$$

Sans perdre la généralité supposons $-\frac{1}{2}\leqslant\phi\leqslant\frac{1}{2}$ et $-\frac{1}{2}\leqslant\psi\leqslant\frac{1}{2}$.

Si $|\psi|\geqslant\frac{1}{4}$, alors $\alpha(1-r)\geqslant\frac{1}{4} \Rightarrow (1-r)^2>\frac{1}{16\alpha^2}$.

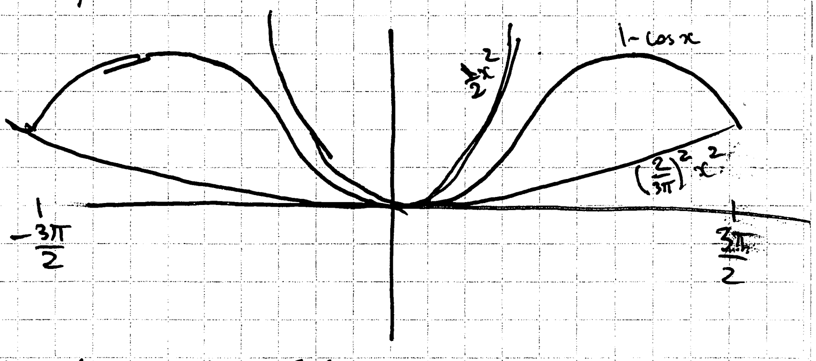
Il suffit dans ce cas de prendre $A-1\geqslant 32\alpha^2$.

On peut donc supposer $|\psi|<\frac{1}{4}$, donc

$$-\frac{3}{4}\leqslant\phi-\psi\leqslant\frac{3}{4} \Rightarrow -\frac{3}{2}\pi\leqslant 2\pi(\phi-\psi)\leqslant\frac{3}{2}\pi.$$

Il est facile de vérifier que $1-\cos x\geqslant\left(\frac{2}{3\pi}\right)^2x^2$ pour $|x|\leqslant\frac{3}{2}\pi$

Il est ~~connu~~ bien connu que $1-\cos x\leqslant\frac{1}{2}x^2$ pour tout $x\in\mathbb{R}$.



Pour montrer $(*)$ il suffit donc de vérifier que

$$2r\times\frac{1}{2}(2\pi\phi)^2\leqslant(A-1)(1-r)^2+2Ar\left(\frac{2}{3\pi}\right)^2(2\pi(\phi-\psi))^2$$

Cela résulte ~~[illegible]~~ du fait que

$$\phi^2\leqslant 2\big((\phi-\psi)^2+\psi^2\big) \quad \text{et} \quad |\psi|\leqslant\alpha(1-r).$$