Introduction à l'analyse harmonique

Jacek Jendrej, CNRS et université Paris 13

Cours introductif de niveau M2, septembre–octobre 2019

Table des matières

Chapitre 1

Introduction

1.1 Présentation du cours

1.2 Horaires

les jeudis 10h45–12h45 (cours), bâtiment SG, salle 2016
les vendredis 9h–11h (cours) et 11h–13h (TD), bâtiment Buffon, salle 127A

1.3 Examen

mercredi le 23 octobre, 12h45–15h45, bâtiment Halle aux farines, salle 478F (examen écrit)

1.4 Devoir à la maison

Il y a des exercices à la fin de chaque chapitre.

1.5 Notes de cours

Mises à jour au fur et à mesure de l'avancement du cours. Je vous serais reconnaissant si vous aviez la gentillesse de me signaler des erreurs, ainsi que des passages trop obscurs dans les preuves.

Chapitre 2

Convergence des séries de Fourier

2.1 Définition de la transformée de Fourier sur le cercle

Soit $\mathbb{T} := \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ le cercle et $\mathscr{M}(\mathbb{T})$ l'espace des mesures boréliennes complexes sur $\mathbb{T}$, avec la norme donnée par la variation totale. À toute fonction $f \in L^1(\mathbb{T})$ on associe la mesure $\mu \in \mathscr{M}$ donnée par $\mu(\mathrm{d}x) = f(x)\,\mathrm{d}x$. Par un abus de notation, on notera souvent cette mesure f.

Remarque 2.1. La notation $|y-x| \le \delta$ etc. pour $x, y \in \mathbb{T}$ fait référence à la distance sur le cercle, donc par exemple l'intervalle $\{|y-0.99| \le 0.1\}$ est égal à $[0.89, 1] \cup [0, 0.09]$.

Pour tout $\mu \in \mathscr{M}(\mathbb{T})$ on définit les *coefficients de Fourier* de μ par

$$\hat{\mu}(n) := \int_0^1 \mathrm{e}^{-2\pi i n x} \mu(\mathrm{d}x), \qquad \text{pour tout } n \in \mathbb{Z}.$$

On appelle la fonction $\hat{\mu} : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ la *transformée de Fourier* de μ. Dans le cas particulier $\mu(\mathrm{d}x) = f(x)\,\mathrm{d}x$ pour une certaine fonction intégrable $f : \mathbb{T} \to \mathbb{C}$, on a

$$\hat{f}(n) := \int_0^1 \mathrm{e}^{-2\pi i n x} f(x)\,\mathrm{d}x, \qquad \text{pour tout } n \in \mathbb{Z}.$$

On appelle $\hat{f}(n)$ les coefficients de Fourier de la fonction f et $\widehat{f} : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ sa transformée de Fourier. On appelle les indices n les *fréquences*. On écrit parfois $\mathscr{F}(\mu) := \hat{\mu}$, $\mathscr{F}(f) := \hat{f}$, $\mathscr{F}^{-1}(\widehat{\mu}) = \mu$, $\mathscr{F}^{-1}(\widehat{f}) = f$. On observe que $\mathscr{F}$ est un opérateur linéaire.

Exemple 2.2. Soit $a_n \in \mathbb{C}$ pour $n \in \mathbb{Z}$ et supposons qu'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $a_n = 0$ si $|n| > N$. Soit

$$f(x) := \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \mathrm{e}^{2\pi i n x} = \sum_{n=-N}^{N} a_n \mathrm{e}^{2\pi i n x}. \tag{2.1}$$

Alors pour tout $n \in \mathbb{Z}$

$$\hat{f}(n) = \int_0^1 \mathrm{e}^{-2\pi i n x} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \mathrm{e}^{-2\pi i n x} \sum_{k=-N}^{N} a_k \mathrm{e}^{2\pi i k x}\,\mathrm{d}x = \sum_{k=-N}^{N} a_k \int_0^1 \mathrm{e}^{2\pi i (k-n) x}\,\mathrm{d}x = a_n,$$

donc dans ce cas

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{f}(n) \mathrm{e}^{2\pi i n x}, \qquad \text{pour tout } x \in \mathbb{T}. \tag{2.2}$$

où dans la dernière somme il n'y a qu'un nombre fini de termes non nuls.

On appelle les fonctions de la forme (2.1) les *polynômes trigonométriques*. On a donc démontré l'identité (2.2) pour f étant un polynôme trignométrique. Il est naturel d'examiner la convergence de la somme dans (2.2), que l'on appelle la *série de Fourier* de f, pour des fonctions plus générales. C'est un des objectifs principaux de ce chapitre (et en partie du chapitre suivant).

2.2 Noyau de Dirichlet et noyau de Fejér

Soit $\mu \in \mathscr{M}(\mathbb{T})$ et $\hat{\mu}(n)$ ses coefficients de Fourier. Pour tout $N \in \mathbb{N}$, on calcule la somme partielle de sa série de Fourier $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{\mu}(n) \mathrm{e}^{2\pi i n x}$:

$$\begin{aligned}(S_N\mu)(x) = \sum_{n=-N}^{N} \hat{\mu}(n)\mathrm{e}^{2\pi i n x} &= \sum_{n=-N}^{N} \Big(\int_0^1 \mathrm{e}^{-2\pi i n y} \mu(\mathrm{d}y) \Big) \mathrm{e}^{2\pi i n x} \\ &= \int_0^1 \Big(\sum_{n=-N}^{N} \mathrm{e}^{2\pi i n (x-y)} \Big) \mu(\mathrm{d}y) = \int_0^1 D_N(x-y)\mu(\mathrm{d}y),\end{aligned}$$

où $D_N(x) := \sum_{n=-N}^{N} \mathrm{e}^{2\pi i n x}$ est le *noyau de Dirichlet*.

Proposition 2.3. *Le noyau de Dirichlet a les propriétés suivantes :*

— $D_N(x) = \frac{\sin((2N+1)\pi x)}{\sin(\pi x)}$ *si* $x \notin \mathbb{Z}$ *et* $D_N(x) = 2N+1$ *si* $x \in \mathbb{Z}$,

— $\int_0^1 D_N(x)\,\mathrm{d}x = 1$,

— *il existe une constante* $C > 0$ *telle que* $|D_N(x)| \leq C \min(N, |x|^{-1})$, *pour tout* $-\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{1}{2}$ *et* $N \in \mathbb{N}$,

— *il existe une constante* $C > 0$ *telle que* $C^{-1}(1 + \log N) \leq \|D_N\|_{L^1(\mathbb{T})} \leq C(1 + \log N)$ *pour tout* N,

— *en particulier, la suite* $S_N \delta_0$ *est non-bornée dans* $\mathscr{M}(\mathbb{T})$,

— $\widehat{D_N} = \chi_{\{n : |n| \leq N\}}$, *où* χ_A *est la fonction charactéristique de l'ensemble* A.

Démonstration. Exercice. □

On verra que la divergence de la norme L^1 du noyau de Dirichlet conduit à des comportements "pathologiques" des sommes $S_N f$. Rappelons le résultat suivant du cours d'analyse fonctionnelle.

Théorème 2.4 (Banach-Steinhaus)**.** *Soit* E *un espace de Banach,* F *un espace vectoriel et* $\{T_i\}_{i \in I}$, $T_i : E \to F$ *une famille d'applications linéaires continues. Si la famille* $\{T_i\}_{i\in I}$ *n'est pas bornée dans* $\mathscr{L}(E;F)$, *alors il existe un* G_δ *dense* $A \subset E$ *tel que* $\sup_{i \in I} \|T_i a\|_F = \infty$ *pour tout* $a \in A$.

Démonstration. Pour $k \in \{1, 2, \ldots\}$ posons

$$A_k := \bigcup_{i \in I} \{v \in E : \|T_i v\|_F > k\}.$$

Il est clair que A_k est un ouvert. Si $a \in \bigcap_k A_k$, alors $\sup_{i\in I} \|T_i a\|_F = \infty$. Il suffit donc de montrer que si $\{T_i\}_{i\in I}$ n'est pas bornée dans $\mathscr{L}(E;F)$, alors A_k est dense pour tout k.

Soit $B := \{w \in E : \|w\|_E \le 1\}$. Si A_k n'est pas dense, alors il existe $v_0 \in E$ et $r > 0$ tels que

$$\|T_i(v_0 + rw)\|_F \le k, \quad \text{pour tout } i \in I \text{ et } w \in B,$$

ce qui implique

$$2r\|T_i w\|_F \le \|T_i(v_0 - rw)\| + \|T_i(v_0 + rw)\|_F \le 2k, \quad \text{pour tout } i \in I \text{ et } w \in B,$$

donc $\sup_{i\in I} \|T_i\|_{\mathscr{L}(E;F)} \le \frac{k}{r}$. □

Proposition 2.5. *Pour tout ensemble dénombrable $X \subset \mathbb{T}$ il existe une fonction $f \in C(\mathbb{T})$ telle que*

$$\sup_{N\to\infty} |(S_N f)(x_0)| = \infty, \qquad \textit{pour tout } x_0 \in X.$$

Démonstration. Fixons $x_0 \in \mathbb{T}$ et considérons la famille des applications linéaires $T_N : C(\mathbb{T}) \to \mathbb{C}$,

$$T_N(f) := (S_N f)(x_0) = \int_0^1 D_N(x_0 - x) f(x)\,\mathrm{d}x.$$

On voit que $\|T_N\|_{\mathscr{L}(C(\mathbb{T});\mathbb{C})} = \|D_N(x_0 - \cdot)\|_{L^1} \to \infty$ quand $N \to \infty$. Par le Théorème 2.4, il existe un G_δ dense $A_{x_0} \subset C(\mathbb{T})$ tel que

$$\sup_N |T_N(f)| = \sup_N |(S_N f)(x_0)| = \infty, \qquad \text{pour tout } f \in A_{x_0}.$$

Soit $A := \bigcap_{x_0 \in X} A_{x_0}$. C'est un ensemble G_δ dense. Il suffit de prendre $f \in A$. □

Fejér a remarqué que les *sommes de Cesàro* d'une série de Fourier se comportent mieux. On définit

$$(\sigma_N \mu)(x) := \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} (S_n \mu)(x) = \int_0^1 K_N(x-y)\mu(\mathrm{d}y),$$

où le *noyau de Fejér K_N* est défini par

$$K_N(x) := \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} D_n(x).$$

Proposition 2.6. *Le noyau de Fejér a les propriétés suivantes :*

- $K_N(x) = \frac{1}{N}\Big(\frac{\sin(N\pi x)}{\sin(\pi x)}\Big)^2$ *si $x \notin \mathbb{Z}$ et $K_N(x) = N$ si $x \in \mathbb{Z}$,*
- $\int_0^1 K_N(x)\,\mathrm{d}x = 1$,
- *il existe $C > 0$ tel que $0 \le K_N(x) \le CN^{-1}\min(N^2, |x|^{-2})$, pour tout $-\frac{1}{2} \le x \le \frac{1}{2}$ and $N \in \mathbb{N}$,*
- *il existe $C > 0$ tel que $0 \le |K_N'(x)| \le C\min(N^2, |x|^{-2})$, pour tout $-\frac{1}{2} \le x \le \frac{1}{2}$ and $N \in \mathbb{N}$,*
- *il existe $C > 0$ tel que $\|K_n\|_{L^r} \le CN^{1-\frac{1}{r}}$ et $\|K_n'\|_{L^r} \le CN^{2-\frac{1}{r}}$ pour tout $1 \le r \le \infty$ et $N \in \mathbb{N}$.*
- $\widehat{K}_N(n) = \max(0, 1 - |n|/N)$.

Démonstration. Exercice. □

Rappelons que pour $0 \le \alpha < 1$ l'espace des fonctions hölderiennes $C^{0,\alpha}(\mathbb{T})$ est défini par la norme

$$\|f\|_{C^{0,\alpha}} = \|f\|_{L^\infty} + [f]_\alpha := \|f\|_{L^\infty} + \sup_{x \neq y} \frac{|f(x) - f(y)|}{|x-y|^\alpha}.$$

Cet espace a un sous-espace fermé

$$C^{0,\alpha+}(\mathbb{T}) := \left\{ f \in C^{0,\alpha}(\mathbb{T}) : \lim_{z \to 0^+} \sup_{0 < |x-y| \le z} \frac{|f(x) - f(y)|}{|x-y|^\alpha} = 0 \right\}.$$

Par exemple, $C^{0,0}(\mathbb{T}) = L^\infty(\mathbb{T})$ et $C^{0,0+}(\mathbb{T}) = C(\mathbb{T})$.

Voici le premier exemple d'application du noyau de Féjer.

Proposition 2.7. *Soit* $0 < \alpha < 1$. *Il existe* $C > 0$ *tel que pour tout* $f \in C^{0,\alpha}(\mathbb{T})$

$$\|\sigma_N f - f\|_{L^\infty} \le C[f]_\alpha N^{-\alpha}, \qquad \textit{pour tout } N \in \{1, 2, \ldots\}.$$

Démonstration. Pour tout $x \in \mathbb{T}$ et $N \ge 2$ on a

$$\begin{aligned}
\big|\sigma_N f(x) - f(x)\big| &= \left| \int_0^1 K_N(x-y) f(y) \,\mathrm{d}y - f(x) \right| = \left| \int_0^1 K_N(x-y)(f(y) - f(x)) \,\mathrm{d}y \right| \\
&\le \int_{|x-y| \le N^{-1}} K_N(x-y) |f(x) - f(y)| \,\mathrm{d}y + \int_{|x-y| \ge N^{-1}} K_N(x-y) |f(x) - f(y)| \,\mathrm{d}y \\
&\le CN[f]_\alpha \int_{|x-y| \le N^{-1}} |x-y|^\alpha \,\mathrm{d}y + CN^{-1}[f]_\alpha \int_{|x-y| \ge N^{-1}} |x-y|^{-2} |x-y|^\alpha \,\mathrm{d}y \\
&= 2CN[f]_\alpha \int_0^{N^{-1}} r^\alpha \,\mathrm{d}r + 2CN^{-1}[f]_\alpha \int_{N^{-1}}^{\frac{1}{2}} r^{-2+\alpha} \,\mathrm{d}r \\
&\le 2CN[f]_\alpha \frac{N^{-\alpha-1}}{\alpha+1} + 2CN^{-1}[f]_\alpha \frac{N^{1-\alpha} - 2^{1-\alpha}}{1-\alpha} \le C_1 [f]_\alpha N^{-\alpha},
\end{aligned}$$

avec $C_1 := 2C\big((1+\alpha)^{-1} + (1-\alpha)^{-1}\big)$. □

Corollaire 2.8. *Soit* $0 < \alpha < 1$. *Il existe* $C > 0$ *tel que pour tout* $f \in C^{0,\alpha}(\mathbb{T})$

$$\|S_N f - f\|_{L^\infty} \le C[f]_\alpha N^{-\alpha}(1 + \log N), \qquad \textit{pour tout } N \in \{1, 2, \ldots\}.$$

Démonstration. Soit $f \in C^{0,\alpha}(\mathbb{T})$, $N \in \{1, 2, \ldots\}$ et $g := \sigma_N f - f$. Observons que $S_N \sigma_N f = \sigma_N f$, donc $S_N f - f = (\sigma_N f - f) - S_N(\sigma_N f - f) = g - S_N g$. Par la Proposition 2.7, $\|g\|_{L^\infty} \le C[f]_\alpha N^{-\alpha}$. Par conséquent,

$$\|S_N f - f\|_{L^\infty} \le \|g\|_{L^\infty} + \|S_N g\|_{L^\infty} \le (1 + \|D_N\|_{L^1}) \|g\|_{L^\infty} \le C[f]_\alpha N^{-\alpha}(1 + \log N).$$

□

2.3 Convolutions

Rappelons quelques propriétés du produit de convolution sur $\mathbb{T}$.

Définition 2.9. Soit $\mu_1, \mu_2 \in \mathscr{M}(\mathbb{T})$. On définit la *convolution* $\mu_1 * \mu_2 \in \mathscr{M}(\mathbb{T})$ par

$$\int_0^1 f(x)\,(\mu_1 * \mu_2)(\mathrm{d}x) := \int_{\mathbb{T}^2} f(x+y)\,(\mu_1 \otimes \mu_2)(\mathrm{d}x\mathrm{d}y), \quad \text{pour tout } f \in C(\mathbb{T}). \tag{2.3}$$

Si $\mu_1(\mathrm{d}x) = g_1(x)\,\mathrm{d}x$ avec $g_1 \in L^1(\mathbb{T})$, on écrit $g_1 * \mu_2 := \mu_1 * \mu_2$, et de même si $\mu_2(\mathrm{d}x) = g_2(x)$. On pose aussi $g_1 * g_2 := \mu_1 * \mu_2$.

Proposition 2.10. *La formule* (2.3) *définit une unique mesure $\mu_1 * \mu_2 \in \mathscr{M}(\mathbb{T})$. De plus, $(\mu_1 * \mu_2) * \mu_3 = \mu_1 * (\mu_2 * \mu_3)$, $\mu_1 * \mu_2 = \mu_2 * \mu_1$, $\mu * \delta_0 = \mu$ et $\|\mu_1 * \mu_2\|_{\mathscr{M}(\mathbb{T})} \leq \|\mu_1\|_{\mathscr{M}(\mathbb{T})}\|\mu_2\|_{\mathscr{M}(\mathbb{T})}$ pour tous $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu \in \mathscr{M}(\mathbb{T})$, donc $(\mathscr{M}(\mathbb{T}), *)$ est une algèbre de Banach commutative avec l'élément neutre δ_0.*

Démonstration. Pour tout $f \in C(\mathbb{T})$ on a

$$\left| \int_{\mathbb{T}^2} f(x+y)\,(\mu_1 \otimes \mu_2)(\mathrm{d}x\mathrm{d}y) \right| \leq \|f\|_{L^\infty}\|\mu_1\|_{\mathscr{M}}\|\mu_2\|_{\mathscr{M}},$$

donc par le théorème de représentation de Riesz (pour des mesures complexes) on obtient $\mu_1 * \mu_2 \in \mathscr{M}(\mathbb{T})$ et $\|\mu_1 * \mu_2\|_{\mathscr{M}} \leq \|\mu_1\|_{\mathscr{M}}\|\mu_2\|_{\mathscr{M}}$. La commutativité est immédiate. Pour vérifier l'associativité on écrit, en utilisant le théorème de Fubini,

$$\begin{aligned}\int_0^1 f(x)((\mu_1 * \mu_2) * \mu_3)(\mathrm{d}x) &= \int_0^1 \Big(\int_0^1 f(x+z)(\mu_1 * \mu_2)(\mathrm{d}x) \Big) \mu_3(\mathrm{d}z) \\ &= \int_0^1 \Big(\int_{\mathbb{T}^2} f(x+y+z)(\mu_1 \otimes \mu_2)(\mathrm{d}x\mathrm{d}y) \Big) \mu_3(\mathrm{d}z) \\ &= \int_{\mathbb{T}^3} f(x+y+z)(\mu_1 \otimes \mu_2 \otimes \mu_3)(\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z),\end{aligned}$$

et il est clair que pour $\mu_1 * (\mu_2 * \mu_3)$ le résutat sera le même. Enfin, toujours par Fubini,

$$\int_0^1 f(x)(\mu * \delta_0)(\mathrm{d}x) = \int_0^1 \Big(\int_0^1 f(x+y)\delta_0(\mathrm{d}y) \Big) \mu(\mathrm{d}x) = \int_0^1 f(x)\mu(\mathrm{d}x).$$

□

Exemple 2.11. Les sommes partielles d'une série de Fourier, ainsi que leurs sommes de Cesàro peuvent s'écrire comme des convolutions :

$$S_N\mu = D_N * \mu, \qquad \sigma_N\mu = K_N * \mu.$$

Pour $z \in \mathbb{T}$ soit τ_z l'opérateur de translation, c'est à dire

$$\int_{\mathbb{T}} f(x)(\tau_z\mu)(\mathrm{d}x) := \int_{\mathbb{T}} f(x+z)\,\mu(\mathrm{d}x) \qquad \text{pour tout } \mu \in \mathscr{M}(\mathbb{T}) \text{ et } f \in C(\mathbb{T}).$$

Proposition 2.12. *Le produit de convolution est* invariant par translations *:*

$$\tau_z(\mu_1 * \mu_2) = (\tau_z\mu_1) * \mu_2, \qquad \textit{pour tous } \mu_1, \mu_2 \in \mathcal{M} \textit{ et } z \in \mathbb{T}.$$

Démonstration. Soit $\mu_1, \mu_2 \in \mathcal{M}$ et $z \in \mathbb{T}$. Soit $\delta_z \in \mathcal{M}(\mathbb{T})$ la mesure de Dirac en z, c'est-à-dire $\int_0^1 f(x)\,\delta_z(\mathrm{d}x) = f(z)$ pour tout $f \in C(\mathbb{T})$. Alors $\tau_z\mu = \delta_z * \mu$, car

$$\begin{aligned}\int_0^1 f(x)(\delta_z * \mu)(\mathrm{d}x) &= \int_0^1\int_0^1 f(x+y)\mu(\mathrm{d}x)\delta_z(\mathrm{d}y) = \int_0^1\Big(\int_0^1 f(x+y)\delta_z(\mathrm{d}y)\Big)\mu(\mathrm{d}x)\\ &= \int_0^1 f(x+z)\mu(\mathrm{d}x) = \int_0^1 f(x)(\tau_z\mu)(\mathrm{d}x).\end{aligned}$$

On en déduit que

$$\tau_z(\mu_1 * \mu_2) = \delta_z * (\mu_1 * \mu_2) = (\delta_z * \mu_1) * \mu_2 = (\tau_z\mu_1) * \mu_2.$$

□

Proposition 2.13. *Pour tout $\mu_1, \mu_2 \in \mathcal{M}(\mathbb{T})$ et tout $n \in \mathbb{Z}$, $(\widehat{\mu_1 * \mu_2})(n) = \widehat{\mu_1}(n)\widehat{\mu_2}(n)$.*

Démonstration. Par les définitions de la convolution et des coefficients de Fourier,

$$\begin{aligned}(\widehat{\mu_1 * \mu_2})(n) &= \int_0^1 \mathrm{e}^{-2\pi i n x}(\mu_1 * \mu_2)(\mathrm{d}x) = \int_{\mathbb{T}^2} \mathrm{e}^{-2\pi i n(x+y)}(\mu_1 \otimes \mu_2)(\mathrm{d}x\mathrm{d}y)\\ &= \Big(\int_0^1 \mathrm{e}^{-2\pi i n x}\mu_1(\mathrm{d}x)\Big)\Big(\int_0^1 \mathrm{e}^{-2\pi i n y}\mu_2(\mathrm{d}y)\Big) = \widehat{\mu_1}(n)\widehat{\mu_2}(n),\end{aligned}$$

où on applique Fubini pour passer de la première ligne à la deuxième. □

Exemple 2.14. Pour tout $\mu \in \mathcal{M}(\mathbb{T})$ et $N \in \mathbb{Z}$ on obtient $\widehat{S_N\mu}(n) = \widehat{D_N}(n)\widehat{\mu}(n) = \chi_{\{n:|n|\le N\}}(n)\widehat{\mu}(n)$ et $\widehat{\sigma_N\mu}(n) = \widehat{K_N}(n)\widehat{\mu}(n) = \max(0, 1-|n|/N)\widehat{\mu}(n)$.

Lemme 2.15. *Si $f \in L^1(\mathbb{T})$ et $\mu \in \mathcal{M}(\mathbb{T})$, alors $f * \mu \in L^1(\mathbb{T})$, $\|f * \mu\|_{L^1} \le \|f\|_{L^1}\|\mu\|_{\mathcal{M}}$ et*

$$(f * \mu)(x) = \int_0^1 f(x-y)\mu(\mathrm{d}y), \qquad \textit{pour (Lebesgue) presque tout } x \in \mathbb{T}. \tag{2.4}$$

Démonstration. La fonction $g(x,y) := f(x-y)$ est mesurable sur $\mathbb{T}^2$ et

$$\int_0^1\Big(\int_0^1 |g(x,y)|\,\mathrm{d}x\Big)|\mu|(\mathrm{d}y) = \int_0^1 \|f\|_{L^1}|\mu|(\mathrm{d}y) = \|f\|_{L^1}\|\mu\|_{\mathcal{M}}.$$

Par le théorème de Fubini, $g \in L^1(1\otimes\mu)$ et pour (Lebesgue) presque tout x on a $g(x,\cdot) \in L^1(\mu)$. De plus, la fonction définie pour presque tout $x \in \mathbb{T}$ par la formule $\phi(x) := \int_0^1 f(x-y)\mu(\mathrm{d}y)$ est mesurable et vérifie $\|\phi\|_{L^1} \le \|g\|_{L^1(1\otimes\mu)} = \|f\|_{L^1}\|\mu\|_{\mathcal{M}}$.

Pour terminer la preuve, il faut montrer que $f * \mu = \phi$. Soit $h \in C(\mathbb{T})$. Alors

$$\begin{aligned}\int_0^1 h(x)(f * \mu)(\mathrm{d}x) &= \int_0^1\Big(\int_0^1 h(x+y)f(x)\,\mathrm{d}x\Big)\mu(\mathrm{d}y) = \int_0^1\Big(\int_0^1 h(x)f(x-y)\,\mathrm{d}x\Big)\mu(\mathrm{d}y)\\ &= \int_0^1\Big(\int_0^1 h(x)f(x-y)\mu(\mathrm{d}y)\Big)\mathrm{d}x = \int_0^1 h(x)\phi(x)\,\mathrm{d}x,\end{aligned}$$

où on utilise Fubini pour la fonction $(x,y)\mapsto h(x)f(x-y)$ et la mesure $1\otimes\mu$ pour passer de la première ligne à la deuxième. $\square$

Rappelons le résultat général suivant.

Lemme 2.16 (Inégalité de Minkowski). *Soit (X,μ) et (Y,ν) des espaces mesurables σ-finis, $F : X\times Y\to\mathbb{R}_+$ une fonction mesurable et soit $1\le p\le q<\infty$. Alors*

$$\left(\int_Y\left(\int_X F(x,y)^p\mu(\mathrm{d}x)\right)^{\frac{q}{p}}\nu(\mathrm{d}y)\right)^{\frac{1}{q}}\le\left(\int_X\left(\int_Y F(x,y)^q\nu(\mathrm{d}y)\right)^{\frac{p}{q}}\mu(\mathrm{d}x)\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Démonstration. En remplaçant F par $F^{\frac{1}{p}}$ et en prenant la puissance p à droite et à gauche on se ramène au cas $p=1$, autrement dit il faut montrer que pour tout $q\ge 1$

$$\left(\int_Y\left(\int_X F(x,y)\mu(\mathrm{d}x)\right)^{q}\nu(\mathrm{d}y)\right)^{\frac{1}{q}}\le\int_X\left(\int_Y F(x,y)^q\nu(\mathrm{d}y)\right)^{\frac{1}{q}}\mu(\mathrm{d}x).$$

Soit $\phi(y):=\int_X F(x,y)\mu(\mathrm{d}x)\in[0,\infty]$, ce qui est bien défini pour ν-presque tout y, et $\psi : Y\to\mathbb{R}_+$ telle que $\|\psi\|_{L^{q'}(\nu)}\le 1$, où q' est l'exposant dual de q défini par $q^{-1}+(q')^{-1}=1$. Par Fubini,

$$\int_Y\psi(y)\phi(y)\nu(\mathrm{d}y)=\int_Y\left(\int_X F(x,y)\psi(y)\mu(\mathrm{d}x)\right)\nu(\mathrm{d}y)=\int_X\left(\int_Y F(x,y)\psi(y)\nu(\mathrm{d}y)\right)\mu(\mathrm{d}x),$$

et on conclut en appliquant Hölder à l'intégrale intérieure. $\square$

Remarque 2.17. Souvent, on écrit l'inégalité de Minkowski sous la forme compacte suivante :

$$\|F\|_{L^q_y(L^p_x)}\le\|F\|_{L^p_x(L^q_y)},\quad\text{pour tout } F : X\times Y\to\mathbb{C}\text{ et }1\le p\le q<\infty.$$

Lemme 2.18. *Le produit de convolution a les propriétés suivantes :*

(i) $\|f*\mu\|_{L^p}\le\|f\|_{L^p}\|\mu\|_{\mathscr{M}}$, *pour* $1\le p\le\infty$,

(ii) $\|f*\mu\|_{C^{0,\alpha}}\le\|f\|_{C^{0,\alpha}}\|\mu\|_{\mathscr{M}}$, *pour* $0\le\alpha<1$,

(iii) *si* $0\le\alpha<1$ *et* $f\in C^{0,\alpha+}(\mathbb{T})$ *et* $\mu\in\mathscr{M}(\mathbb{T})$, *alors* $f*\mu\in C^{0,\alpha+}(\mathbb{T})$,

(iv) *si* $1\le p\le\infty$, $\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=1$, $f\in L^p(\mathbb{T})$ *et* $g\in L^{p'}(\mathbb{T})$, *alors* $f*g\in C(\mathbb{T})$ *et* $\|f*g\|_{L^\infty}\le\|f\|_{L^p}\|g\|_{L^{p'}}$,

(v) *si* $1+\frac{1}{r}=\frac{1}{p}+\frac{1}{q}$, *alors* $\|f*g\|_{L^r}\le\|f\|_{L^p}\|g\|_{L^q}$ *(l'inégalité de Young).*

Démonstration. Pour montrer (i), on peut supposer sans perdre la généralité que $f,\mu\ge 0$, car $|(f*\mu)(x)|\le\int_0^1|f(x-y)||\mu|(\mathrm{d}x)$. Si $p<\infty$, on peut appliquer l'inégalité de Minkowski. Si $p=\infty$, le résultat est immédiat.

On procède à la preuve de (ii). On sait déjà que $\|f*\mu\|_{L^\infty}\le\|f\|_{L^\infty}\|\mu\|_{\mathscr{M}}$. On a aussi, pour tout $z\in\mathbb{T}$,

$$\|\tau_z(f*\mu)-f*\mu\|_{L^\infty}=\|(\tau_z f-f)*\mu\|_{L^\infty}\le\|\tau_z f-f\|_{L^\infty}\|\mu\|_{\mathscr{M}}\le|z|^\alpha[f]_\alpha\|\mu\|_{\mathscr{M}}.\tag{2.5}$$

Pour montrer (iii), il faut vérifier que $f\in C^{0,\alpha+}(\mathbb{T})$ implique

$$\lim_{|z|\to 0^+}\left(|z|^{-\alpha}\|\tau_z(f*\mu)-f*\mu\|_{L^\infty}\right)=0,$$

ce qui est clair par (2.5).

La borne L^∞ dans (iv) est une conséquence directe de l'inégalité de Hölder. Pour montrer que $f * g \in C(\mathbb{T})$, on peut supposer par la symétrie que $p < \infty$, donc il existe une suite $f_n \in C(\mathbb{T})$ telle que $\lim_{n\to\infty} \|f - f_n\|_{L^p} = 0$. Alors $f_n * g \in C(\mathbb{T})$ par (iii) et $\lim_{n\to\infty} \|f_n * g - f * g\|_{L^\infty} = 0$, donc $f * g \in C(\mathbb{T})$.

Pour montrer (v), il suffit de vérifier que pour tous $f \in L^p(\mathbb{T})$, $g \in L^q(\mathbb{T})$ et $h \in L^{r'}(\mathbb{T})$

$$\int_{\mathbb{T}^2} f(x-y)g(y)h(x)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \leq \|f\|_{L^p}\|g\|_{L^q}\|h\|_{L^{r'}}.$$

Sans perdre la généralité supposons que $f, g, h \geq 0$. Soit $\alpha, \beta, \gamma \in [0, 1]$ et $a, b, c \in [1, \infty]$ tels que $a^{-1} + b^{-1} + c^{-1} = 1$. Posons $F(x, y) := g(y)^\beta h(x)^{1-\gamma}$, $G(x, y) := h(x)^\gamma f(x-y)^{1-\alpha}$ et $H(x, y) := f(x-y)^\alpha g(y)^{1-\beta}$. L'inégalité de Hölder implique

$$\int_{\mathbb{T}^2} f(x-y)g(y)h(x)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_{\mathbb{T}^2} FGH\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \leq \|F\|_{L^a}\|G\|_{L^b}\|H\|_{L^c}.$$

Par Fubini,

$$\begin{aligned}
\|F\|_{L^a} &= \|g\|_{L^{a\beta}}^{\beta}\|h\|_{L^{a(1-\gamma)}}^{1-\gamma}, \\
\|G\|_{L^b} &= \|h\|_{L^{b\gamma}}^{\beta}\|f\|_{L^{b(1-\alpha)}}^{1-\gamma}, \\
\|H\|_{L^c} &= \|f\|_{L^{c\alpha}}^{\beta}\|g\|_{L^{c(1-\beta)}}^{1-\gamma},
\end{aligned}$$

donc la preuve sera finie si on choisit $a, b, c, \alpha, \beta, \gamma$ de sorte que

$$c\alpha = b(1-\alpha) = p, \qquad a\beta = c(1-\beta) = q, \qquad b\gamma = a(1-\gamma) = r',$$

ce qui a la solution $a = p', b = q', c = r, \alpha = \frac{p}{r}, \beta = \frac{q}{p'}$ et $\gamma = \frac{r'}{q'}$. □

Remarque 2.19. La preuve de (iii) implique que si $f \in C(\mathbb{T})$, alors le membre de droite de (2.4) est continu en x, donc donne la version continue de la fonction $f * \mu$, à priori définie seulement presque partout.

Définition 2.20. La suite $(\Phi_N)_{N=1}^\infty \subset \mathcal{M}(\mathbb{T})$ est une *approximation de l'identité* si

(H1) $\int_0^1 \Phi_N(\mathrm{d}x) = 1$ pour tout N,

(H2) $\sup_N \int_0^1 |\Phi_N|(\mathrm{d}x) < \infty$,

(H3) pour tout $\delta > 0$, $\lim_{N\to\infty} \int_{|x|\geq\delta} |\Phi_N|(\mathrm{d}x) = 0$.

Exemple 2.21. Le *noyau rectangulaire* est donné par $\Phi_N(x) := N\chi_{\{|x|<(2N)^{-1}\}}$.

Exemple 2.22. Proposition 2.6 implique que la suite (K_N) est une approximation de l'identité. En effet, (H2) résulte de (H1) et $K_N \geq 0$. Pour tout $\delta > 0$ on a

$$\int_{|x|\geq\delta} |K_N(x)|\,\mathrm{d}x \leq \int_{|x|\geq\delta} CN^{-1}|x|^{-2}\,\mathrm{d}x \leq 2C\delta^{-1}N^{-1} \to 0 \quad \text{quand } N \to \infty.$$

Exemple 2.23. La suite (D_N) n'est pas une approximation de l'identité. Elle ne vérifie ni (H2) ni (H3).

Proposition 2.24. *Soit* (Φ_N) *une approximation de l'identité. Alors* *(i) Si $0 \leq \alpha < 1$ et $f \in C^{0,\alpha+}(\mathbb{T})$, alors $\lim_{N\to\infty} \|\Phi_N * f - f\|_{C^{0,\alpha}} = 0$.*

(ii) Si $1 \leq p < \infty$ et $f \in L^p(\mathbb{T})$, alors $\lim_{N\to\infty} \|\Phi_N * f - f\|_{L^p} = 0$.

(iii) Si $\mu \in \mathscr{M}(\mathbb{T})$, alors $\Phi_N * \mu \rightharpoonup \mu$ quand $N \to \infty$, au sens de la convergence faible-.*

(iv) Si $f \in L^\infty(\mathbb{T})$, alors $\Phi_N * f \rightharpoonup f$ quand $N \to \infty$, au sens de la convergence faible-.*

Démonstration. Soit d'abord $f \in C(\mathbb{T})$. Notons $M := \sup_N \int_0^1 |\Phi_N|(\mathrm{d}x)$. Pour tout $x \in \mathbb{T}$ et $\delta > 0$ on calcule

$$\begin{aligned}|(\Phi_N * f)(x) - f(x)| &= \left|\int_0^1 (f(x-y) - f(x))\Phi_N(\mathrm{d}y)\right| \\ &\leq \int_{|y|\leq\delta} |f(x-y) - f(x)||\Phi_N|(\mathrm{d}y) + \int_{|y|\geq\delta} |f(x-y) - f(x)||\Phi_N|(\mathrm{d}y) \\ &\leq M \sup_{|y|\leq\delta} \|\tau_y f - f\|_{L^\infty} + 2\|f\|_{L^\infty} \int_{|y|\geq\delta} |\Phi_N|(\mathrm{d}y),\end{aligned}$$

où la première égalité résulte de (H1) dans la Définition 2.20. En utilisant (H2) et l'uniforme continuité de f, pour tout $\epsilon > 0$ il existe $\delta > 0$ tel que le premier terme est $\leq \frac{1}{2}\epsilon$ pour tout N. Maintenant (H3) implique que le deuxième terme est $\leq \frac{1}{2}\epsilon$ si N est suffisamment grand, on a donc

$$|(\Phi_N * f)(x) - f(x)| \leq \epsilon, \qquad \text{pour tout } x \in \mathbb{T} \text{ et } N \text{ suffisamment grand.}$$

À présent, soit $0 < \alpha < 1$ et $f \in C^{0,\alpha+}(\mathbb{T})$. On sait déjà que $\lim_{N\to\infty} \|\Phi_N * f - f\|_{L^\infty} = 0$, donc il faut montrer que pour tout $\epsilon > 0$ il existe $N_0 = N_0(\epsilon)$ tel que pour tout $N \geq N_0$ et $z \neq 0$

$$\|\tau_z(\Phi_N * f - f) - (\Phi_N * f - f)\|_{L^\infty} \leq \epsilon |z|^\alpha. \tag{2.6}$$

Par la définition de $C^{0,\alpha+}(\mathbb{T})$, il existe $\delta_0 = \delta_0(\epsilon)$ tel que

$$|z| \leq \delta_0 \;\Rightarrow\; \|\tau_z f - f\|_{L^\infty} \leq \frac{\epsilon}{(1+M)}|z|^\alpha,$$

ce qui implique

$$\begin{aligned}\|\tau_z(\Phi_N * f - f) - (\Phi_N * f - f)\|_{L^\infty} &= \|\Phi_N * (\tau_z f - f) - (\tau_z f - f)\|_{L^\infty} \\ &\leq (1+M)\|\tau_z f - f\|_{L^\infty} \leq \epsilon |z|^\alpha,\end{aligned}$$

donc (2.6) est vrai pour $|z| \leq \delta_0$ et tout $N \in \mathbb{N}$.

Si $|z| \geq \delta_0$, alors pour N assez grand

$$\|\tau_z(\Phi_N * f - f) - (\Phi_N * f - f)\|_{L^\infty} \leq 2\|\Phi_N * f - f\|_{L^\infty} \leq \epsilon \delta_0^\alpha \leq \epsilon |z|^\alpha.$$

Cela termine la preuve de (i).

Soit $1 \leq p < \infty$, $f \in L^p(\mathbb{T})$ et $\epsilon > 0$. Soit $g \in C(\mathbb{T})$ telle que $\|f - g\|_{L^p} \leq \frac{\epsilon}{2(1+M)}$. Par le Lemme 2.18 (i), cela entraine, pour tout $N \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}\|\Phi_N * f - f\|_{L^p} &\leq \|\Phi_N * g - g\|_{L^p} + \|\Phi_N * (f-g) - (f-g)\|_{L^p} \\ &\leq \|\Phi_N * g - g\|_{L^\infty} + (1+M)\frac{\epsilon}{2(1+M)}.\end{aligned}$$

Pour N suffisamment grand $\|\Phi_N * g - g\|_{L^\infty} \le \frac{1}{2}\epsilon$, donc $\|\Phi_N * f - f\|_{L^p} \le \epsilon$.

Enfin, soit $\mu \in \mathscr{M}(\mathbb{T})$ et $f \in C(\mathbb{T})$. Posons $\widetilde{f}(x) := f(-x)$ et $f_N(x) := (\widetilde{f} * \Phi_N)(-x)$. Alors $f_N \in C(\mathbb{T})$, $\lim_{N\to\infty} \|f_N - f\|_{L^\infty} = 0$ et

$$f_N(x) = \int_0^1 \widetilde{f}(-x-y)\Phi_N(\mathrm{d}y) = \int_0^1 f(x+y)\Phi_N(\mathrm{d}y).$$

On calcule, en utilisant Fubini,

$$\int_0^1 f(x)(\Phi_N * \mu)(\mathrm{d}x) = \int_{\mathbb{T}^2} f(x+y)\Phi_N(\,\mathrm{d}y)\mu(\,\mathrm{d}x) = \int_0^1 f_N(x)\mu(\mathrm{d}x) \to \int_0^1 f(x)\mu(\mathrm{d}x),$$

ce qui signifie précisément que $\Phi_N * \mu \rightharpoonup \mu$. La preuve de (iv) est analogue. $\square$

Remarque 2.25. Si $f \in L^\infty(\mathbb{T})$, alors en général $\Phi_N * f$ ne converge pas vers f dans L^∞, et de même pour $C^{0,\alpha}(\mathbb{T})$ avec $0 < \alpha < 1$.

2.4 Convergence des séries de Fourier dans L^p et $C^{0,\alpha}$

Corollaire 2.26. *Soit $X \in \{L^p(\mathbb{T}), C^{0,\alpha+}(\mathbb{T})\}$, où $1 \le p < \infty$ et $0 \le \alpha < 1$. Alors*

$$\lim_{N\to\infty} \|\sigma_N f - f\|_X = 0, \qquad \text{pour tout } f \in X.$$

En particulier, l'ensemble des polynômes trigonométriques est dense dans X.

En autre, pour tout $\mu \in \mathscr{M}(\mathbb{T})$, $\sigma_N\mu \rightharpoonup \mu$ au sens de la convergence faible-.*

Démonstration. Il suffit d'appliquer la Proposition 2.24 avec $\Phi_N = K_N$. $\square$

Remarque 2.27. La dernière affirmation implique que si $\mu \in \mathscr{M}(\mathbb{T})$ et $\widehat{\mu}(n) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$, alors $\mu = 0$.

Remarque 2.28. Corollaire 2.26 pour $X = L^2(\mathbb{T})$ implique que $\{e_n(x) := e^{2\pi inx}\}_{n\in\mathbb{Z}}$ forme une base orthonormée de $L^2(\mathbb{T})$. Par la théorie abstraite des espaces de Hilbert, on en déduit que

$$\int_0^1 \overline{f(x)}g(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \overline{\hat{f}(n)}\hat{g}(n), \quad \text{pour tout } f, g \in L^2(\mathbb{T}),$$

autrement dit $\mathscr{F}$ est une isométrie $L^2(\mathbb{T}) \to l^2(\mathbb{Z})$. En effet, $\widehat{f}(n) = \langle e_n, f\rangle$ sont les coordonnées de f dans cette base.

Notons qu'on adopte (dans tout le cours) la convention que les produits scalaires sont antilinéaires par rapport au premier argument et linéaires par rapport au deuxième argument.

Proposition 2.29. *Soit $X \in \{L^p(\mathbb{T}), C^{0,\alpha+}(\mathbb{T})\}$, où $1 \le p < \infty$ et $0 \le \alpha < 1$. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) *pour tout $f \in X$, $\lim_{N\to\infty} \|S_N f - f\|_X = 0$,*

(ii) *pour tout $f \in X$, $\sup_N \|S_N f\|_X < \infty$,*

(iii) $\sup_N \|S_N\|_{\mathscr{L}(X)} < \infty$.

Démonstration. Pour montrer que (iii) implique (i), supposons que $\sup_N \|S_N\|_{X\to X} = M < \infty$, soit $f \in X$ et $\epsilon > 0$. Par Corollaire 2.26, il existe un polynôme trigonométrique g tel que $\|f-g\|_X \le (1+M)^{-1}\epsilon$. Alors, pour N suffisamment grand,

$$\|S_N f - f\|_X \le \|S_N(f-g)\|_X + \|S_N g - g\|_X + \|f-g\|_X \le M(1+M)^{-1}\epsilon + 0 + (1+M)^{-1}\epsilon = \epsilon.$$

Il est évident que (i) implique (ii), et (ii) implique (iii) par le théorème de Banach-Steinhaus. □

Remarque 2.30. Le cas $X = C^{0,\alpha}(\mathbb{T})$ n'est pas pertinent, car $C^{0,\alpha+}(\mathbb{T})$ est un sous-espace fermé de $C^{0,\alpha}(\mathbb{T})$. Par conséquent, si $\lim_{N\to\infty} \|S_N f - f\|_{C^{0,\alpha}} = 0$, alors automatiquement $f \in C^{0,\alpha+}(\mathbb{T})$. Concernant le cas $X = \mathscr{M}(\mathbb{T})$, on a vu dans la Proposition 2.3 que $\sup_N \|S_N\delta_0\|_{\mathscr{M}} = \infty$, donc (par le théorème de Banach-Steinhaus) $S_N\delta_0$ ne converge pas dans $\mathscr{M}(\mathbb{T})$ même au sens faible-*.

Remarque 2.31. On a déjà traité le cas $X = C(\mathbb{T})$ dans la Proposition 2.5. Un autre cas facile est $X = L^1(\mathbb{T})$. En effet,

$$\|S_N\|_{\mathscr{L}(L^1(\mathbb{T});L^1(\mathbb{T}))} \ge \limsup_M \|D_N * K_M\|_{L^1} \ge \|D_N\|_{L^1} \to \infty.$$

(Au lieu de K_M on aurait pu utiliser n'importe quelle approximation de l'identité.) On en déduit qu'il existe $f \in L^1(\mathbb{T})$ tel que $\limsup_N \|S_N f - f\|_{L^1} > 0$.

On verra par la suite que dans le cas $X = L^p(\mathbb{T})$ la convergence *a lieu* (c'est immédiat pour $p = 2$ par la théorie générale des espaces de Hilbert séparables), alors que pour $X = C^{0,\alpha+}(\mathbb{T})$ en général non.

2.5 Régularité en termes des coefficients de Fourier

Le lien entre la régularité d'une fonction f et la décroissance de ses coefficients de Fourier s'explique par le fait suivant, bien connu. Soit $f \in C^1(\mathbb{T})$. Alors, pour tout $n \in \mathbb{Z}$,

$$\big(\mathscr{F}(f')\big)(n) = \int_0^1 \mathrm{e}^{-2\pi i n x} f'(x)\,\mathrm{d}x = 2\pi i n \int_0^1 \mathrm{e}^{-2\pi i n x} f(x)\,\mathrm{d}x = 2\pi i n \widehat{f}(n). \tag{2.7}$$

Proposition 2.32. *Soit $f \in L^1(\mathbb{T})$. Alors*

(i) $f \in C^\infty(\mathbb{T})$ si et seulement si $|\widehat{f}(n)| \le C_M(1+|n|)^{-M}$ pour tout $M \in \mathbb{N}$ et $n \in \mathbb{Z}$,

(ii) f s'étend comme une fonction analytique au voisinage de $\mathbb{T}$ si et seulement si il existe $\epsilon > 0$ tel que $|\widehat{f}(n)| \le C\mathrm{e}^{-\epsilon|n|}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Démonstration. Si $f \in C^\infty(\mathbb{T})$, alors pour tout $M \in \mathbb{N}$ on a $(2\pi i n)^M \widehat{f}(n) = \big(\mathscr{F}(f^{(m)})\big)(n)$ borné pour $n \in \mathbb{Z}$, donc $|\widehat{f}(n)| \le C_M(1+|n|)^{-M}$.

Pour l'inverse, l'Exercice 2.1 montre que $|\widehat{f}(n)| \le C(1+|n|)^{-3}$ implique $f \in C^1(\mathbb{T})$. Ensuite, on procède par récurrence : si $|\widehat{f}(n)| \le C(1+|n|)^{-M}$ pour $M \ge 4$, alors $f \in C^1(\mathbb{T})$, donc (2.7) implique $|\widehat{f'}(n)| \le C(1+|n|)^{-M+1}$, donc $f \in C^{M-3}(\mathbb{T})$, donc $f \in C^{M-2}(\mathbb{T})$.

Concernant point (ii), si $F(z)$ est analytique au voisinage de $\mathbb{T}$, alors on a la série de Laurent

$$F(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n z^n,$$

qui converge pour $z = r\mathrm{e}^{2\pi i\theta}$ et $r \in [(1+\epsilon)^{-1}, 1+\epsilon]$. Cela implique $\widehat{f}(n) = a_n$ et $|a_n| \le C(1+\epsilon)^{-|n|}$.

Inversement, si $|\widehat{f}(n)|$ décroit exponentiellement, alors on définit la fonction holomorphe correspondante par la série de Laurent $\sum_{n\in\mathbb{Z}} \widehat{f}(n) z^n$. □

On va étudier ici plus en détail comment la régularité d'une fonction f se traduit en comportement de ses coefficients de Fourier.

Définition 2.33. Pour tout $s \in [0, \infty[$ l'espace de Sobolev $H^s(\mathbb{T}) \subset L^2(\mathbb{T})$ est défini par la norme

$$\|f\|_{H^s}^2 := |\widehat{f}(0)|^2 + \sum_{n\in\mathbb{Z}} |n|^{2s} |\widehat{f}(n)|^2.$$

On passe à l'étude de la régularité dans les espaces de Lebesgue et de Hölder. On introduit le *noyau de de la Vallée Poussin* :

$$V_N(x) := (e(-2N) + e(-N) + 1 + e(N) + e(2N))K_N(x).$$

Remarque 2.34. D'habitude, on appelle le noyau de de la Vallée Poussin un objet similaire mais pas exactement le même, $(e(-N) + 1 + e(N))K_N(x)$.

Lemme 2.35. *Le noyau $V_N(x)$ a les propriétés suivantes :*

(i) $\widehat{V}_N(n) = 1$ *pour* $|n| \leq 2N$, $\widehat{V}_N(n) = 0$ *pour* $|n| \geq 3N$ *et* $\widehat{V}_N(n) = \frac{3N-|n|}{N}$ *pour* $2N \leq |n| \leq 3N$,

(ii) il existe $C > 0$ *tel que* $|V_N(x)| \leq CN^{-1}\min(N^2, |x|^{-2})$ *et* $|V_N'(x)| \leq C\min(N^2, |x|^{-2})$ *pour tout* $N \in \mathbb{N}$ *et* $x \in \mathbb{T}$,

(iii) il existe $C > 0$ *tel que* $\|V_N\|_{L^r} \leq CN^{1-\frac{1}{r}}$ *et* $\|V_N'\|_{L^r} \leq CN^{2-\frac{1}{r}}$ *pour tout* $1 \leq r \leq \infty$ *et* $N \in \mathbb{N}$.

Lemme 2.36 (Inégalité de Bernstein). *Il existe une constante C ayant la propriété suivante. Soit $1 \leq p \leq q \leq \infty$ et f un polynôme trigonométrique tel que $\widehat{f}(n) = 0$ pour tout $|n| \geq N$. Alors*

$$\|f\|_{L^q} \leq CN^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}\|f\|_{L^p}, \qquad \|f'\|_{L^p} \leq CN\|f\|_{L^p}.$$

Démonstration. L'idée consiste à écrire $f = \phi * f$ pour une fonction ϕ bien choisie, et utiliser l'inégalité de Young (Lemme 2.18). Pour cela, il faut que $\widehat{\phi}(n) = 1$ pour $|n| \leq N$, mais on s'attend à ce que le noyau de Dirichlet ne soit pas le bon choix, vu ses mauvaises propriétés. Il s'avère que le noyau de de la Vallée Poussin convient pour cet objectif :

$$\|f\|_{L^q} = \|V_N * f\|_{L^q} \leq \|V_N\|_{L^r}\|f\|_{L^p} \leq CN^{1-\frac{1}{r}}\|f\|_{L^p} = CN^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}\|f\|_{L^p},$$

où l'avant dernière inégalité est une conséquence du Lemme 2.35.

La deuxième inégalité se démontre de manière analogue :

$$\|f'\|_{L^p} = \|(V_N * f)'\|_{L^p} = \|(V_N') * f\|_{L^p} \leq \|V_N'\|_{L^1}\|f\|_{L^p} \leq CN\|f\|_{L^p}.$$

□

Souvent, il est utile de décomposer une fonction en parties ayant les fréquences de la même taille, à une constante près. Ce sera la base de la théorie de Littlewood-Paley, qu'on verra plus tard dans le cadre des distributions sur $\mathbb{R}^d$. On introduira ici cette idée dans le cadre des fonctions (ou mesures) sur $\mathbb{T}$.

Posons $\phi_0(x) := V_1(x) = e(-2) + e(-1) + 1 + e(1) + e(2)$ et, pour $j \in \{1, 2, \ldots\}$

$$\phi_j(x) := V_{2^j}(x) - V_{2^{j-1}}(x), \qquad P_j\mu := \phi_j * \mu, \qquad P_0 f := \phi_0 * \mu.$$

Lemme 2.37. *Pour $j \geq 1$ le noyau ϕ_j a les propriétés suivantes :*

(i) $\widehat{\phi_j}(n) = 1$ *pour* $3 \times 2^{j-1} \leq |n| \leq 2^{j+1}$, $\widehat{\phi_j}(n) = 0$ *pour* $|n| \geq 3 \times 2^j$ *et pour* $|n| \leq 2^j$,

(ii) $\int_0^1 \phi_j(x)\,\mathrm{d}x = 0$ *pour* $j \geq 1$,

(iii) il existe $C > 0$ *tel que* $|\phi_j(x)| \leq C2^{-j}\min(2^{2j}, |x|^{-2})$ *pour tout* $j \in \mathbb{N}$ *et* $x \in \mathbb{T}$,

(iv) $\sup_j \|\phi_j\|_{L^1} < \infty$ *et* $\sup_j 2^{-j}\|\phi_j'\|_{L^1} < \infty$.

Démonstration. Exercice. □

Corollaire 2.38. *(i) Il existe une constante* $C > 0$ *telle que pour tout* $1 \leq p \leq \infty$, $0 \leq \alpha < 1$, $X \in \{L^p(\mathbb{T}), C^{0,\alpha}(\mathbb{T})\}$ *et pour tout* $j \in \{0, 1, 2, \ldots\}$

$$\|P_j f\|_X \leq C\|f\|_X, \qquad \text{pour tout } f \in X. \tag{2.8}$$

(ii) Si $|j - k| \geq 2$, *alors* $P_j P_k = 0$.

Démonstration. La borne (2.8) est une conséquence du Lemme 2.18 (i) et (ii). Pour montrer (ii), soit par exemple $0 \leq j \leq k-2 < \infty$. Alors $\widehat{\phi_j}(n) = 0$ si $|n| \geq 3 \times 2^j$ et $\widehat{\phi_k}(n) = 0$ si $|n| \leq 2^k$. Comme $2^k > 3 \times 2^j$, pour tout $n \in \mathbb{Z}$ il y a $\widehat{\phi_j}(n)\widehat{\phi_k}(n) = 0$, ce qui signifie $P_j P_k = 0$. □

Lemme 2.39. *Pour tout* $s \geq 0$ *il existe* $C > 0$ *tel que pour tout* $\mu \in \mathscr{M}(\mathbb{T})$

$$\frac{1}{C}\|\mu\|_{H^s}^2 \leq \sum_{j=0}^{\infty} 2^{2js}\|P_j\mu\|_{L^2}^2 \leq C\|\mu\|_{H^s}^2.$$

Démonstration. Par Plancherel,

$$\sum_{j=0}^{\infty} 2^{2js}\|P_j\mu\|_{L^2}^2 = \sum_{j=0}^{\infty} 2^{2js}\sum_{n\in\mathbb{Z}}|\widehat{\phi_j}(n)|^2|\widehat{\mu}(n)|^2 = \sum_{n\in\mathbb{Z}}|\widehat{\mu}(n)|^2\sum_{j=0}^{\infty} 2^{2js}|\widehat{\phi_j}(n)|^2.$$

Pour $|n| \leq 2$ la dernière somme est égale à $2^0|\widehat{\phi_0}(n)|^2 = 1$. Pour $|n| > 2$ elle est égale à

$$\sum_{j=1}^{\infty} 2^{2js}|\widehat{\phi_j}(n)|^2 = \sum_{\frac{1}{3}|n|<2^j<|n|} 2^{2js}|\widehat{\phi_j}(n)|^2 \simeq |n|^{2s}\sum_{\frac{1}{3}|n|<2^j<|n|}|\widehat{\phi_j}(n)|^2 \simeq |n|^{2s}.$$

□

Lemme 2.40. *Pour tout* $0 < \alpha < 1$ *il existe* $C > 0$ *tel que pour tout* $\mu \in \mathscr{M}(\mathbb{T})$

$$\frac{1}{C}\|\mu\|_{C^{0,\alpha}} \leq \sup_j 2^{j\alpha}\|P_j\mu\|_{L^\infty} \leq C\|\mu\|_{C^{0,\alpha}}.$$

En outre, si $f \in C^{0,\alpha}(\mathbb{T})$, *alors* $f \in C^{0,\alpha+}(\mathbb{T})$ *si et seulement si*

$$\lim_{j\to\infty} 2^{j\alpha}\|P_j f\|_{L^\infty} = 0.$$

Démonstration. Soit $f \in C^{0,\alpha}(\mathbb{T})$. Il est clair que $\|\phi_0 * f\|_{L^\infty} \leq 5\|f\|_{L^\infty}$. Pour $j \geq 1$ on calcule

$$|(\phi_j * f(x)| = \left| \int_0^1 \phi_j(y)(f(x-y) - f(x))\,\mathrm{d}y \right| \leq [f]_\alpha \int_0^1 |\phi_j(y)||y|^\alpha\,\mathrm{d}y$$
$$\leq C[f]_\alpha \left(2^{-j} \int_{|y|\geq 2^{-j}} |y|^{\alpha-2}\,\mathrm{d}y + 2^j \int_{|y|\leq 2^{-j}} |y|^\alpha\,\mathrm{d}y \right) \leq C[f]_\alpha 2^{-\alpha j}.$$

Inversement, supposons que $\sup_j 2^{j\alpha}\|P_j\mu\|_{L^\infty} < \infty$. Ceci implique un particulier que la somme $\sum_{j=0}^\infty P_j\mu$ converge dans L^∞, et en calculant les coefficients de Fourier à droite et à gauche on voit que

$$\mu = f = \sum_{j=0}^\infty P_j f \in C(\mathbb{T}), \quad \|f\|_{L^\infty} \leq \sum_{j=0}^\infty \|P_j f\|_{L^\infty} \leq \sup_l 2^{l\alpha}\|P_l f\|_{L^\infty} \sum_{j=0}^\infty 2^{-j\alpha} \leq C \sup_l 2^{l\alpha}\|P_l f\|_{L^\infty}.$$

Soit $h \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ et $m \in \{1, 2, \ldots\}$ tel que $2^{-m} \geq |h| > 2^{-m-1}$. Par l'inégalité triangulaire,

$$|f(x+h) - f(x)| \leq \sum_{j=0}^m |(P_j f)(x+h) - (P_j f)(x)| + 2 \sum_{j=m+1}^\infty \|P_j f\|_{L^\infty}.$$

On estime le deuxième terme :

$$\sum_{j=m+1}^\infty \|P_j f\|_{L^\infty} \leq \sup_l 2^{l\alpha}\|P_l f\|_{L^\infty} \sum_{j=m+1}^\infty 2^{-j\alpha} \leq C \sup_l 2^{l\alpha}\|P_l f\|_{L^\infty} 2^{-m\alpha} \leq C \sup_l 2^{l\alpha}\|P_l f\|_{L^\infty}|h|^\alpha.$$

Concernant la première somme, par l'inégalité de Bernstein on a

$$\|(P_j f)'\|_{L^\infty} \leq C2^j\|P_j f\|_{L^\infty} \quad \Rightarrow \quad |(P_j f)(x+h) - (P_j f)(x)| \leq C2^j 2^{-m} 2^{-j\alpha} \sup_l 2^{l\alpha}\|P_l\mu\|_{L^\infty},$$

ce qui permet de conclure car

$$\sum_{j=0}^m 2^j 2^{-m} 2^{-j\alpha} = 2^{-m} \sum_{j=0}^m 2^{j(1-\alpha)} \leq C2^{-m}2^{m(1-\alpha)} \leq C2^{-m\alpha} \leq C|h|^\alpha.$$

Si $f \in C^{0,\alpha+}(\mathbb{T})$ et $\epsilon > 0$, alors, par le Corollaire 2.26, il existe un polynôme trigonométrique $g : \mathbb{T} \to \mathbb{C}$ tel que $\|f - g\|_{C^{0,\alpha}} \leq \epsilon$, ce qui implique

$$\limsup_{j\to\infty} 2^{j\alpha}\|P_j f\|_{L^\infty} \leq \limsup_{j\to\infty} 2^{j\alpha}\|P_j g\|_{L^\infty} + \sup_j 2^{j\alpha}\|P_j(f-g)\|_{L^\infty} \leq 0 + C\|f-g\|_{C^{0,\alpha}} \leq C\epsilon.$$

Inversement, soit $\lim_{j\to\infty} 2^{j\alpha}\|P_j f\|_{L^\infty} = 0$ et $\epsilon > 0$. Posons $g_J := \sum_{j=0}^{J-1} P_j f$ et $h_J := f - g_J = \sum_{j=J}^\infty P_j f$. Par le Corollaire 2.38, si $l \leq J-2$, alors $P_l h_J = 0$. Si $l \geq J-1$, alors

$$\|P_l h_J\|_{L^\infty} \leq \|P_l P_{l-1} f\|_{L^\infty} + \|P_l P_{l-1} f\|_{L^\infty} + \|P_l P_{l-1} f\|_{L^\infty} \leq 3C\|P_l f\|_{L^\infty} \leq 2^{-l\alpha}\epsilon,$$

si J est suffisamment grand. On a donc $\sup_l 2^{l\alpha}\|P_l h_J\|_{L^\infty} \leq \epsilon$ si J est suffisamment grand, donc $\|f - g_J\|_{C^{0,\alpha}} \leq C\epsilon$. Par conséquent, f est une limite dans $C^{0,\alpha}(\mathbb{T})$ d'une suite de polynômes trigonométriques, elle appartient donc à $C^{0,\alpha+}(\mathbb{T})$. $\square$

Corollaire 2.41. *Pour tout $1 > \alpha > s \geq 0$ on a l'inclusion $C^{0,\alpha}(\mathbb{T}) \subset H^s(\mathbb{T})$. Pour tout $0 < \alpha < 1$ on a l'inclusion $H^{\alpha+\frac{1}{2}}(\mathbb{T}) \subset C^{0,\alpha}(\mathbb{T})$.*

Démonstration. En effet, si $s < \alpha$ et $f \in C^{0,\alpha}(\mathbb{T})$, alors

$$\sum_{j=0}^{\infty} 2^{2js}\|P_j f\|_{L^2}^2 \leq \sum_{j=0}^{\infty} 2^{2js}\|P_j f\|_{L^\infty}^2 \leq \sum_{j=0}^{\infty} 2^{2js}2^{-2j\alpha}\sup_l \|P_l f\|_{L^\infty}^2 = \sup_l \|P_l f\|_{L^\infty}^2 \sum_{j=0}^{\infty} 2^{-(\alpha-s)j} \leq C\|f\|_{C^{0,\alpha}}.$$

Maintenant, soit $0 < \alpha < 1$ et $f \in H^{\alpha+\frac{1}{2}}(\mathbb{T})$. Par l'inégalité de Bernstein, $\|P_j f\|_{L^\infty} \leq C2^{\frac{j}{2}}\|P_j f\|_{L^2}$, donc

$$\sup_j 2^{j\alpha}\|P_j f\|_{L^\infty} \leq C\sup_j 2^{j\alpha}2^{\frac{j}{2}}\|f\|_{L^2} \leq C\Big(\sum_{j=0}^{\infty} 2^{2j(\alpha+\frac{1}{2})}\|P_j f\|_{L^2}^2\Big)^{\frac{1}{2}}.$$

□

Remarque 2.42. Cette méthode, bien qu'assez puissante, ne permet pas de répondre à la question si $C^{0,\alpha}(\mathbb{T}) \subset H^\alpha(\mathbb{T})$.

2.6 Dimension supérieure et distributions sur $\mathbb{T}^d$

Certains résultats se traduisent sans difficulté au cas des mesures et fonctions sur le tore $\mathbb{T}^d = \mathbb{R}^d/\mathbb{Z}^d$ pour $d \in \{2, 3, \ldots\}$, ce que l'on présentera brièvement dans cette section.

Pour $n \in \mathbb{Z}^d$ et $x \in \mathbb{T}^d$ on écrit $e_n(x) := \mathrm{e}^{2\pi i n\cdot x}$. Une fonction de la forme $f = \sum_{|n|\leq N} a_n e_n$ est appelé un polynôme trigonométrique.

Proposition 2.43. *L'ensemble des polynômes trigonométriques est un ensemble dense dans $L^p(\mathbb{T}^d)$ pour $1 \leq p < \infty$, et dans $C(\mathbb{T}^d)$.*

Démonstration. Exercice 2.14. □

Corollaire 2.44. *L'ensemble $\{e_n : n \in \mathbb{Z}^d\}$ forme une base orthonormée de $L^2(\mathbb{T}^d)$.* □

On introduit au passage le langage des distributions, souvent utile. En réalité on n'a que rarement affaire à des distributions sur $\mathbb{T}^d$ qui ne sont pas des mesures finies. Pourtant, traitons ce qui suit comme un exercice, avant d'aborder les distributions sur $\mathbb{R}^d$. (Une théorie plus complète a été présentée par exemple dans le cours M1 de F. Nier l'année dernière.)

Définition 2.45. L'espace de Schwartz sur le tore $\mathscr{S}(\mathbb{T}^d) = C^\infty(\mathbb{T}^d)$ est l'espace de Fréchet défini par la famille des semi-normes

$$p_k(f) := \max_{0\leq|\beta|\leq k} \|\partial_x^\beta f\|_{L^\infty}, \qquad k \in \{0, 1, 2, \ldots\}.$$

L'espace des distributions sur le tore $\mathscr{S}'(\mathbb{T}^d)$ est l'espace dual de $\mathscr{S}(\mathbb{T}^d)$, c'est-à-dire l'espace des fonctionnelles $\mathbb{C}$-linéaires continues $\mathscr{S}(\mathbb{T}^d) \to \mathbb{C}$.

Définition 2.46. Les coefficients de Fourier d'une distribution ϕ sont définis par $\widehat{\phi}(n) := \phi(e_{-n})$.

Par exemple, si $\phi \in \mathscr{S}'(\mathbb{T}^d)$ et $f = \sum_{|n|\le N} a_n e_n$ est un polynôme trigonométrique, alors

$$\phi(f) = \sum_{|n|\le N} a_{-n}\widehat{\phi}(n).$$

On observe que pour tout $\phi \in \mathscr{S}'(\mathbb{T}^d)$ et tout $n \in \mathbb{Z}^d$

$$\widehat{\partial_{x_k}\phi}(n) = (\partial_{x_k}\phi)(e_{-n}) = -\phi(\partial_{x_k}e_{-n}) = 2\pi i n_k \phi(e_{-n}) = 2\pi i n_k \widehat{\phi}(n). \tag{2.9}$$

Définition 2.47. Pour tout $s \in \mathbb{R}$ on définit l'espace de Sobolev $H^s(\mathbb{T}^d) \subset \mathscr{S}'(\mathbb{T}^d)$ par

$$H^s(\mathbb{T}^d) := \Big\{\phi \in \mathscr{S}'(\mathbb{T}) : \|\phi\|_{H^s}^2 := |\widehat{\phi}(0)|^2 + \sum_{n\in\mathbb{Z}} |n|^{2s}|\widehat{\phi}(n)|^2 < \infty\Big\}.$$

En particulier, comme $(e_n)_{n\in\mathbb{Z}^d}$ est une base orthonormée de $L^2(\mathbb{T}^d)$, on a $H^0(\mathbb{T}^d) = L^2(\mathbb{T}^d)$. On observe aussi que $H^{s_1}(\mathbb{T}^d) \subset H^{s_2}(\mathbb{T}^d)$ si $s_1 \ge s_2$. Si $k \in \{0,1,2,\ldots\}$, alors (2.9) implique que

$$H^k(\mathbb{T}^d) = \big\{f \in \mathscr{S}'(\mathbb{T}^d) : \partial_x^\beta f \in L^2(\mathbb{T}^d) \ \text{ pour tout } |\beta| \le k\big\}.$$

Comme dans le cas uni-dimensionnel, on peut montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$ et $s > k + \frac{d}{2}$ on a l'inclusion $H^s(\mathbb{T}^d) \subset C^k(\mathbb{T}^d)$, donc la famille des normes $H^s(\mathbb{T}^d)$ pour $s \in \mathbb{R}$ définit la topologie de $\mathscr{S}(\mathbb{T}^d)$. Il est clair que les polynômes trigonométriques sont denses dans $H^s(\mathbb{T}^d)$ pour tout $s \in \mathbb{T}^d$, donc on déduit qu'ils forment un ensemble dense dans $\mathscr{S}(\mathbb{T}^d)$.

Proposition 2.48. *Pour tout $\phi \in \mathscr{S}'(\mathbb{T}^d)$ et $s \in \mathbb{R}$,*

$$\sup\{|\phi(f)| : f \in \mathscr{S}(\mathbb{T}^d), \|f\|_{H^s} \le 1\} = \|\phi\|_{H^{-s}} \in [0,\infty].$$

Démonstration. Par densité, il suffit de considérer f étant un polynôme trigonométrique, et dans ce cas la conclusion résulte facilement de l'inégalité de Cauchy-Schwarz. □

Proposition 2.49. *Pour tout $s \in \mathbb{R}$ l'application $\phi \mapsto ((\delta_{0n} + |n|)^s\widehat{\phi}(n))_{n\in\mathbb{Z}^d}$, où $\delta_{0n} = 1$ si $n = 0$ et $\delta_{0n} = 0$ si $n \ne 0$, est une isométrie $H^s(\mathbb{T}^d) \to l^2(\mathbb{Z}^d)$. En particulier, $H^s(\mathbb{T}^d)$ est un espace de Hilbert.*

Démonstration. Pour $\phi \in H^s(\mathbb{T}^d)$ on pose $T(\phi)(n) := |n|^s\widehat{\phi}(n)$. C'est une injection, car $T\phi = 0$ implique $\widehat{\phi}(n) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{Z}^d$, donc $\phi(f) = 0$ pour tout polynôme trigonométrique f, donc $\phi(f) = 0$ pour tout $f \in \mathscr{S}(\mathbb{T}^d)$ par densité. Par la définition de la norme H^s on voit que $\|Tf\|_{l^2} = \|f\|_{H^s}$. Il reste à montrer que T est une surjection. Pour cela, soit $(a_n)_{n\in\mathbb{Z}^d} \in l^2(\mathbb{Z}^d)$, et posons

$$\phi(f) := \sum_{n\in\mathbb{Z}^d} (\delta_{0n} + |n|)^{-s} a_n \widehat{f}(-n) \qquad \text{pour tout polynôme trigonométrique } f.$$

Par Cauchy-Schwartz, cette application est continue $H^{-s}(\mathbb{T}^d) \to \mathbb{C}$, donc aussi continue $\mathscr{S}(\mathbb{T}^d) \to \mathbb{C}$. □

Corollaire 2.50. *Pour tout $\phi \in \mathscr{S}'(\mathbb{T}^d)$ il existe $s \in \mathbb{R}$ tel que $\phi \in H^{-s}(\mathbb{T}^d)$.*

Démonstration. Par la définition, il existe C_1, C_2 et k tels que

$$|\phi(f)| \le C_1 \max_{0\le\beta\le k} \|\partial_x^\beta f\|_{L^\infty} \le C_2\|f\|_{H^s} \quad \text{pour tout } f \in \mathscr{S}(\mathbb{T}^d),$$

où $s > k + \frac{d}{2}$. Cela implique $\phi \in H^{-s}(\mathbb{T}^d)$. □

Corollaire 2.51. *Si $\phi \in \mathscr{S}'(\mathbb{T}^d)$ et $f \in \mathscr{S}(\mathbb{T}^d)$, alors $\phi(f) = \sum_{n\in\mathbb{Z}^d} \widehat{\phi}(n)\widehat{f}(-n)$.*

Démonstration. La suite des polynômes trigonométriques $f_N := \sum_{|n|\le N} \widehat{f}(n)e_n$ converge vers f dans $\mathscr{S}(\mathbb{T}^d)$, et on a vu déjà que $\phi(f_N) = \sum_{|n|\le N} \widehat{\phi}(n)\widehat{f}(-n)$. La dernière somme converge absolument quand $N \to \infty$. □

Corollaire 2.52. *Pour tout $\phi \in \mathscr{S}'(\mathbb{T}^d)$ il existe C et k tels que $|\widehat{\phi}(n)| \le C\langle n\rangle^k$ pour tout $n \in \mathbb{Z}^d$. Réciproquement, pour toute suite $(a_n)_{n\in\mathbb{Z}^d} \subset \mathbb{C}$ à croissance polynômiale, c'est-à-dire telle qu'il existe C et k tels que $|a_n| \le C\langle n\rangle^k$ pour tout $n \in \mathbb{Z}^d$, il existe une unique distribution $\phi \in \mathscr{S}'(\mathbb{T}^d)$ telle que $\widehat{\phi}(n) = a_n$ pour tout $n \in \mathbb{Z}^d$. On note cette distribution $\phi = \sum_{n\in\mathbb{Z}^d} a_n e_n$.*

Démonstration. Exercice. □

Définition 2.53. Si $\phi \in \mathscr{S}'(\mathbb{T}^d)$ et $\psi \in \mathscr{S}'(\mathbb{T}^m)$, alors on définit $\phi \otimes \psi \in \mathscr{S}'(\mathbb{T}^{d+m})$ par la condition

$$(\phi \otimes \psi)(f \otimes g) := \phi(f)\psi(g), \qquad \text{où } (f \otimes g)(x, y) := f(x)g(y), x \in \mathbb{T}^d, y \in \mathbb{T}^m.$$

Remarque 2.54. Cela définit bien un unique élément de $\mathscr{S}'(\mathbb{T}^{d+m})$, car les fonctions test de la forme $f \otimes g$ engendrent en particulier tous les polynômes trigonométriques, donc un ensemble dense dans $\mathscr{S}(\mathbb{T}^{d+m})$. Des combinaisons linéaires de fonctions de la forme $f \otimes g$ s'appellent des *fonctions tensorielles*.

Remarque 2.55. Directement par la définition, on trouve $\widehat{(\phi \otimes \psi)}((n_1, n_2)) = \widehat{\phi}(n_1)\widehat{\psi}(n_2)$ pour tout $n_1 \in \mathbb{Z}^d$ et $n_2 \in \mathbb{Z}^m$.

Définition 2.56. Soit $\phi, \psi \in \mathscr{S}'(\mathbb{T}^d)$. On définit $\phi * \psi \in \mathscr{S}'(\mathbb{T}^d)$ par la condition

$$(\phi * \psi)(f) := (\phi \otimes \psi)((x, y) \mapsto f(x + y)).$$

Remarque 2.57. Il est donc possible de définir la convolution de deux éléments de $\mathscr{S}'(\mathbb{T}^d)$. Ce n'est pas possible dans le cas de $\mathscr{S}'(\mathbb{T}^d)$, comme on le rappellera dans le Chapitre 4.

Proposition 2.58. *Pour tout $\phi, \psi \in \mathscr{S}'(\mathbb{T}^d)$ et $n \in \mathbb{Z}^d$ il y a $\widehat{(\phi * \psi)}(n) = \widehat{\phi}(n)\widehat{\psi}(n)$. Pour $\phi \in \mathscr{S}'(\mathbb{T}^d)$ fixe, l'opérateur K_ϕ défini par $K_\phi\psi := \phi * \psi$ est continu $\mathscr{S}'(\mathbb{T}^d) \to \mathscr{S}'(\mathbb{T}^d)$.*

Démonstration. $(\phi*\psi)(e_n) = (\phi\otimes\psi)((x, y) \mapsto e_n(x+y)) = (\phi\otimes\psi)((x, y) \mapsto e_n(x)e_n(y))$. On admettra la continuité $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^d) \to \mathscr{S}'(\mathbb{R}^d)$. Elle repose sur le fait, qu'on peut montrer à l'aide du théorème de Baire, que $\psi_m \to \psi$ au sens $\mathscr{S}'(\mathbb{T}^d)$ implique qu'il existe $N \in \mathbb{N}$ et $C > 0$ tels que $|\psi_m(\phi)| \le C$ pour tout ϕ vérifiant $p_N(\phi) \le 1$. Cela implique que $|\widehat{\psi}_m(n)|$ est borné par un polynôme en n (uniformément en m). Ensuite, en utilisant les expansions en Fourier, on montre que $(\phi * \psi_m)(\zeta) \to (\phi * \psi)(\zeta)$ pour tout $\zeta \in \mathscr{S}(\mathbb{T}^d)$. □

Proposition 2.59. *Pour tout $\phi \in \mathscr{S}'(\mathbb{T}^d)$ l'opérateur de convolution K_ϕ défini par $K_\phi\psi := \phi * \psi$ est continu $\mathscr{S}(\mathbb{T}^d) \to \mathscr{S}(\mathbb{T}^d)$. En outre, $(\phi * \psi)(x) = \phi(\psi_x)$, où $\psi_x(y) := \psi(x - y)$, pour tout $\psi \in \mathscr{S}(\mathbb{T}^d)$ et $x \in \mathbb{R}^d$.*

Démonstration. On sait que $|\widehat{\phi}(n)|$ croit comme un polynôme et $|\widehat{\psi}(n)|$ décroit plus vite que l'inverse de tout polynôme, donc $|\widehat{(\phi * \psi)}(n)|$ décroit plus vite que l'inverse de tout polynôme. La continuité $\mathscr{S}(\mathbb{T}^d) \to \mathscr{S}(\mathbb{T}^d)$ est laissée comme exercice.

La formule $\zeta(x) := \phi(\psi_x)$ définit une fonction continue. On calcule ses coefficients de Fourier :

$$\widehat{\zeta}(n) = \int_{\mathbb{T}^d} \phi(\psi_x) \mathrm{e}^{-2\pi i n\cdot x}\,\mathrm{d}x = \phi\bigg(\int_{\mathbb{T}^d} \psi_x \mathrm{e}^{-2\pi i n\cdot x}\,\mathrm{d}x\bigg) = \phi(\mathrm{e}^{-2\pi i n\cdot y}\widehat{\psi}(n)) = \widehat{\phi}(n)\widehat{\psi}(n),$$

donc $\zeta = \phi * \psi$. La deuxième intégrale est l'intégrale de Riemann d'une fonction continue $\mathbb{T}^d \to \mathscr{S}(\mathbb{T}^d)$. □

2.7 Noyau d'un opérateur et opérateurs invariants par translations (*)

À toute distribution $K \in \mathscr{S}'(\mathbb{T}^{d+m})$ on peut associer l'opérateur $O_K : \mathscr{S}(\mathbb{T}^m) \to \mathscr{S}'(\mathbb{T}^d)$ par la relation $O_K(g)(f) := K(f \otimes g)$ pour tous $f \in \mathscr{S}(\mathbb{T}^d)$ et $g \in \mathscr{S}(\mathbb{T}^m)$. On appelle K le *noyau* de l'opérateur O_K. On voit facilement que si $K \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^{d+m})$, alors

$$O_K(g) = x \mapsto \int_{\mathbb{R}^m} K(x,y)g(y)\,\mathrm{d}y,$$

donc on peut penser à K comme une "matrice" de l'opérateur O_K.

Proposition 2.60. *Pour tout opérateur continu $A : \mathscr{S}(\mathbb{T}^d) \to \mathscr{S}'(\mathbb{T}^m)$ il existe l'unique $K \in \mathscr{S}'(\mathbb{T}^{d+m})$ tel que $A = O_K$.*

Démonstration. L'unicité est une conséquence du fait que la condition $A(g)(f) = K(f \otimes g)$ détermine les coefficients de Fourier de K, $\widehat{K}((n_1, n_2)) = K(e_{-n_1} \otimes e_{-n_2}) = A(e_{-n_2})(e_{-n_1})$ pour tout $n_1 \in \mathbb{Z}^d$ et $n_2 \in \mathbb{Z}^m$.

Pour montrer l'existence, il faut vérifier que si $A : \mathscr{S}(\mathbb{T}^d) \to \mathscr{S}'(\mathbb{T}^m)$, alors cette suite est à croissance polynômiale. Pour cela, on considère l'application

$$\mathscr{S}(\mathbb{T}^d) \times \mathscr{S}(\mathbb{T}^m) \ni (f,g) \mapsto A(g)(f) \in \mathbb{C}.$$

Par le théorème de Baire, il existe $M < \infty$ et des ensembles ouverts $U_1 \subset \mathscr{S}(\mathbb{T}^d)$ et $U_2 \subset \mathscr{S}(\mathbb{T}^m)$ tels que $|A(g)(f)| \le M$ pour tout $f \in U_1$ et $g \in U_2$. Cela implique qu'il existe $k \in \mathbb{N}$ et $\epsilon > 0$ tels que $\|f\|_{H^k} + \|g\|_{H^k} \le \epsilon$ implique $|A(g)(f)| \le M$, et on en déduit $|A(\mathrm{e}_{-n_2})(\mathrm{e}_{-n_1})| \le C(1+|n_1|)^K(1+|n_2|)^K$ pour un certain $C < \infty$. □

Si $z \in \mathbb{T}^d$ et $\phi \in \mathscr{S}'(\mathbb{T}^d)$, on définit la translation $(\tau_z\phi)(f) := \phi(x \mapsto f(x+z))$. À toute distribution $K \in \mathscr{S}'(\mathbb{T}^d)$ on peut associer *l'opérateur de convolution* $T_K : \mathscr{S}(\mathbb{T}^d) \to \mathscr{S}(\mathbb{T}^d)$ défini par $T_K f := K * f$. Il s'avère que tout opérateur continu invariant par translations $\mathscr{S}(\mathbb{T}^d) \to \mathscr{S}'(\mathbb{T}^d)$ est de cette forme.

Théorème 2.61. *Soit $T : \mathscr{S}(\mathbb{T}^d) \to \mathscr{S}'(\mathbb{T}^d)$ un opérateur continu $\mathbb{C}$-linéaire, invariant par translations. Alors il existe $K \in \mathscr{S}'(\mathbb{T}^d)$ tel que*

$$Tf = K * f, \qquad \textit{pour tout } f \in \mathscr{S}(\mathbb{T}^d).$$

Démonstration. De manière équivalente, il faut montrer que $(Te_n)(e_m) = 0$ si $m \neq -n$, ce qui est une conséquence directe de l'invariance par translations. En effet, d'un côté la linéarité de T implique

$$T(\tau_z e_n)(e_m) = \mathrm{e}^{-2\pi i n\cdot x} T(e_n)(e_m).$$

D'un autre côté, on obtient

$$(\tau_z(Te_n))(e_m) = (Te_n)(\tau_{-z}e_m) = \mathrm{e}^{2\pi i m\cdot z} T(e_n)(e_m),$$

donc $T(\tau_z e_n) = \tau_z(Te_n)$ et $n \neq -m \Rightarrow T(e_n)(e_m) = 0$. □

Remarque 2.62. En particulier, tout opérateur continu et invariant par translations $\mathscr{S}(\mathbb{T}^d) \to \mathscr{S}'(\mathbb{T}^d)$ est aussi continu $\mathscr{S}(\mathbb{T}^d) \to \mathscr{S}(\mathbb{T}^d)$ et se prolonge comme opérateur continu $\mathscr{S}'(\mathbb{T}^d) \to \mathscr{S}'(\mathbb{T}^d)$.

Si $X, Y \subset \mathscr{S}'(\mathbb{T}^d)$ deux espaces de Banach, il est naturel de se demander s'il est possible de caractériser les distributions K pour lesquelles l'opérateur T_K est continu $X \to Y$. C'est possible dans certains cas. Sans surprise, le cas des espaces de Sobolev est le plus facile.

Proposition 2.63. *Soit $K \in \mathscr{S}'(\mathbb{T}^d)$ et $s_1, s_2 \in \mathbb{R}$. L'opérateur $T_K f = K * f$ est continu $H^{s_1}(\mathbb{T}^d) \to H^{s_2}(\mathbb{T}^d)$ si, et seulement si, il existe C tel que $|\hat{K}(n)| \leq C(1+|n|)^{s_1 - s_2}$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$. Dans ce cas, il existe $M = M(s_1, s_2)$ tel que*

$$\frac{1}{M} \sup_{n \in \mathbb{Z}} (1+|n|)^{s_2 - s_1} |\widehat{K}(n)| \leq \|T_K\|_{\mathscr{L}(H^{s_1}, H^{s_2})} \leq M \sup_{n \in \mathbb{Z}} (1+|n|)^{s_2 - s_1} |\widehat{K}(n)|.$$

Démonstration. Exercice. □

Proposition 2.64. *Soit $K \in \mathscr{S}'(\mathbb{T}^d)$. L'opérateur $T_K f = K * f$ est continu $\mathscr{M}(\mathbb{T}^d) \to \mathscr{M}(\mathbb{T}^d)$ si, et seulement si, $K \in \mathscr{M}(\mathbb{T}^d)$. Dans ce cas, $\|T_K\|_{\mathscr{L}(\mathscr{M}, \mathscr{M})} = \|K\|_{\mathscr{M}}$.*

Démonstration. On définit $K := T\delta_0$. □

On termine avec le cas de l'espace $L^1(\mathbb{T})$.

Proposition 2.65. *Soit $K \in \mathscr{S}'(\mathbb{T}^d)$. L'opérateur $T_K f = K * f$ est continu $L^1(\mathbb{T}^d) \to L^1(\mathbb{T}^d)$ si, et seulement si, $K \in \mathscr{M}(\mathbb{T}^d)$. Dans ce cas, $\|T_K\|_{\mathscr{L}(L^1, L^1)} = \|K\|_{\mathscr{M}}$.*

Démonstration. La preuve est une petite variation de la preuve précédente. On définit K comme une limite faible-* de $T_K \Phi_N$ pour une approximation de l'identité Φ_N. □

Remarque 2.66. L'ensemble des opérateurs invariants par translations, continus $L^p(\mathbb{T}^d) \to L^p(\mathbb{T}^d)$, est appelé *l'espace des multiplicateurs L^p* et noté $\mathscr{M}_p(\mathbb{Z}^d)$. C'est une algèbre de Banach.

2.8 Exercices

Exercice 2.1. Soit $(a_n) \subset \mathbb{C}$ une suite telle que $\sum_{n\in\mathbb{Z}} |a_n| < \infty$. Montrer qu'il existe une fonction $f \in C(\mathbb{T})$ telle que $\widehat{f}(n) = a_n$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$. Montrer que si, de plus, $\sum_{n\in\mathbb{Z}} |na_n| < \infty$, alors $f \in C^1(\mathbb{T})$.

Exercice 2.2. Démontrer la Proposition 2.3.

Exercice 2.3. Le but de cet exercice est de donner une preuve "directe" qu'il existe une fonction $f \in C(\mathbb{T})$ telle que

$$\sup_N |S_N f(0)| = \infty.$$

(i) Montrer que pour tout $l \in \mathbb{N}$ il existe un polynôme trigonométrique f_l et $N_l \in \mathbb{N}$ tels que

$$\|f_l\|_{L^\infty} \le 1, \qquad |(S_{N_l} f_l)(0)| = \|S_{N_l} f_l\|_{L^\infty} \ge 3 \times 5^l.$$

(ii) Montrer que pour tout $l \in \mathbb{N}$ il existe un polynôme trigonométrique g_l et $\widetilde{N}_l \in \mathbb{N}$ tels que

$$\|g_l\|_{L^\infty} \le 1, \quad |(S_{\widetilde{N}_l} g_l)(0)| = \|S_{\widetilde{N}_l} g_l\|_{L^\infty} \ge 5^l, \quad \widehat{g}_l(n) = 0 \text{ pour } n < 0.$$

(iii) Définir $f(x) := \sum_{l=1}^{\infty} 2^{-l} e(M_l x) g_l(x)$, où les nombres M_l sont à choisir. Conclure.

Exercice 2.4. Démontrer une version plus forte de la Proposition 2.5 : pour tout ensemble dénombrable $X \subset \mathbb{T}$ il existe $A \in G_\delta(\mathbb{T})$ et $E \in G_\delta(C(\mathbb{T}))$ tels que $X \subset A$ et $\sup_N |(S_N f)(x)| = \infty$ pour tout $f \in E$ et $x \in A$.

Remarque 2.67. Par le théorème de Carleson, pour tout $f \in L^2(\mathbb{T})$ on a $(S_N f)(\theta) \to f(\theta)$ pour presque tout $\theta \in \mathbb{T}$ (en fait, même pour $f \in L^p(\mathbb{T})$ avec $p > 1$; c'est le théorème de Hunt). C'est un théorème difficile, qu'on ne verra pas dans ce cours.

Exercice 2.5. Démontrer la Proposition 2.6.

Exercice 2.6. Le but de cet exercice est d'étudier l'*algèbre de Wiener* $\mathbb{A}(\mathbb{T})$.

(i) On définit $\mathbb{A}(\mathbb{T}) \subset \mathscr{M}(\mathbb{T})$ comme l'espace des mesures μ telles que $\|\mu\|_{\mathbb{A}} < \infty$, où la norme $\|\mu\|_{\mathbb{A}} := \sum_{n\in\mathbb{Z}} |\widehat{\mu}(n)|$. Montrer que $\mathbb{A}(\mathbb{T}) \subset \mathbb{C}(\mathbb{T})$.

(ii) Montrer que si $f, g \in \mathbb{A}(\mathbb{T})$, alors $fg \in \mathbb{A}(\mathbb{T})$ et $\|fg\|_{\mathbb{A}} \le \|f\|_{\mathbb{A}} \|g\|_{\mathbb{A}}$.

(iii) Montrer que si $f, g \in L^2(\mathbb{T})$, alors $f * g \in \mathbb{A}(\mathbb{T})$.

Remarque 2.68. Dans le dernier exercice on démontre que $\mathbb{A}(\mathbb{T})$ est une algèbre de Banach commutative avec l'unité 1. L'algèbre de convolution et l'algèbre de Wiener peuvent être définies dans le cadre général des groupes commutatifs localement compacts, et dans ce cadre ce sont des objets duaux.

Exercice 2.7. (M-S, Exercise 1.4) Soit $(a_n) \subset \mathbb{C}$ une suite et pour $N \in \mathbb{N}$ soit f_N le polynôme trigonométrique défini par $\widehat{f_N}(n) := \widehat{K}_N(n) a_n$. Montrer que la suite f_N est bornée dans L^1 si, et seulement si, il existe $\mu \in \mathscr{M}(\mathbb{T})$ tel que $\widehat{\mu}(n) = a_n$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$. Si $1 \le p < \infty$, alors la suite f_N converge dans $L^p(\mathbb{T})$ si, et seulement si, il existe $f \in L^p(\mathbb{T})$ tel que $\widehat{f}(n) = a_n$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$. La suite f_N converge dans L^∞ si, et seulement si, il existe $f \in C(\mathbb{T})$ tel que $\widehat{f}(n) = a_n$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$. La suite f_N est bornée dans L^∞ si, et seulement si, il existe $f \in L^\infty(\mathbb{T})$ tel que $\widehat{f}(n) = a_n$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$.

Exercice 2.8. (M-S, Exercise 1.6) Soit $s \ge 0$.

(i) Montrer qu'il existe $C > 0$ tel que $\|S_N f - f\|_{L^2} \le CN^{-s}\|f\|_{H^s}$ pour tout $f \in H^s(\mathbb{T})$ et $N \in \mathbb{N}$.

(ii) Montrer que, si $f \in H^s(\mathbb{T})$, alors $\lim_{N\to\infty} N^s\|S_N f - f\|_{L^2} = 0$.

Exercice 2.9. Démontrer les Lemmes 2.35 et 2.37.

Exercice 2.10. On définit par récurrence deux suites de polynômes trigonométriques P_j et Q_j en posant $P_0(x) = Q_0(x) = 1$ et

$$P_{j+1}(x) = P_j(x) + \mathrm{e}^{2\pi i 2^j x} Q_j(x),$$
$$Q_{j+1}(x) = P_j(x) - \mathrm{e}^{2\pi i 2^j x} Q_j(x).$$

Montrer que $\widehat{P}_j(n) \in \{-1, 1\}$ pour $0 \le n < 2^j$ et $\widehat{P}_j(n) = 0$ pour $n \notin [0, 2^j[$, et que $\|P_j\|_{L^\infty} \simeq 2^{\frac{j}{2}}$.

Exercice 2.11. En utilisant le résultat de l'Exercice 2.10 et le Lemme 2.40, montrer qu'il existe une fonction $f \in C^{0,\frac{1}{2}+}(\mathbb{T})$ telle que $\sum_{n\in\mathbb{Z}} |\widehat{f}(n)| = \infty$.

Exercice 2.12. (M-S, Problem 1.5) Soit $(a_n)_{n=1}^\infty \subset \mathbb{C}$ une suite. Montrer que si $\sum_{n=1}^\infty n|a_n|^2 < \infty$ et $\sum_{n=1}^\infty a_n$ est sommable au sens de Cesàro, alors $\sum_{n=1}^\infty a_n$ converge. Utiliser ce résultat pour montrer que pour tout $f \in C(\mathbb{T}) \cap H^{\frac{1}{2}}(\mathbb{T})$, on a la convergence uniforme $S_N f \to f$.

Exercice 2.13. Vérifier que la convolution de deux éléments de $\mathscr{M}(\mathbb{T}^d)$ est un élément de $\mathscr{M}(\mathbb{T}^d)$. Vérifier que les Lemmes 2.15 et 2.18 restent valables en dimension supérieure. Définir une approximation de l'identité sur $\mathbb{T}^d$ et démontrer un analogue de la Proposition 2.24 en dimension supérieure (il n'est pas nécessaire de traiter le cas des espaces $C^{0,\alpha+}(\mathbb{T}^d)$ pour $0 < \alpha < 1$).

Exercice 2.14. À l'aide du noyau de Féjer multi-dimensionnel $K_{N,d}(x) := \prod_{j=1}^d K_N(x_j)$, démontrer que les polynômes trigonométriques forment un ensemble dense dans $L^p(\mathbb{T}^d)$ pour $1 \le p < \infty$, et dans $C(\mathbb{T}^d)$.

Exercice 2.15. Démontrer le Corollaire 2.52.

Exercice 2.16. (M-S, Problem 1.6) Montrer que pour tout $0 < s < 1$ il existe $C = C(s) > 0$ tel que pour tout $f \in H^s(\mathbb{T})$

$$\frac{1}{C}\|f\|_{H^s}^2 \le \int_{\mathbb{T}\times\mathbb{T}} \frac{|f(x) - f(y)|^2}{|\sin(\pi(x-y))|^{1+2s}} \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \le C\|f\|_{H^s}^2.$$

Exercice 2.17. Formuler et démontrer, à l'aide du noyau de de la Vallée Poussin multi-dimensionnel $V_{N,d}(x) := \prod_{j=1}^d V_N(x_j)$, des inégalités de Bernstein en dimension d. Éventuellement, essayer de formuler et démontrer des analogues des Lemmes 2.39 et 2.40.

Chapitre 3

Fonctions harmoniques sur le disque ; transformée de Hilbert

3.1 Égalité de la moyenne, principe du maximum

Définition 3.1. Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^2 \simeq \mathbb{C}$ un domaine (un ensemble ouvert et connexe). On appelle $u \in C^2(\Omega)$ (à valeurs réelles ou complexes) une *fonction harmonique* si

$$\Delta u := \partial_x^2 u + \partial_y^2 u = 0, \qquad \text{pour tout } (x, y) \in \Omega.$$

Dans ce chapitre, on considère le plus souvent des fonctions harmoniques à valeurs réelles.

Proposition 3.2. *Si $w : \Omega \to \mathbb{C}$ est une fonction holomorphe, alors $\Re w : \Omega \to \mathbb{R}$ et $\Im w : \Omega \to \mathbb{R}$ sont des fonctions harmoniques.*

Démonstration. Soit $w(x, y) = u(x, y) + iv(x, y)$. Alors les équations de Cauchy-Riemann $\partial_x u - \partial_y v = 0$ et $\partial_y u + \partial_x v = 0$ impliquent $\Delta u = 0$ et $\Delta v = 0$. □

Proposition 3.3. *Si Ω est simplement connexe, et $u : \Omega \to \mathbb{R}$ est une fonction harmonique, alors il existe une fonction holomorphe $w : \Omega \to \mathbb{C}$ (unique à une constante imaginaire près) telle que $\Re w = u$.*

Démonstration. On choisit $z_0 \in \Omega$ et on pose

$$v(z) := \int_\gamma -u_y \, \mathrm{d}x + u_x \, \mathrm{d}y,$$

où γ est un chemin qui relie z_0 et z. Alors $w(z) := u(z) + iv(z) \in C^2(\Omega)$ et vérifie les équations de Cauchy-Riemann.

Si $w_1 = u + iv_1$ et $w_2 = u + iv_2$ sont des fonctions holomorphes, alors les équations de Cauchy-Riemann impliquent $\partial_x(v_1 - v_2) = 0$ et $\partial_y(v_1 - v_2) = 0$. Comme Ω est connexe, on en déduit $v_1 - v_2 =$ const. □

Remarque 3.4. On observe que toute fonction harmonique à valeurs complexes est une somme d'une fonction holomorphe et d'une fonction anti-holomorphe. Cette décomposition est unique à une constante près, car les seules fonctions à la fois holomorphes et anti-holomorphes sont les fonctions constantes.

On note $\mathbb{D} := \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$.

Théorème 3.5 (Égalité de la moyenne)**.** *Soit $u : \Omega \to \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ une fonction harmonique. Alors pour tout $z \in \Omega$ et $0 < r < \operatorname{dist}(z, \delta\Omega)$*

$$u(z) = \int_{\mathbb{T}} u(z + r\mathrm{e}^{2\pi i\theta})\,\mathrm{d}\theta = \frac{1}{\pi r^2}\int_{z+r\mathbb{D}} u(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

Corollaire 3.6 (Principe du maximum)**.** *Si $u : \Omega \to \mathbb{R}$ une fonction harmonique et il existe $z \in \Omega$ tel que $u(x) = \sup_{z\in\Omega} u(z)$, alors u est une fonction constante.*

3.2 Noyau de Poisson

Pour $z \in \mathbb{D}$ on écrit $z = r\mathrm{e}^{2\pi i\theta} = x + iy$, avec $0 \le r < 1$ et $\theta \in \mathbb{T}$. Pour une fonction F définie sur $\mathbb{D}$ on écrira souvent $F_r(\theta) = F(z)$.

Définition 3.7. Pour $0 \le r < 1$ et $\theta \in \mathbb{T}$ le *noyau de Poisson* est défini par la formule

$$P_r(\theta) := \frac{1-r^2}{1-2r\cos(2\pi\theta)+r^2}.$$

Dans un exercice on trouvera que $P_r(\theta) = \Re\left(\frac{1+z}{1-z}\right)$ pour tout $z \in \mathbb{C}$, en particulier $P_r(\theta)$ est une fonction harmonique dans $\mathbb{D}$, et que $\widehat{P}_r(n) = r^{|n|}$ pour tout $0 \le r < 1$ et $n \in \mathbb{Z}$.

Proposition 3.8. *Soit $f : \mathbb{T} \to \mathbb{C}$ un polynôme trigonométrique et $F_r := P_r * f$ pour $0 \le r < 1$. Alors $F(z) = F_r(\theta)$ est une fonction harmonique polynômiale qui vérifie $F(z) = f(\theta)$ pour tout $z = \mathrm{e}^{2\pi i\theta}$.*

Démonstration. Soit $f(\theta) = \sum_{n=-N}^{N} a_n \mathrm{e}^{2\pi i n\theta}$. Pour $0 \le r < 1$ on a

$$F(z) = F_r(\theta) = \sum_{n=-N}^{N} r^{|n|} a_n \mathrm{e}^{2\pi i n\theta} = \sum_{n=0}^{N} a_n z^n + \sum_{n=-N}^{-1} a_n \bar{z}^{|n|},$$

ce qui est un polynôme harmonique, en particulier se prolonge pour tout $z \in \mathbb{C}$. En posant $z = \mathrm{e}^{2\pi i\theta}$ dans la formule pour $F(z)$ on trouve $f(\theta)$. □

Lemme 3.9. *La famille $\{P_r\}_{0<r<1}$ est une approximation de l'identité, avec N remplacé par r et $N \to \infty$ par $r \to 1^-$.*

Démonstration. Exercice. □

Lemme 3.10. *Soit $F : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ une fonction harmonique. Alors $F_{rs} = P_r * F_s$ pour tout $0 \le r, s < 1$. En particulier, pour tout $1 \le p \le \infty$ la fonction $]0,1[\ni r \mapsto \|F_r\|_{L^p}$ est croissante.*

Démonstration. Fixons $s \in]0,1[$ et posons $G_r := P_r * F_s$, $H_r := F_{rs}$ pour $0 \le r < 1$. Alors G et H sont des fonctions harmoniques, continues sur $\overline{\mathbb{D}}$, ayant les mêmes valeurs au bord, donc $G = H$ par le principe de maximum. La deuxième affirmation vient du fait que $\|P_r\|_{L^1} = 1$ pour tout r. □

Proposition 3.11. *Soit $f \in \mathscr{S}'(\mathbb{T})$ et $F_r := P_r * f$ pour $0 \le r < 1$. Alors $F(z) = F_r(\theta)$ est une fonction harmonique sur $\mathbb{D}$ et $\lim_{r\to 1^-} F_r = f$ dans $\mathscr{S}'(\mathbb{T})$. En outre, si $G : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ est une fonction harmonique telle qu'il existe une suite $r_j \to 1^-$ avec $G_{r_j} \to f$ dans $\mathscr{S}'(\mathbb{T})$, alors $G = F$.*

Démonstration. Soit $a_n := \widehat{f}(n)$ pour $n \in \mathbb{Z}$. C'est une suite à croissance polynômiale. Pour $0 \le r < 1$ on a

$$F(z) = F_r(\theta) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} r^{|n|} a_n \mathrm{e}^{2\pi i n\theta} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n + \sum_{n=-\infty}^{-1} a_n \bar{z}^{|n|},$$

qui est une somme d'une fonction holomorphe et d'une fonction anti-holomorphe, donc une fonction harmonique.

Si $h \in \mathscr{S}(\mathbb{T})$, $h(\theta) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} b_n \mathrm{e}^{2\pi i n\theta}$, alors, en utilisant le Corollaire 2.51,

$$F_r(h) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} r^{|n|} a_n b_{-n} \to \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n b_{-n} = f(h) \quad \text{quand } r \to 1^-.$$

Enfin, soit $r_j \to 1^-$ et $G_{r_j} \to f$ au sens $\mathscr{S}'(\mathbb{T})$. Soit $0 \le r < 1$, $\theta \in \mathbb{T}$ et $h(\phi) := P_r(\theta - \phi)$. Par le Lemme 3.10,

$$G_r(\theta) = \lim_{j\to\infty} G_{rr_j}(\theta) = \lim_{j\to\infty} (P_r * G_{r_j})(\theta) = \lim_{j\to\infty} G_{r_j}(h) = f(h) = (P_r * f)(\theta) = F_r(\theta).$$

□

Remarque 3.12. Si f est une distribution réelle, alors $F : \mathbb{D} \to \mathbb{R}$.

Remarque 3.13. Pour tout $0 < r < 1$ les coefficients de Fourier de F_r décroissent exponentiellement, donc $F_r \in \mathscr{S}(\mathbb{T})$.

3.3 Problème au bord

Proposition 3.8 montre que, si f est un polynôme trigonométrique, alors $F(z) := (P_r * f)(\theta)$ résout le *problème au bord*

$$\Delta F = 0 \ \text{ dans } \ \mathbb{D} \qquad \text{et} \qquad F = f \ \text{ sur } \ \partial\mathbb{D} = \mathbb{T}.$$

Proposition 3.11 affirme que $P_r * f$ est harmonique dans le disque ouvert $\mathbb{D}$ même si f est seulement une distribution, et $P_r * f$ converge vers f au sens des distributions quand $r \to 1^-$. Il est naturel de considérer la question de la convergence de $P_r * f$ vers f quand $r \to 1$, pour f appartenant à différentes classes fonctionnelles.

Définition 3.14. Pour $1 \le p < \infty$ on définit le "petit" espace de Hardy

$$h^p(\mathbb{D}) := \left\{ u : \mathbb{D} \to \mathbb{C} : u \text{ harmonique et } \sup_{0<r<1} \int_{\mathbb{T}} |u(r\mathrm{e}^{2\pi i\theta})|^p \, \mathrm{d}\theta < \infty \right\},$$

$$|||u|||_{h^p} := \sup_{0<r<1} \|u(r\mathrm{e}^{2\pi i\theta})\|_{L^p}.$$

Lemme 3.15. *Pour tout $u \in h^1(\mathbb{D})$ il existe l'unique $\mu \in \mathscr{M}(\mathbb{T})$ tel que $u_r = P_r * \mu$ pour tout $0 \le r < 1$.*

Démonstration. Si $u \in h^1(\mathbb{T})$, alors il existe une suite $r_j \to 1^-$ telle que $u_{r_j} \to \mu \in \mathscr{M}(\mathbb{T})$ au sens faible-*. Par le Lemme 3.10, pour tout $r < 1$, $u_{rr_j} = P_r * u_{r_j}$. Quand $r_j \to 1^-$, la gauche converge uniformément vers u_r et la droite ponctuellement vers $P_r * \mu$, d'où $u_r = P_r * \mu$. □

Théorème 3.16. *(i) L'application*

$$\mathscr{M}(\mathbb{T}) \ni \mu \mapsto F_r(\theta) := (P_r * \mu)(\theta) \tag{3.1}$$

est une isométrie $\mathscr{M}(\mathbb{T}) \to h^1(\mathbb{D})$. De plus, pour tout $\mu \in \mathscr{M}(\mathbb{T})$, F_r converge vers μ au sens faible- quand $r \to 1^-$ et $\lim_{r\to 1^-} \|F_r\|_{L^1} = \|\mu\|_{\mathscr{M}}$.*

(ii) Les conditions suivantes sont équivalentes :

(a) $\mu(\mathrm{d}\theta) = f(\theta)\,\mathrm{d}\theta$ avec $f \in L^1(\mathbb{T})$,

(b) F_r converge dans $L^1(\mathbb{T})$ quand $r \to 1^-$,

(c) F_r converge vers f dans $L^1(\mathbb{T})$ quand $r \to 1^-$.

(iii) Pour $1 < p \le \infty$ l'application (3.1) est une isométrie $L^p(\mathbb{T}) \to h^p(\mathbb{D})$. Pour tout $1 < p < \infty$ et $f \in L^p(\mathbb{T})$, $\lim_{r\to 1^-} \|F_r - f\|_{L^p} = 0$. Si $f \in L^\infty(\mathbb{T})$, alors F_r converge vers f au sens faible- quand $r \to 1^-$.*

(iv) Les conditions suivantes sont équivalentes :

(a) $\mu(\mathrm{d}\theta) = f(\theta)\,\mathrm{d}\theta$ avec $f \in C(\mathbb{T})$,

(b) F s'étend comme une fonction continue sur $\overline{\mathbb{D}}$,

(c) F_r converge uniformément quand $r \to 1^-$.

Démonstration. La surjectivité est une conséquence du lemme précédent. Par le Lemme 3.10, on sait que pour tout $\mu \in \mathscr{M}(\mathbb{T})$

$$\lim_{r\to 1^-} \|F_r\|_{L^1} = \sup_{0<r<1} \|F_r\|_{L^1} \le \|\mu\|_{\mathscr{M}}, \tag{3.2}$$

où la dernière inégalité provient du Lemme 2.15. Par la Proposition 2.24 (iii), on sait que $F_r \to \mu$ au sens faible-*, donc par la propriété de Fatou il y a égalité dans (3.2), ce qui montre (i).

Quant à (ii), notons que (a) implique (c) grâce à la Proposition 2.24, et que (c) évidemment implique (b). Si $F_r \to g \in L^1(\mathbb{T})$, alors $\mu = g$, car on sait par (i) que $F_r \to \mu$ au sens faible-*.

Si $f \in L^p(\mathbb{T})$, $1 < p < \infty$, alors le Lemme 2.18 (i) et la Proposition 2.24 impliquent $\sup_{0<r<1} \|F_r\|_{L^p} = \lim_{r\to 1^-} \|F_r\|_{L^p} = \|f\|_{L^p}$, donc $F \in h^p(\mathbb{D})$, et aussi que $\lim_{r\to 1^-} \|F_r - f\|_{L^p} = 0$. Inversement, si $F \in h^p(\mathbb{D})$, alors F_{r_j} a une limite faible-* dans $L^p(\mathbb{T})$. En particulier $F_{r_j} \rightharpoonup f$ au sens faible-* dans $\mathscr{M}(\mathbb{T})$, donc $\mu = f \in L^p(\mathbb{T})$. Le cas $p = \infty$ est similaire à (i).

Concernant (iv), il est plutôt clair que (a) implique (b), car l'extension continue est donnée par (3.1). Aussi, (b) implique (c). Enfin, (c) implique (a) car on pose $f = \lim_{r\to 1^-} F_r$. □

Remarque 3.17. Notons que si $u \in h^1(\mathbb{D})$ et $u \ge 0$, alors la mesure au bord correspondante μ est également positive, comme une limite faible-* d'une suite de fonctions positives. De plus, l'égalité de la moyenne implique que $|||u|||_{h^1} = u(0)$.

3.4 Fonction maximale de Hardy-Littlewood

On s'intéressera maintenant à la question de la convergence presque partout $P_r * f \to f$ quand $r \to 1$. On sait que toute fonction $f \in L^1(\mathbb{T})$ est une limite dans $L^1(\mathbb{T})$ d'une suite de fonctions $g_n \in C(\mathbb{T})$. Pour chaque n on a $\|P_r * g_n - g_n\|_{L^\infty}$ quand $r \to 1^-$, et pour chaque $r < 1$ on a $\|P_r * (f - g_n)\|_{L^\infty} \to 0$ quand $n \to \infty$, mais la première limite n'est pas uniforme en n et la deuxième ne l'est pas en r. L'objectif est d'obtenir une sorte d'uniformité en r. On employera pour cela la fonction maximale de Hardy-Littlewood.

Définition 3.18. Pour tout $\mu \in \mathscr{M}(\mathbb{T})$ on définit

$$(M\mu)(\theta) := \sup\left\{\frac{|\mu|(I)}{|I|} : \theta \in I \subset \mathbb{T},\ I \text{ un intervalle ouvert}\right\}.$$

En particulier, si $\mu(\mathrm{d}x) = f(x)\,\mathrm{d}x$, on pose

$$(Mf)(\theta) := \sup\left\{\frac{1}{|I|}\int_I |f(\varphi)|\,\mathrm{d}\varphi : \theta \in I \subset \mathbb{T},\ I \text{ un intervalle ouvert}\right\}.$$

Sans changer la valeur de $(M\mu)(\theta)$, il suffit de se restreindre aux intervalles ayant les extrémités rationnelles, donc on voit que $M\mu$ est une fonction mesurable (en fait semi-continue inférieurement). Plus précisément, pour chaque $I =]q_1, q_2[$ avec $q_1, q_2 \in \mathbb{Q}$ on pose

$$(M_{q_1,q_2}\mu)(\theta) := \begin{cases} 0 & \text{si } \theta \notin I, \\ \frac{|\mu|(I)}{|I|} & \text{si } \theta \in I. \end{cases}$$

C'est une fonction semi-continue inférieurement, donc $M\mu = \sup_{q_1,q_2} M_{q_1,q_2}\mu$ aussi.

Bien évidemment, l'application $\mu \mapsto M\mu$ n'est pas un opérateur linéaire, mais un opérateur dit *sous-linéaire*, c'est à dire

$$M(\mu + \nu) \leq M\mu + M\nu \quad \text{ponctuellement, pour tous } \mu, \nu \in \mathscr{M}(\mathbb{T}).$$

Remarque 3.19. Dans la définition de la fonction maximale, certains auteurs préfèrent considérer les intervalles de la forme $I =]\theta - \epsilon, \theta + \epsilon[$ au lieu de tous les intervalles I contenant θ. Cela n'altérerait qu'assez peu la théorie qui suivra.

On aura besoin du concept général suivant.

Définition 3.20. Soit (X, μ) un espace mesurable et $1 \leq p < \infty$. On dit qu'une fonction mesurable $g : X \to \mathbb{C}$ appartient à l'espace L^p-faible si

$$\|g\|_{L^{p,\infty}}^p := \sup_{\lambda > 0}\big(\lambda^p \mu(\{x \in X : |g(x)| > \lambda\})\big) < \infty.$$

Par convention, on pose aussi $\|g\|_{L^{\infty,\infty}} := \|g\|_{L^\infty}$. On introduit la notation

$$m_g(\lambda) := \mu\{x : |g(x)| > \lambda\}.$$

C'est une fonction décroissante, continue à droite.

Remarque 3.21. Pour tout $\lambda > 0$ on a l'inégalité de Markov

$$\int_X |g|^p \mu(\mathrm{d}x) \geq \int_{\{|g|>\lambda\}} |g|^p \mu(\mathrm{d}x) \geq \lambda^p m_g(\lambda),$$

donc $\|g\|_{L^{p,\infty}} \leq \|g\|_{L^p}$ pour tout $1 \leq p \leq \infty$ et $g \in L^p(X)$.

Le lemme suivant relie les normes L^p aux mesures des ensembles de niveau.

Lemme 3.22. *Pour toute fonction positive mesurable $g : X \to \mathbb{R}_+$*

$$\int_X g(\theta)^p \,\mathrm{d}\theta = \int_0^\infty p\lambda^{p-1} m_g(\lambda)\,\mathrm{d}\lambda. \tag{3.3}$$

Démonstration. Considérons l'ensemble mesurable

$$X \times \mathbb{R}_+ \supset A := \{(x,\lambda) : g(x) > \lambda\}.$$

Soit χ_A sa fonction caractéristique. Par le théorème de Fubini,

$$\begin{aligned}\int_{X\times\mathbb{R}_+} p\lambda^{p-1}\chi_A(x,\lambda)\,\mathrm{d}\lambda\,\mu(\mathrm{d}x) &= \int_X \left(\int_0^\infty p\lambda^{p-1}\chi_A(x,\lambda)\,\mathrm{d}\lambda\right)\mu(\mathrm{d}x)\\ &= \int_X \left(\int_0^{g(x)} p\lambda^{p-1}\,\mathrm{d}\lambda\right)\mu(\mathrm{d}x) = \int_X g(x)^p \mu(\mathrm{d}x).\end{aligned}$$

D'un autre côté,

$$\int_{X\times\mathbb{R}_+} p\lambda^{p-1}\chi_A(x,\lambda)\,\mathrm{d}\lambda\mu(\mathrm{d}x) = \int_0^\infty p\lambda^{p-1}\left(\int_X \chi_A(x,\lambda)\mu(\mathrm{d}x)\right)\mathrm{d}\lambda,$$

ce qui est égal au membre de droite de (3.3). □

Théorème 3.23. *La fonction maximale de Hardy-Littlewood a les propriétés suivantes :*

(i) $\|M\mu\|_{L^{1,\infty}} \le 3\|\mu\|_{\mathscr{M}}$,

(ii) pour tout $1 < p \le \infty$ *il existe une constante* $C_p < \infty$ *telle que* $\|Mf\|_{L^p} \le C_p\|f\|_{L^p}$ *pour tout* $f \in L^p(\mathbb{T})$.

Démonstration. Soit $\mu \in \mathscr{M}(\mathbb{T})$ et $0 < \lambda < \infty$. Il faut montrer que $|\{\theta : (M\mu)(\theta) > \lambda\}| \le 3\lambda^{-1}\|\mu\|_{\mathscr{M}}$. Par la régularité de la mesure de Lebesgue, il suffit de vérifier que pour tout ensemble compact $K \subset \mathbb{T}$ tel que $(M\mu)(\theta) > \lambda$ pour tout $\theta \in K$, on a $|K| \le 3\lambda^{-1}\|\mu\|_{\mathscr{M}}$. Par la définition de M, pour tout $\phi \in K$ il existe un intervalle ouvert $I_\phi \subset \mathbb{T}$ tel que

$$\int_{I_\phi} |\mu|(\mathrm{d}\theta) > \lambda |I_\phi|.$$

On en extrait une famille fini $I_{\phi_1}, \dots, I_{\phi_M}$. On va montrer qu'il existe une sous-famille

$$J_j =]x_j - a_j, x_j + a_j[\in \{I_{\phi_1}, \dots, I_{\phi_M}\}$$

d'intervalles disjoints tels que $K \subset \cup_{j=1}^L]x_j - 3a_j, x_j + 3a_j[$ (c'est la version “finie” du lemme de recouvrement de Vitali). Pour cela, on définit $]x_1 - a_1, x_1 + a_1[$ comme l'intervalle le plus long parmi $I_{\phi_1}, \dots, I_{\phi_K}$. Ensuite, on enlève tous les intervalles contenus dans $]x_1 - 3a_1, x_1 + 3a_1[$, et on continue par récurrence.

D'un côté, $|K| \le 3\sum_{j=1}^L 2a_j$. D'un autre côté,

$$\sum_{j=1}^L 2a_j\lambda < \sum_{j=1}^L \int_{x_j-a_j}^{x_j+a_j} |\mu|(\mathrm{d}\theta) \le \|\mu\|_{\mathscr{M}}.$$

Pour montrer (ii), observons d'abord que

$$\|Mf\|_{L^\infty} \leq \|f\|_{L^\infty}$$

pour toute fonction bornée f. Soit $f \in L^1(\mathbb{T})$ et $A := \{(\theta,\lambda) : \lambda < 2|f(\theta)|\}$. On va démontrer que pour tout $\lambda > 0$

$$m_{Mf}(\lambda) \leq \frac{6}{\lambda}\int_0^1 \chi_A(\theta,\lambda)|f(\theta)|\,\mathrm{d}\theta. \tag{3.4}$$

En effet, soit $f_1 := \chi_A(\theta,\lambda)f(\theta)$ et $f_2(\theta) := (1-\chi_A(\theta,\lambda))f(\theta)$. On a alors $\|f_2\|_{L^\infty} \leq \lambda/2$, donc $\|Mf_2\|_{L^\infty} \leq \lambda/2$, donc

$$\begin{aligned}
|\{Mf > \lambda\}| &= |\{M(f_1+f_2) > \lambda\}| \leq |\{Mf_1 + Mf_2 > \lambda\}| \leq |\{Mf_1 > \lambda/2\}| + |\{Mf_2 > \lambda/2\}| \\
&\leq \frac{2}{\lambda}\|Mf_1\|_{L^{1,\infty}} + 0 \leq \frac{6}{\lambda}\|f_1\|_{L^1} = \frac{6}{\lambda}\int_0^1 \chi_A(\theta,\lambda)|f(\theta)|\,\mathrm{d}\theta,
\end{aligned}$$

ce qui prouve (3.4).

Si $f \in L^p(\mathbb{T})$, alors le Lemme 3.22 nous permet de conclure que

$$\begin{aligned}
\int_0^1 (Mf)(\theta)^p\,\mathrm{d}\theta &= \int_0^\infty p\lambda^{p-1}m_{Mf}(\lambda)\,\mathrm{d}\lambda \leq \int_0^\infty p\lambda^{p-1}\frac{6}{\lambda}\int_0^1 \chi_A(\theta,\lambda)|f(\theta)|\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\lambda \\
&= \frac{6p}{p-1}\int_0^1 |f(\theta)|\int_0^\infty (p-1)\lambda^{p-2}\chi_A(\theta,\lambda)\,\mathrm{d}\lambda\,\mathrm{d}\theta \\
&= \frac{6p}{p-1}\int_0^1 |f(\theta)|\int_0^{2|f(\theta)|} (p-1)\lambda^{p-2}\,\mathrm{d}\lambda\,\mathrm{d}\theta \\
&= \frac{6p}{p-1}\int_0^1 |f(\theta)|(2|f(\theta)|)^{p-1}\,\mathrm{d}\theta = \frac{6p\times 2^{p-1}}{p-1}\int_0^1 |f(\theta)|^p\,\mathrm{d}\theta,
\end{aligned}$$

ce qui est l'inégalité désirée avec $C_p = 2\big(3p/(p-1)\big)^{\frac{1}{p}}$. □

Remarque 3.24. Dans un exercice, on va améliorer la constante et obtenir $C_p = \frac{p}{p-1}(3p)^{\frac{1}{p}}$, ce qui n'est certainement pas la constante optimale, mais a le petit avantage de converger vers la constante optimale 1 lorsque $p \to \infty$.

La méthode de démonstration de (ii) présentée ici s'appelle *interpolation réelle*, et on a démontré en fait un cas particulier du *théorème d'interpolation de Marcinkiewicz*.

3.5 Convergence presque partout

Définition 3.25. On dit qu'une approximation de l'identité $(\Phi_N)_{N\in\mathbb{N}}$ est *radialement bornée* si

(H4) il existe une suite de fonctions Ψ_N paires et décroissantes, c'est-à-dire $\Psi_N(\theta) \leq \Psi_N(\phi)$ pour tous $0 \leq \phi \leq \theta \leq \frac{1}{2}$ et tout N, telle que $\sup_N \|\Psi_N\|_{L^1} < \infty$ et $|\Phi_N| \leq \Psi_N$ pour tout N.

Le lemme suivant fournit un contrôle uniforme des convolutions, nécessaire pour échanger les limites.

Lemme 3.26. *Si* (Φ_N) *est une suite de fonctions vérifiant (H4) et* $\mu \in \mathscr{M}(\mathbb{T})$*, alors*

$$\sup_N |\Phi_N * \mu(\theta)| \le \big(\sup_N \|\Psi_N\|_{L^1}\big)(M\mu)(\theta), \qquad \textit{pour presque tout } \theta \in \mathbb{T}.$$

Démonstration. On observe d'abord que pour presque tout $\theta \in \mathbb{T}$

$$|\Phi_N * \mu(\theta)| \le (\Psi_N * |\mu|)(\theta),$$

donc il suffit de montrer que pour tout $\Psi \in L^1(\mathbb{T})$ paire et décroissant, et tout μ positif on a

$$(\Psi * \mu)(\theta) \le \|\Psi\|_{L^1}(M\mu)(\theta), \qquad \text{pour presque tout } \theta \in \mathbb{T}. \tag{3.5}$$

En remplaçant $\Psi(a)$ par $\lim_{\omega\to a^-}\Psi(\omega)$ pour $0 < a \le \frac{1}{2}$, on peut supposer, sans perdre la généralité, que Ψ est continue à gauche sur $]0,\frac{1}{2}]$. Soit ν la mesure telle que $\nu\big([a,1/2]\big) = \Psi(a)$ pour tout $0 < a \le \frac{1}{2}$. Par des arguments standard, cela détermine bien une unique mesure borélienne positive sur $]0,\frac{1}{2}]$. En utilisant le théorème de Fubini on trouve :

$$\begin{aligned}\int_0^1 \Psi(\theta-\omega)\mu(\mathrm{d}\omega) &= \int_0^1 \mu(\mathrm{d}\omega)\int_0^{\frac{1}{2}} \chi_{\{|\theta-\omega|\le\phi\}}\,\nu(\mathrm{d}\phi) = \int_0^{\frac{1}{2}}\int_0^1 \chi_{\{|\theta-\omega|\le\phi\}}\mu(\mathrm{d}\omega)\,\nu(\mathrm{d}\phi)\\ &\le \int_0^{\frac{1}{2}} (M\mu)(\theta)\,2\phi\;\nu(\mathrm{d}\phi) = 2(M\mu)(\theta)\int_0^{\frac{1}{2}}\int_0^{\frac{1}{2}} \chi_{\{0\le\zeta\le\phi\}}\,\mathrm{d}\zeta\,\nu(\mathrm{d}\phi)\\ &= 2(M\mu)(\theta)\int_0^{\frac{1}{2}}\int_0^{\frac{1}{2}} \chi_{\{0\le\zeta\le\phi\}}\,\nu(\mathrm{d}\phi)\,\mathrm{d}\zeta = 2(M\mu)(\theta)\int_0^{\frac{1}{2}}\Psi(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta,\end{aligned}$$

ce qui prouve (3.5) et termine la preuve. □

Théorème 3.27. *Si* $(\Phi_N)_{N=1}^{\infty}$ *vérifie (H1)–(H4), alors pour tout* $f \in L^1(\mathbb{T})$

$$\lim_{N\to\infty}(\Phi_N * f)(\theta) = f(\theta), \qquad \textit{pour presque tout } \theta \in \mathbb{T}.$$

Démonstration. Il suffit de montrer que pour tout $\epsilon > 0$ l'ensemble $\{\theta : \limsup_{N\to\infty}|(\Phi_N * f)(\theta) - f(\theta)| \ge \epsilon\}$ est de mesure de Lebesgue nulle. Si $f = g+h$ où $g \in C(\mathbb{T})$, alors $\lim_{N\to\infty}\|\Phi_N * g - g\|_{L^\infty} = 0$, donc

$$\begin{aligned}\{\theta : \limsup_{N\to\infty}|(\Phi_N * f)(\theta) - f(\theta)| \ge \epsilon\} &= \{\theta : \limsup_{N\to\infty}|(\Phi_N * h)(\theta) - h(\theta)| \ge \epsilon\}\\ &\subset \{\theta : \sup_{N\to\infty}|(\Phi_N * h)(\theta)| \ge \epsilon/2\} \cup \{\theta : |h(\theta)| \ge \epsilon/2\},\end{aligned}$$

donc

$$|\{\theta : \limsup_{N\to\infty}|(\Phi_N * f)(\theta) - f(\theta)| \ge \epsilon\}| \le \frac{2}{\epsilon}(\|\sup_N|(\Phi_N * h)|\|_{L^{1,\infty}} + \|h\|_{L^{1,\infty}}).$$

La Remarque 3.21 implique $\|h\|_{L^{1,\infty}} \le \|h\|_{L^1}$. Par le Lemme 3.26,

$$\|\sup_N|(\Phi_N * h)|\|_{L^{1,\infty}} \le \big(\sup_N\|\Psi_N\|_{L^1}\big)\|Mh\|_{L^{1,\infty}} \le 3\big(\sup_N\|\Psi_N\|_{L^1}\big)\|h\|_{L^1}.$$

Comme $\|h\|_{L^1}$ peut être rendu arbitrairement petit, la preuve est terminée. □

Corollaire 3.28. *Soit $f \in L^1(\mathbb{T})$ et $F_r := P_r * f$ son extension harmonique sur $\mathbb{D}$. Alors $\lim_{r\to 1^-} F_r(\theta) = f(\theta)$ pour Lebesgue presque tout $\theta \in \mathbb{T}$.*

Démonstration. Le noyau P_r est radial et décroissant, donc vérifie (H4). $\square$

Remarque 3.29. Voir l'Exercice 3.5 pour un résultat plus fort sur la *convergence non tangentielle*.

Corollaire 3.30. *Pour tout $f \in L^1(\mathbb{T})$,*

$$\lim_{N\to\infty}(K_N * f)(\theta) = f(\theta), \qquad \lim_{N\to\infty}(V_N * f)(\theta) = f(\theta),$$

pour presque tout $\theta \in \mathbb{T}$.

Démonstration. Il suffit de vérifier que le noyau de Féjer et celui de de la Vallée Poussin satisfont (H4). $\square$

Remarque 3.31. Kolmogorov a montré qu'il existe $f \in L^1(\mathbb{T})$ tel qu'il n'est pas vrai que $(D_N * f)(\theta)$ converge vers $f(\theta)$ pour presque tout $\theta \in \mathbb{T}$. Carleson a montré que $(D_N * f)(\theta)$ converge vers $f(\theta)$ pour presque tout $\theta \in \mathbb{T}$ si $f \in L^2(\mathbb{T})$. Hunt a obtenu la même conclusion pour $f \in L^p(\mathbb{T})$ pour tout $p > 1$.

Lemme 3.32. *Soit $u \in h^1(\mathbb{D})$, $u_r = P_r * \mu$, et posons $u^*(\theta) := \sup_{0<r<1} |u_r(\theta)|$ pour tout $\theta \in \mathbb{T}$. (On appelle u^* la* fonction maximale radiale *de la fonction harmonique u.) Alors*

(i) $u^*(\theta) \le (M\mu)(\theta)$ *pour presque tout $\theta \in \mathbb{T}$,*

(ii) $\|u^*\|_{L^{1,\infty}} \le 3|||u|||_{h^1}$.

Démonstration. L'affirmation (ii) est une conséquence directe de (i) et du Théorème 3.23. Comme les noyaux P_r sont positifs et décroissants, on obtient (i) par le Lemme 3.26. $\square$

3.6 Transformée de Hilbert sur $\mathbb{T}$

Si $u : \mathbb{D} \to \mathbb{R}$ est une fonction harmonique, alors on note $\widetilde{u} : \mathbb{D} \to \mathbb{R}$ l'unique fonction harmonique telle que $\widetilde{u}(0) = 0$ et $u + i\widetilde{u}$ est holomorphe.

Si f un polynôme trigonométrique réel, $f(\theta) = a_0 + \sum_{n=1}^N (a_n e^{2\pi i n\theta} + \overline{a}_n e^{-2\pi i n\theta})$, alors son extension harmonique est

$$u(z) = a_0 + \sum_{n=1}^N (a_n z^n + \overline{a}_n \overline{z}^n) = (P_r * f)(\theta), \qquad \text{où } z = r\mathrm{e}^{2\pi i\theta}.$$

donc on voit que

$$\widetilde{u}(z) = \sum_{n=1}^N (-i a_n z^n + i\overline{a}_n \overline{z}^n) = (Q_r * f)(\theta), \quad Q_r(\theta) := \sum_{n=1}^{\infty} -iz^n + \sum_{n=-\infty}^{-1} i\overline{z}^{|n|} = \frac{2r\sin(2\pi\theta)}{1 - 2r\cos(2\pi\theta) + r^2}$$

(la dernière formule sera vérifiée dans l'Exercice 3.1). La restriction au cercle unité,

$$g(\theta) = \widetilde{u}(\mathrm{e}^{2\pi i\theta}) = \sum_{n=1}^N (-i a_n \mathrm{e}^{2\pi i n\theta} + i\overline{a}_n \mathrm{e}^{-2\pi i n\theta}),$$

est un polynôme trigonométrique $\mathbb{T} \to \mathbb{R}$ qu'on appelle la *transformée de Hilbert* de f et on écrit $g = Hf$. On étend H sur l'ensemble des polynômes trigonométriques à valeurs dans $\mathbb{C}$ en demandant que H soit $\mathbb{C}$-linéaire. Ensuite, on l'étend sur d'autres espaces par densité, ce qui conduit à la définition suivante.

Définition 3.33. Pour toute distribution $\phi \in \mathscr{S}'(\mathbb{T})$ on définit sa *transformée de Hilbert* $H\phi \in \mathscr{S}'(\mathbb{T})$ par la condition

$$(\widehat{H\phi})(n) = -i\,\mathrm{sgn}(n)\widehat{\phi}(n),$$

où $\mathrm{sgn}(n) = 1$ pour $n > 0$, $\mathrm{sgn}(0) = 0$ et $\mathrm{sgn}(n) = -1$ pour $n < 0$.

Si $\phi \in \mathscr{S}'(\mathbb{T})$ et $f \in \mathscr{S}(\mathbb{T})$, alors, en utilisant le Corollaire 2.51, on trouve

$$(H\phi)(f) = \sum_{n\in\mathbb{Z}}(-i)\,\mathrm{sgn}(n)\widehat{\phi}(n)\widehat{f}(-n) = -\sum_{n\in\mathbb{Z}}\widehat{\phi}(n)(-i)\,\mathrm{sgn}(-n)\widehat{f}(-n) = -\phi(Hf). \tag{3.6}$$

Proposition 3.34. *Pour tout $f \in \mathscr{S}'(\mathbb{T};\mathbb{C})$ et $|z| < 1$*

$$F(z) := ((P_r + iQ_r) * f)(\theta) = (P_r * (f + iHf))(\theta) = \widehat{f}(0) + 2\sum_{n=1}^{\infty}\widehat{f}(n)z^n, \qquad \textit{pour tout } |z| < 1,$$

en particulier $F : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ est une fonction holomorphe.

Autrement dit, Hf est l'unique (à une constante près) distribution telle que l'extension harmonique de $f + iHf$ sur $\mathbb{D}$ est une fonction holomorphe. Comme un sous-produit, on voit que $Q_r * f = P_r * (Hf)$ pour tout $f \in \mathscr{S}'(\mathbb{T})$, donc, par la Proposition 3.11, $Q_r * f \to Hf$ quand $r \to 1^-$ dans la topologie $\mathscr{S}'(\mathbb{T})$.

Démonstration de la Proposition 3.34. La suite $a_n := \widehat{f}(n)$ est à croissance polynômiale, donc la formule $G(z) := \widehat{f}(0) + 2\sum_{n=1}^{\infty}\widehat{f}(n)z^n$ définit une fonction holomorphe sur $\mathbb{D}$. En comparant les coefficients de Fourier on vérifie que les deux autres formules définissent la même fonction. □

Proposition 3.35. *Pour tout $s \in \mathbb{R}$ et $f \in H^s(\mathbb{T})$, $\|Hf\|_{H^s} = \|f\|_{H^s}$.*

Démonstration. Cela résulte directement de la définition de la norme H^s. □

On passe maintenant à la question de la continuité de la transformée de Hilbert dans $L^p(\mathbb{T})$ pour $1 < p < \infty$. La clé est d'obtenir des estimations dans l'espace L^1-faible.

Proposition 3.36. *Il existe $C > 0$ tel que pour tout $u \in h^1(\mathbb{D})$ il y a $\|\widetilde{u}^*\|_{L^{1,\infty}} \leq C|||u|||_{h^1}$, autrement dit pour tout $\lambda > 0$*

$$\big|\{\theta \in \mathbb{T} : \widetilde{u}^*(\theta) > \lambda\}\big| = \big|\{\theta \in \mathbb{T} : \sup_{0<r<1}|\widetilde{u}_r(\theta)| > \lambda\}\big| \leq \frac{C}{\lambda}|||u|||_{h^1}.$$

Démonstration. D'abord, on explique comment réduire le problème au cas $u \geq 0$. Soit $\mu = \mu^{(1)} - \mu^{(2)} + i\mu^{(3)} - i\mu^{(4)}$ la mesure au bord correspondante à u par le Théorème 3.16 (i), avec $\mu^{(j)} \geq 0$ pour $j \in \{1,2,3,4\}$. Soit $u^{(j)}(z) := P_r * \mu^{(j)}(\theta)$, donc $u = u^{(1)} - u^{(2)} + iu^{(3)} - iu^{(4)}$ et $\widetilde{u} = \widetilde{u^{(1)}} - \widetilde{u^{(2)}} + i\widetilde{u^{(3)}} - i\widetilde{u^{(4)}}$. On voit que

$$\big|\{\theta \in \mathbb{T} : \sup_{0<r<1}|\widetilde{u}_r(\theta)| > \lambda\}\big| \subset \bigcup_{j=1}^{4}\big|\{\theta \in \mathbb{T} : \sup_{0<r<1}|\widetilde{u^{(j)}}_r(\theta)| > \frac{\lambda}{2\sqrt{2}}\}\big|.$$

Il suffit donc, quitte à modifier la constante C, de traiter le cas $u \geq 0$. Comme u est harmonique, en fait $u(z) > 0$ pour $z \in \mathbb{D}$. Soit $F := i(u + i\widetilde{u}) = -\widetilde{u} + iu$, $F : \mathbb{D} \to \{z = x + iy : y > 0\}$ holomorphe. On va montrer dans un instant que pour tout $\lambda > 0$ il existe une fonction harmonique positive $\omega_\lambda(z)$, définie pour tout $y > 0$ et telle que

— $|x| > \lambda \Rightarrow \omega_\lambda(z) > \frac{1}{2}$,

— $\omega_\lambda(iy) \le \frac{2y}{\pi\lambda}$.

Supposons que c'est vrai et considérons la fonction harmonique $\omega_\lambda \circ F$. On va appliquer le Lemme 3.32 (ii) à cette fonction. Observons d'abord que, voir Remarque 3.17,

$$|||\omega_\lambda \circ F|||_{h^1} = \omega_\lambda \circ F(0) = \omega_\lambda(iu(0)) = \omega_\lambda(i|||u|||_{h^1}) \le \frac{2|||u|||_{h^1}}{\pi\lambda}.$$

Ensuite, si $\widetilde{u}^*(\theta) > \lambda$, alors il existe $0 < r < 1$ tel que $|\widetilde{u}_r(\theta)| > \lambda$, ce qui implique, avec $z = re^{2\pi i\theta}$, $\omega_\lambda \circ F(z) > \frac{1}{2}$, donc $(\omega_\lambda \circ F)^*(\theta) > \frac{1}{2}$, autrement dit

$$\left\{\theta \in \mathbb{T} : \widetilde{u}^*(\theta) > \lambda\right\} \subset \left\{\theta \in \mathbb{T} : (\omega_\lambda \circ F)^*(\theta) > \frac{1}{2}\right\},$$

on en déduirait donc que

$$\left|\left\{\theta \in \mathbb{T} : \widetilde{u}^*(\theta) > \lambda\right\}\right| \le \left|\left\{\theta \in \mathbb{T} : (\omega_\lambda \circ F)^*(\theta) > \frac{1}{2}\right\}\right| \le 3 \times 2|||\omega_\lambda \circ F|||_{h^1} \le \frac{12|||u|||_{h^1}}{\pi\lambda}.$$

Un choix possible pour la fonction ω_λ est donné par

$$\omega_\lambda(x,y) := \frac{1}{\pi}\int_{A_\lambda} \frac{y\,\mathrm{d}t}{(x-t)^2+y^2}, \qquad \text{avec } A_\lambda :=]-\infty,-\lambda[\, \cup\,]\lambda,\infty[.$$

La fonction $\frac{1}{\pi}\frac{y}{x^2+y^2} = \frac{1}{2\pi i}\left(\frac{1}{\bar{z}} - \frac{1}{z}\right)$ est harmonique pour $y > 0$, donc ω_λ aussi, par dérivation sous le signe de l'intégrale. Par un calcul direct on vérifie que

$$\omega_\lambda(iy) = \frac{1}{\pi}\int_{A_\lambda} \frac{y\,\mathrm{d}t}{t^2+y^2} = \frac{2}{\pi}\arctan\left(\frac{y}{\lambda}\right) \le \frac{2y}{\pi\lambda},$$

et que si, par exemple, $x > \lambda$, alors

$$\omega_\lambda(x+iy) > \frac{1}{\pi}\int_\lambda^\infty \frac{y\,\mathrm{d}t}{(t-x)^2+y^2} > \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{y\,\mathrm{d}t}{t^2+y^2} = \frac{1}{2}.$$

□

Remarque 3.37. La fonction ω_λ est l'extension harmonique de la fonction indicatrice de l'ensemble A_λ sur le demi-plan $y > 0$, et $\frac{1}{\pi}\frac{y}{x^2+y^2}$ est en fait le noyau de Poisson de ce demi-plan.

Corollaire 3.38. *Il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout $f \in L^2(\mathbb{T})$*

$$\|Hf\|_{L^{1,\infty}} \le C\|f\|_{L^1}. \tag{3.7}$$

Démonstration. Rappelons que (3.7) signifie que

$$\left|\{\theta \in \mathbb{T} : |(Hf)(\theta)| > \lambda\}\right| \le \frac{C}{\lambda}\|f\|_{L^1}, \qquad \text{pour tout } \lambda > 0.$$

Soit $u_r := P_r * f$ et $\widetilde{u}$ sa fonction conjuguée, donc $\widetilde{u}_r = Q_r * f = P_r * (Hf)$. Comme on suppose $f \in L^2(\mathbb{T})$, on a $Hf \in L^2(\mathbb{T}) \subset L^1(\mathbb{T})$, donc le Corollaire 3.28 implique $\lim_{r\to 1^-} \widetilde{u}_r(\theta) = (Hf)(\theta)$ pour presque tout $\theta \in \mathbb{T}$. En particulier, $|(Hf)(\theta)| \le \widetilde{u}^*(\theta)$ pour presque tout $\theta \in \mathbb{T}$, et il suffit d'évoquer la Proposition 3.36. □

Corollaire 3.39. *Pour tout $1 < p < \infty$ il existe $C = C(p)$ tel que*

$$\|Hf\|_{L^p} \le C\|f\|_{L^p}, \qquad \textit{pour tout } f \in L^p(\mathbb{T}). \tag{3.8}$$

Démonstration. On sait que $\|Hf\|_{L^2} \le \|f\|_{L^2}$ et $\|Hf\|_{L^{1,\infty}} \le C\|f\|_{L^1}$ pour tout $f \in L^2(\mathbb{T})$. Par le Théorème 3.49, voir l'Exercice 3.4, on obtient (3.8) pour tout $f \in L^2(\mathbb{T})$ et $1 < p \le 2$. Si maintenant $f \in L^p(\mathbb{T})$, alors soit $f_k \in L^2(\mathbb{T})$ une suite telle que $\lim_{k\to\infty} \|f - f_k\|_{L^p} = 0$. Alors (3.8) implique que Hf_k est une suite de Cauchy dans $L^p(\mathbb{T})$, donc il existe $g \in L^p(\mathbb{T})$ tel que $\lim_{k\to\infty} \|Hf_k - g\|_{L^p} = 0$ et $\|g\|_{L^p} = \lim_{k\to\infty} \|Hf_k\|_{L^p} \le C \lim_{k\to\infty} \|f_k\|_{L^p} = C\|f\|_{L^p}$. Il reste à montrer que $Hf = g$ comme distributions, ce qui est vrai car, pour tout $h \in \mathscr{S}(\mathbb{T})$, (3.6) donne

$$(Hf)(h) = -f(Hh) = -\lim_{k\to\infty} f_k(Hh) = \lim_{k\to\infty} (Hf_k)(h) = g(h).$$

Ensuite, soit $2 \le p < \infty$, $p' \in]1,2]$ l'exposant dual et $f \in L^p(\mathbb{T}) \subset L^2(\mathbb{T})$. Pour tout $g \in L^2(\mathbb{T})$ on a

$$\begin{aligned}\left|\int_0^1 \overline{g(\theta)}(Hf)(\theta)\,\mathrm{d}\theta\right| &= \left|\sum_{n\in\mathbb{Z}} \overline{\widehat{g}(n)}(-i)\,\mathrm{sgn}(n)\widehat{f}(n)\right| = \left|-\sum_{n\in\mathbb{Z}} \overline{(-i)\,\mathrm{sgn}(n)\widehat{g}(n)}\widehat{f}(n)\right| \\ &= \left|\int_0^1 \overline{(Hg)(\theta)}f(\theta)\,\mathrm{d}\theta\right| \le \|Hg\|_{L^{p'}}\|f\|_{L^p} \le C\|g\|_{L^{p'}}\|f\|_{L^p},\end{aligned}$$

ce qui implique $Hf \in L^p(\mathbb{T})$ et (3.8). □

Théorème 3.40. *Pour tout $1 < p < \infty$ la famille $\{S_N\}$ est bornée dans $\mathscr{L}(L^p(\mathbb{T}))$.*

Démonstration. Il suffit de montrer qu'il existe une constante $C > 0$, indépendente de N, telle que $\|S_N f\|_{L^p} \le C$ pour tout polynôme trigonométrique f tel que $\|f\|_{L^p} \le 1$.

On revient dans cette preuve aux notation du Chapitre 2, donc x désigne un élément de $\mathbb{T}$. Pour un polynôme trigonométrique g notons $(P_+g)(x) := \sum_{n=1}^{\infty} \widehat{g}(n)\mathrm{e}^{2\pi inx}$. Alors

$$\begin{aligned}\mathrm{e}^{-2\pi i(N+1)x}P_+(\mathrm{e}^{2\pi i(N+1)x}f) &= \sum_{n\ge -N} \widehat{f}(n)\mathrm{e}^{2\pi inx}, \\ \mathrm{e}^{2\pi iNx}P_+(\mathrm{e}^{-2\pi iNx}f) &= \sum_{n\ge N+1} \widehat{f}(n)\mathrm{e}^{2\pi inx},\end{aligned}$$

et la différence des deux c'est exactement $S_N f$. La preuve sera donc fini si $\|P_+g\|_{L^p} \le \frac{1}{2}C$ pour tout polynôme trigonométrique g tel que $\|g\|_{L^p} \le 1$, ce qui est vrai car $P_+g = \frac{1}{2}iHg + \frac{1}{2}g - \frac{1}{2}\widehat{g}(0)$. □

3.7 Représentation de la transformée de Hilbert comme convolution

Par la définition, la transformée de Hilbert H est un multiplicateur de Fourier, elle peut donc s'écrire comme produit de convolution avec une distribution :

$$Hf = Q * f, \qquad \text{où } Q \text{ est caractérisé par } \widehat{Q}(n) = -i\,\mathrm{sgn}(n).$$

Peut-on écrire Q avec une formule explicite ? En regardant les coefficients de Fourier on voit que $Q_r \to Q$ au sens $\mathscr{S}'(\mathbb{T})$ quand $r \to 1^-$, donc on est tenté d'écrire

$$Q(\theta) = \lim_{r\to 1^-} Q_r(\theta) = \lim_{r\to 1^-} \frac{2r\sin(2\pi\theta)}{1 - 2r\cos(2\pi\theta) + r^2} = \cot(\pi\theta),$$

mais comme cette fonction n'est pas intégrable, il n'est pas clair quelle est sa signification comme distribution. La réponse est qu'il faut l'interpréter au sens de la valeur principale.

Lemme 3.41. *Pour tout $f \in \mathscr{S}(\mathbb{T})$*

$$Q(f) = \lim_{\epsilon \to 0^+} \int_{|\phi|>\epsilon} \cot(\pi\phi) f(\phi)\, \mathrm{d}\phi.$$

Démonstration. Écrivons $f(\phi) = f(0) + \sin(\pi\phi) g(\phi)$ avec $\|g\|_{L^\infty} \le \|f'\|_{L^\infty}$. Alors

$$\lim_{\epsilon \to 0^+} \int_{|\phi|>\epsilon} \cot(\pi\phi) f(\phi)\, \mathrm{d}\phi = \int_0^1 \cos(\pi\phi) g(\phi)\, \mathrm{d}\phi.$$

Pour calculer $Q(f)$, on utilise le fait que $Q(f) = \lim_{r\to 1^-} Q_r(f)$. Par la formule pour Q_r, on trouve

$$\int_0^1 Q_r(\phi) f(\phi)\, \mathrm{d}\phi = \int_0^1 \frac{2r\sin(2\pi\phi)\sin(\pi\phi)}{1 - 2r\cos(2\pi\phi) + r^2} g(\phi)\, \mathrm{d}\phi.$$

Par des identités trigonométriques, après un peu de calcul, on obtient

$$\int_0^1 \left| \frac{2r\sin(2\pi\phi)\sin(\pi\phi)}{1-2r\cos(2\pi\phi)+r^2} - \cos(\pi\phi) \right| \mathrm{d}\phi = \int_0^1 \frac{(1-r)^2}{1-2r\cos(2\pi\phi)+r^2} |\cos(\pi\phi)|\, \mathrm{d}\phi \to 0$$

quand $r \to 1^-$, donc $\lim_{r\to 1^-} \int_0^1 Q_r(\phi) f(\phi)\, \mathrm{d}\phi = \int_0^1 \cos(\pi\phi) g(\phi)\, \mathrm{d}\phi$. □

Corollaire 3.42. *Soit $Q_\epsilon := \chi_{\{|\theta|>\epsilon\}} \cot(\pi\theta)$. Pour tout $\phi \in \mathscr{S}'(\mathbb{T})$*

$$\lim_{\epsilon \to 0^+} Q_\epsilon * \phi = Q * \phi = H\phi \qquad \text{au sens } \mathscr{S}'(\mathbb{T}). \tag{3.9}$$

Démonstration. Comme corollaire de la preuve, on voit en fait que pour tout $f \in \mathscr{S}(\mathbb{T})$ et tout $\epsilon > 0$ on a $|Q_\epsilon(f)| \le \|f'\|_{L^\infty}$, en particulier $|\widehat{Q}_\epsilon(n)| \le 2\pi|n|$. (En réalité, $|\widehat{Q}_\epsilon(n)| \le C$ avec C qui ne dépend ni de n, ni de ϵ, mais on n'en a pas besoin pour cette preuve.) Si $f \in \mathscr{S}(\mathbb{T})$, alors la suite $\widehat{\phi}(n)\widehat{f}(-n)$ décroit plus vite que toute fonction rationnelle, donc

$$(Q_\epsilon * \phi)(f) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \widehat{Q}_\epsilon(n)\widehat{\phi}(n)\widehat{f}(-n) \to \sum_{n\in\mathbb{Z}} \widehat{Q}(n)\widehat{\phi}(n)\widehat{f}(-n) = (Q*\phi)(f).$$

□

Une question naturelle est si on aurait pu démontrer les bornes $L^{1,\infty}$ et L^p sur la transformée de Hilbert en se basant sur (3.9) au lieu d'exploiter le lien avec les fonctions harmoniques et holomorphes. Il s'avère que c'est possible, on y reviendra.

Proposition 3.43. *Pour tout $0 < \alpha < 1$ il existe $C = C(\alpha)$ tel que*

$$\|Hf\|_{C^{0,\alpha}} \le C\|f\|_{C^{0,\alpha}}.$$

Démonstration. On la fera comme exercice quand on parlera de la théorie de Calderón-Zygmund. □

3.8 Théorème d'interpolation de Marcinkiewicz (*)

La démonstration du Théorème 3.23 (ii) reposait sur une décomposition de la fonction f selon ses ensembles de niveau. On présente dans cette section (facultative) un résultat plus général, où cette même idée est exploitée. Voici notre objectif.

Théorème 3.44. *Soit (X,μ) et (Y,ν) deux espaces mesurables. Soit T une application qui à toute fonction étagée dont le support est de mesure finie associe une fonction mesurable $Y \to \mathbb{C}$, et supposons qu'il existe $K > 0$ tel que pour toutes fonctions étagées f et g*

$$|T(f+g)| \le |Tf| + |Tg|, \qquad \textit{presque partout}. \tag{3.10}$$

Soit $1 \le p_1, p_2 \le \infty$, $q_1 \ge p_1$, $q_2 \ge p_2$ et $q_1 \ne q_2$. Pour tout $0 < \theta < 1$ soit p_θ et q_θ les nombres définis par les conditions

$$\frac{1}{p_\theta} = \frac{\theta}{p_1} + \frac{1-\theta}{p_2}, \qquad \frac{1}{q_\theta} = \frac{\theta}{q_1} + \frac{1-\theta}{q_2}. \tag{3.11}$$

Supposons que $\|Tf\|_{L^{q_j,\infty}(X)} \le A_j \|f\|_{L^{p_j}(X)}$, $j \in \{0,1\}$. Alors pour tout $0 < \theta < 1$ il existe $A_\theta > 0$ tel que

$$\|Tf\|_{L^{q_\theta}} \le A_\theta \|f\|_{L^{p_\theta}}.$$

Il existe d'autres versions de ce théorème, ainsi que plusieurs démonstrations (en utilisant notamment les *espaces de Lorentz* dont on ne parlera pas dans ce cours). Celle qu'on verra ici peut être trouvée dans [7]. Notons que le cas $p_1 = q_1$ et $p_2 = q_2$ est plus simple que le cas général, on le traite dans l'Exercice 3.4. La référence standard pour la théorie d'interpolation est [1]. Le premier chapitre de [3] contient une présentation plus concise du sujet, et pourtant suffisante pour beaucoup d'applications.

Remarque 3.45. Le théorème reste vrai si on remplace (3.10) par $|T(f+g)| \le K(|Tf| + |Tg|)$ pour une constante $K < \infty$, mais le preuve qu'on donnera ici ne s'applique pas.

On a besoin d'un peu de préparation. L'idée principale sera, tout comme dans la preuve du Théorème 3.23 (ii), de décomposer une fonction donnée selon ses lignes de nivaux.

Lemme 3.46. *Pour toute fonction positive mesurable $g : X \to \mathbb{R}_+$ et $1 \le p < \infty$*

$$(1-2^{-p}) \sum_{n\in\mathbb{Z}} 2^{np} m_g(2^n) \le \int_0^1 g(\theta)^p \,\mathrm{d}\theta \le (2^p - 1) \sum_{n\in\mathbb{Z}} 2^{np} m_g(2^n).$$

Démonstration. Par le Lemme 3.46,

$$\int_0^1 g(\theta)^p \,\mathrm{d}\theta = \int_0^\infty p\lambda^{p-1} m_g(\lambda)\,\mathrm{d}\lambda = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \int_{2^n}^{2^{n+1}} p\lambda^{p-1} m_g(\lambda)\,\mathrm{d}\lambda.$$

Clairement, $m_g(\lambda) \le m_g(2^n)$ pour $\lambda \in [2^n, 2^{n+1}]$ et $m_g(\lambda) \ge m_g(2^n)$ pour $\lambda \in [2^{n-1}, 2^n]$, donc

$$\int_0^1 g(\theta)^p \,\mathrm{d}\theta \le \sum_{n\in\mathbb{Z}} m_g(2^n) \int_{2^n}^{2^{n+1}} p\lambda^{p-1}\,\mathrm{d}\lambda = (2^p - 1) \sum_{n\in\mathbb{Z}} 2^{np} m_g(2^n)$$

et

$$\int_0^1 g(\theta)^p \,\mathrm{d}\theta \ge \sum_{n\in\mathbb{Z}} m_g(2^n) \int_{2^{n-1}}^{2^n} p\lambda^{p-1}\,\mathrm{d}\lambda = (1-2^{-p}) \sum_{n\in\mathbb{Z}} 2^{np} m_g(2^n).$$

□

Remarque 3.47. Ici et plus tard, on écrira $A \lesssim B$ s'il existe une constante universelle (c'est-à-dire, qui ne dépend d'aucune autre quantité considérée dans le problème) telle que $A \le CB$. De manière analogue, $A \gtrsim B$ si $A \ge CB$ et $A \simeq B$ si $A \lesssim B$ et $A \gtrsim B$. On écrit $A \lesssim_{p_1,p_2,\ldots} B$ etc. si $A \le CB$ avec C qui peut dépendre des quantités $p_1, p_2, \ldots$.

Démonstration du Théorème 3.44. Traitons d'abord le cas $q_1, q_2 < \infty$. Par la symétrie on peut supposer $p_1 \le p_2$. Le cas particulier $p_1 = p_2$ est plus facile, on suppose donc que $p_1 < p_2$. Soit $f : X \to \mathbb{C}$ une fonction mesurable. On écrit $p = p_\theta$ et $q = q_\theta$. Sans perdre la généralité supposons que

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} 2^{np} m_f(2^n) = 1 \quad \Rightarrow \quad \|f\|_{L^p} \simeq_p 1. \tag{3.12}$$

On la décompose selon ses lignes de niveaux :

$$f = \sum_{k\in\mathbb{Z}} f_k := \sum_{k\in\mathbb{Z}} \chi_{\{2^k < |f| \le 2^{k+1}\}} f.$$

Notons que $f_k \neq 0$ seulement pour un nombre fini d'indices $k \in \mathbb{Z}$ pour une fonction étagée f.

Pour tout $k \in \mathbb{Z}$ et $0 < \lambda < \infty$ on a

$$m_{Tf_k}(\lambda) \le \lambda^{-q_1} \|Tf_k\|_{L^{q_1,\infty}}^{q_1} \le \lambda^{-q_1} A_1^{q_1} \|f_k\|_{L^{p_1}}^{q_1} \lesssim_{A_1,q_1} \lambda^{-q_1} 2^{q_1 k} m_f(2^k)^{\frac{q_1}{p_1}}.$$

De manière similaire,

$$m_{Tf_k}(\lambda) \lesssim_{A_2,q_2} \lambda^{-q_2} 2^{q_2 k} m_f(2^k)^{\frac{q_2}{p_2}}.$$

On peut vérifier facilement que pour $\lambda \le 2^k m_f(2^k)^{\frac{p_1}{p_2}}$ la première estimation est plus intéressante, alors que pour $\lambda \ge 2^k m_f(2^k)^{\frac{p_1}{p_2}}$ la deuxième remporte.

Rappelons que notre but est d'obtenir une estimation sur $\sum_{n\in\mathbb{Z}} 2^{nq} m_{Tf}(2^n)$. Soit $c_{n,k} \ge 0$ pour $n, k \in \mathbb{Z}$ et pour tout $n \in \mathbb{Z}$

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} c_{n,k} \le 1. \tag{3.13}$$

Comme $|Tf| \le \sum_{k\in\mathbb{Z}} |Tf_k|$, on a

$$m_{Tf}(2^n) \le \sum_{k\in\mathbb{Z}} m_{Tf_k}(c_{n,k} 2^n) \lesssim_{A_j,q_j} \sum_{k\in\mathbb{Z}} \min\Big((c_{n,k}2^n)^{-q_1} 2^{q_1 k} m_f(2^k)^{\frac{q_1}{p_1}}, (c_{n,k}2^n)^{-q_2} 2^{q_2 k} m_f(2^k)^{\frac{q_2}{p_2}}\Big).$$

Il reste à trouver des nombres $c_{n,k}$ vérifiant (3.13) tels qu'on puisse borner

$$\sum_{n,k\in\mathbb{Z}} 2^{qn} \min\Big((c_{n,k}2^n)^{-q_1} 2^{q_1 k} m_f(2^k)^{\frac{q_1}{p_1}}, (c_{n,k}2^n)^{-q_2} 2^{q_2 k} m_f(2^k)^{\frac{q_2}{p_2}}\Big). \tag{3.14}$$

Soit $a_k := 2^{kp} m_f(2^k)$. Par la normalisation (3.12) on a $a_k \le 1$, donc $a_k^{q_j/p_j} \le a_k$ pour $j \in \{1,2\}$, donc

$$(3.14) \le \sup_{k\in\mathbb{Z}} \sum_{n\in\mathbb{Z}} 2^{qn} \min\Big((c_{n,k}2^n)^{-q_1} 2^{(1-p/p_1)q_1 k}, (c_{n,k}2^n)^{-q_2} 2^{(1-p/p_2)q_2 k}\Big). \tag{3.15}$$

Soit $x_1 > 0 > x_2$ et $\alpha \in \mathbb{R}$ tels que $p_j^{-1} = p^{-1} + x_j$ et $q_j^{-1} = q^{-1} + \alpha x_j$ pour $j \in \{1,2\}$. Il est possible de trouver x_j et α grâce aux conditions (3.11). Avec cette notation, (3.15) devient

$$(3.14) \le \sup_{k\in\mathbb{Z}} \sum_{n\in\mathbb{Z}} \min\Big((c_{n,k})^{-q_1} 2^{(nq\alpha - kp)q_1 x_1}, (c_{n,k})^{-q_2} 2^{(nq\alpha - kp)q_2 x_2}\Big).$$

On peut prendre par exemple $c_{n,k} = c2^{-\beta|nq\alpha - kp|}$, où $0 < \beta < \min(x_1, -x_2)$ et $c > 0$ est choisi assez petit pour que (3.13) soit vérifié.

Pour $q_1 = \infty$ ou $q_2 = \infty$ la démonstration peut se faire de manière analogue. $\square$

3.9 Exercices

Exercice 3.1. Soit $0 \le r < 1$, $P_r \in \mathscr{S}(\mathbb{T})$ défini par $P_r(\theta) := \frac{1-r^2}{1-2r\cos(2\pi\theta)+r^2}$, et $Q_r \in \mathscr{S}(\mathbb{T})$ défini par $Q_r(\theta) = \frac{2r\sin(2\pi\theta)}{1-2r\cos(2\pi\theta)+r^2}$. Vérifier que $P_r(\theta) = \Re\left(\frac{1+z}{1-z}\right)$ et $Q_r(\theta) = \Im\left(\frac{1+z}{1-z}\right)$ pour $z \in \mathbb{D}$. Calculer $\widehat{P}_r(n)$ et $\widehat{Q}_r(n)$ pour $n \in \mathbb{Z}$. Montrer que $\{P_r\}_{0<r<1}$ est une approximation de l'identité, alors que $\{Q_r\}_{0<r<1}$ ne l'est pas.

Exercice 3.2. Démontrer l'égalité de la moyenne en calculant $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\int_{\mathbb{T}} u(z+r\mathrm{e}^{2\pi i\theta})\,\mathrm{d}\theta$ et en intégrant par parties.

Remarque 3.48. Il y a une formule plus générale dite *formule de Jensen* :

$$\int_{\mathbb{T}} f(z+r\mathrm{e}^{2\pi i\theta})\,\mathrm{d}\theta - f(z) = \iint_{\mathbb{D}(z;r)} \log\frac{r}{|w-z|}\Delta f(w)\,\mathrm{d}w,$$

où $\mathrm{d}w$ est la mesure de Lebesgue en dimension 2 et $\mathbb{D}(z;r) := \{w \in \mathbb{C} : |w-z| < r\}$. Vous pouvez la démontrer si vous avez le temps, en utilisant l'identité de Green par exemple.

Exercice 3.3. Le but de cet exercice est de se familiariser avec la démonstration du Théorème 3.23 en essayant d'améliorer la constante C_p.

(i) Soit $0 < \lambda < \infty$, $0 \le a \le 1$ et posons $A := \{(\theta,\lambda) : a\lambda < |f(\theta)|\}$. Montrer que

$$|\{Mf > \lambda\}| \le \frac{3}{(1-a)\lambda}\int_0^1 \chi_A(\theta,\lambda)|f(\theta)|\,\mathrm{d}\theta.$$

Observer que pour $a = 0$ on retrouve (i) du Théorème 3.23, alors qu'en prenant $\lambda > \|f\|_{L^\infty}$ et $\lambda^{-1}\|f\|_{L^\infty} < a < 1$ on obtient $\|Mf\|_{L^\infty} \le \|f\|_{L^\infty}$.

(ii) À l'aide du Lemme 3.22, en déduire que

$$\int_0^1 (Mf)(\theta)^p\,\mathrm{d}\theta \le \frac{3p}{(p-1)(1-a)a^{p-1}}\int_0^1 |f(\theta)|^p\,\mathrm{d}\theta.$$

(iii) Optimiser en a pour conclure la démonstration du Théorème 3.23 (ii) avec $C_p = \frac{p}{p-1}(3p)^{\frac{1}{p}}$.

Exercice 3.4. Le but de l'exercice est de démontrer le cas particulier suivant du théorème d'interpolation de Marcinkiewicz.

Théorème 3.49. *Soit (X,μ) et (Y,ν) deux espaces mesurables, $1 \le p_1 < p_2 \le \infty$ et T une application définie sur $L^{p_1}(X)\cap L^{p_2}(X)$, à valeurs dans l'ensemble des fonctions mesurables sur Y. Supposons qu'il existe une constante $K > 0$ telle que*

$$|T(f+g)| \le K(|T(f)|+|T(g)|) \qquad \text{presque partout, pour tout } f,g \in L^{p_1}(X)\cap L^{p_2}(X),$$

et qu'il existe des constantes $0 < A_1, A_2 < \infty$ telles que

$$\|T(f)\|_{L^{p_j,\infty}(Y)} \le A_j\|f\|_{L^{p_j}(X)}, \qquad \text{pour tout } j \in \{1,2\} \text{ et } f \in L^{p_1}(X)\cap L^{p_2}(X).$$

Alors pour tout $0<\theta<1$ *et* $\frac{1}{p}=\frac{1-\theta}{p_1}+\frac{\theta}{p_2}$

$$\|T(f)\|_{L^p(Y)} \le A\|f\|_{L^p(X)}, \qquad \textit{pour tout } f\in L^{p_1}(X)\cap L^{p_2}(X),$$

où, avec les conventions usuelles dans le cas $p_2=\infty$*,*

$$A=2K\Big(\frac{p}{p-p_1}+\frac{p}{p_2-p}\Big)^{\frac{1}{p}}A_1^{1-\theta}A_2^{\theta}.$$

(i) Soit $A:=\{(x,\lambda):\lambda<\delta^{-1}|f(x)|\}$, où $\delta>0$ sera choisi plus tard. Considérons d'abord le cas $p_2<\infty$. En décomposant $f=f_1+f_2$, où $f_1(x):=(1-\chi_A(x,\lambda))f(x)$ et $f_2:=\chi_A(x,\lambda)f(x)$, montrer que pour tout $\lambda>0$

$$m_{T(f)}(\lambda)\le\Big(\frac{2KA_1}{\lambda}\Big)^{p_1}\int_X \chi_A(x,\lambda)|f(x)|^{p_1}\mu(\mathrm{d}x)+\Big(\frac{2KA_2}{\lambda}\Big)^{p_2}\int_X(1-\chi_A(x,\lambda))|f(x)|^{p_2}\mu(\mathrm{d}x).$$

(ii) À l'aide du Lemme 3.22, en déduire que

$$\|T(f)\|_{L^p}^p\le p\bigg(\frac{(2KA_1)^{p_1}}{p-p_1}\frac{1}{\delta^{p-p_1}}+\frac{(2KA_2)^{p_2}}{p_2-p}\delta^{p_2-p}\bigg)\|f\|_{L^p}^p.$$

Choisir δ de sorte que les deux termes entre les parenthèses soient égaux et conclure la preuve dans le cas $p_2<\infty$.

(iii) Dans le cas $p_2=\infty$, prendre $\delta:=(2KA_2)^{-1}$ et montrer que

$$m_{T(f)}(\lambda)\le\Big(\frac{2KA_1}{\lambda}\Big)^{p_1}\int_X\chi_A(x,\lambda)|f(x)|^{p_1}\mu(\mathrm{d}x),$$

puis procéder comme dans (ii).

Remarque 3.50. Dans le cas $p_1=1$ et $p_2=2$, cet exercice nous sert à démontrer le Corollaire 3.39.

Exercice 3.5. On va améliorer ici le Corollaire 3.28. Pour $0<\alpha<\infty$ et $\theta_0\in\mathbb{T}$ on définit $\Gamma_\alpha(\theta_0):=\{z=r\mathrm{e}^{2\pi i\theta}\in\mathbb{D}:|\theta-\theta_0|<\alpha(1-r)\}$ (c'est un cône avec un sommet en $z=\mathrm{e}^{2\pi i\theta_0}$). On va démontrer le résultat suivant.

Proposition 3.51. *Soit* $f\in L^1(\mathbb{T})$*,* $F_r:=P_r*f$ *son extension harmonique sur* $\mathbb{D}$ *et* $0<\alpha<\infty$*. Alors*

$$\lim_{r\to1^-,\ z\in\Gamma_\alpha(\theta_0)}F(z)=f(\theta_0),\qquad\textit{pour Lebesgue presque tout }\theta_0\in\mathbb{T}.$$

(i) Montrer qu'il existe une constante $A=A(\alpha)$ telle que $P_r(\phi-\psi)\le AP_r(\phi)$ si $|\psi|<\alpha(1-r)$.

(ii) Montrer que $\sup_{|\theta-\theta_0|<\alpha(1-r)}|F(z)|\le A(Mf)(\theta_0)$.

(iii) Conclure comme dans la Section 3.5.

Exercice 3.6. Démontrer le théorème de différentiation de Lebesgue :

Théorème 3.52. *Pour tout* $f\in L^1(\mathbb{T})$

$$\lim_{\epsilon\to0^+}\frac{1}{2\epsilon}\int_{\theta-\epsilon}^{\theta+\epsilon}f(\phi)\,\mathrm{d}\phi=f(\theta),\qquad\textit{pour presque tout }\theta\in\mathbb{T}.$$

Ensuite, en reprenant la démonstration du Théorème 3.27, montrer une version plus forte, notamment que presque tout $\theta\in\mathbb{T}$ est un *point de Lebesgue* de f :

$$\lim_{\epsilon\to0^+}\frac{1}{2\epsilon}\int_{\theta-\epsilon}^{\theta+\epsilon}|f(\phi)-f(\theta)|\,\mathrm{d}\phi=0,\qquad\text{pour presque tout }\theta\in\mathbb{T}.$$

Chapitre 4

Transformée de Fourier dans $\mathbb{R}^d$ et distributions tempérées

4.1 Rappels sur les mesures et les espaces de Lebesgue

On note $\mathscr{M}(\mathbb{R}^d)$ l'espace des mesures boréliennes complexes sur $\mathbb{R}^d$.

Définition 4.1. La transformée de Fourier de $\mu \in \mathscr{M}(\mathbb{R}^d)$ est la fonction $\widehat{\mu} : \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$ définie par

$$\widehat{\mu}(\xi) := \int_{\mathbb{R}^d} \mathrm{e}^{-2\pi i x\cdot\xi} \mu(\mathrm{d}x), \qquad \text{pour tout } \xi \in \mathbb{R}^d.$$

On voit que $\widehat{\mu}$ est une fonction continue (convergence dominée) et $\|\widehat{\mu}\|_{L^\infty} \le \|\mu\|_{\mathscr{M}}$. Si $\mu(\mathrm{d}x) = f(x)\,\mathrm{d}x$, on écrit $\widehat{f}(\xi)$ au lieu de $\widehat{\mu}(\xi)$.

Pour $\mu \in \mathscr{M}(\mathbb{R}^d)$ et $y \in \mathbb{R}^d$ on définit $(\tau_y\mu)(E) := \mu(E - y)$.

Proposition 4.2. *Pour tout $\mu \in \mathscr{M}(\mathbb{R}^d)$, $y \in \mathbb{R}^d$ et $\omega \in \mathbb{R}^d$*

$$\widehat{\tau_y\mu}(\xi) = \mathrm{e}^{-2\pi i y\cdot\xi}\widehat{\mu}(\xi), \qquad \textit{pour tout } \xi \in \mathbb{R}^d,$$
$$\widehat{\mathrm{e}_\omega\mu}(\xi) = \widehat{\mu}(\xi - \omega), \quad \textit{pour tout } \xi \in \mathbb{R}^d, \textit{ où } \mathrm{e}_\omega := \mathrm{e}^{2\pi i x\cdot\omega}.$$

Définition 4.3. Pour $f, g \in L^1(\mathbb{R}^d)$, on définit la convolution $f * g$ par la formule

$$(f * g)(x) := \int_{\mathbb{R}^d} f(x - y)g(y)\,\mathrm{d}y, \qquad \text{pour presque tout } x \in \mathbb{R}^d. \tag{4.1}$$

Lemme 4.4. *Le produit de convolution a les propriétés suivantes :*

(i) $\|f * g\|_{L^p} \le \|f\|_{L^p}\|g\|_{L^1}$, *pour* $1 \le p \le \infty$, $f \in L^1(\mathbb{R}^d) \cap L^p(\mathbb{R}^d)$ *et* $g \in L^1(\mathbb{R}^d)$,

(ii) *si* $f, g \in L^1(\mathbb{R}^d)$, *alors* $\widehat{f * g} = \widehat{f}\widehat{g}$,

(iii) $\|f * g\|_{C^{0,\alpha}} \le \|f\|_{C^{0,\alpha}}\|g\|_{L^1}$, *pour* $0 \le \alpha < 1$, $f \in L^1(\mathbb{R}^d) \cap C^{0,\alpha}(\mathbb{R}^d)$ *et* $g \in L^1(\mathbb{R}^d)$,

(iv) *si* $1 \le p \le \infty$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$, $f \in L^1(\mathbb{R}^d) \cap L^p(\mathbb{R}^d)$ *et* $g \in L^1(\mathbb{R}^d) \cap L^{p'}(\mathbb{R}^d)$, *alors* $f * g \in C(\mathbb{T})$ *et* $\|f * g\|_{L^\infty} \le \|f\|_{L^p}\|g\|_{L^{p'}}$,

(v) *si* $1 + \frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$, $f \in L^1(\mathbb{R}^d) \cap L^p(\mathbb{R}^d)$ *et* $g \in L^1(\mathbb{R}^d) \cap L^q(\mathbb{R}^d)$, *alors* $\|f * g\|_{L^r} \le \|f\|_{L^p}\|g\|_{L^q}$ *(l'inégalité de Young).*

Remarque 4.5. En réalité, dans (i) il suffit de supposer $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$. De même, dans (iii) on peut prendre $f \in C^{0,\alpha}(\mathbb{R}^d)$, dans (iv) $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$ et $g \in L^{p'}(\mathbb{R}^d)$, et enfin dans (v) $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$ et $g \in L^q(\mathbb{R}^d)$. On peut montrer qu'à chaque fois la formule (4.1) a un sens pour presque tout $x \in \mathbb{R}^d$.

Définition 4.6. La suite $(\Phi_N)_{N=1}^{\infty} \subset L^1(\mathbb{R}^d)$ est une *approximation de l'identité* si

(H1) $\int_{\mathbb{R}^d} \Phi_N(x)\,\mathrm{d}x = 1$ pour tout N,

(H2) $\sup_N \int_{\mathbb{R}^d} |\Phi_N(x)|(\,\mathrm{d}x) < \infty$,

(H3) pour tout $\delta > 0$, $\lim_{N\to\infty} \int_{|x|\geq\delta} |\Phi_N(x)|(\,\mathrm{d}x) = 0$.

Proposition 4.7. *Soit (Φ_N) une approximation de l'identité. Si $1 \leq p < \infty$ et $f \in L^1(\mathbb{R}^d) \cap L^p(\mathbb{R}^d)$, alors $\lim_{N\to\infty} \|\Phi_N * f - f\|_{L^p} = 0$. Si $f \in L^1(\mathbb{R}^d) \cap C_0(\mathbb{R}^d)$ (fonctions continues qui tendent vers 0 à l'infini), alors $\lim_{N\to\infty} \|\Phi_N * f - f\|_{L^\infty} = 0$.*

4.2 Transformation de Fourier dans l'espace de Schwartz

Si $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_d) \in \mathbb{N}^d$ est un multi-indice, alors on note sa *longueur* $|\alpha| := \alpha_1 + \ldots + \alpha_d$. Pour $x = (x_1, \ldots, x_d) \in \mathbb{R}^d$ on écrit $x^\alpha := \prod_{j=1}^d x_j^{\alpha_j}$, et $\partial^\alpha \phi := \prod_{j=1}^d \frac{\partial^{\alpha_j}\phi}{\partial x_j^{\alpha_j}}$, en supposant que la dernière expression a un sens.

Définition 4.8. On définit l'espace de Schwartz

$$\mathscr{S}(\mathbb{R}^d) := \{\phi \in C^\infty(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}) : x^\alpha \partial^\beta \phi \in L^\infty(\mathbb{R}^d) \text{ pour tout } \alpha, \beta \in \mathbb{N}^d\}.$$

On munit $\mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$ d'une topologie définie par la famille des semi-normes

$$p_N(\phi) := \sup_{|\alpha|+|\beta|\leq N} \|x^\alpha \partial^\beta \phi\|_{L^\infty}.$$

L'espace topologique $\mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$ est métrisable, par exemple par $\delta(\phi,\psi) := \sum_{N=0}^\infty \frac{2^{-N} p_N(\phi-\psi)}{1+p_N(\phi-\psi)}$, donc la topologie est complètement caractérisée par la convergence des suites. Pour $\phi, \phi_n \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$ on a

$$\lim_{n\to\infty} \phi_n = \phi \text{ au sens } \mathscr{S}(\mathbb{R}^d) \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{n\to\infty} p_N(\phi_n - \phi) = 0 \text{ pour tout } N \in \mathbb{N}.$$

Proposition 4.9. *L'espace $\mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$ est complet (c'est donc un espace de Fréchet) et séparable. L'ensemble $\mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$ est dense dans $L^p(\mathbb{R}^d)$ pour tout $1 \leq p < \infty$, ainsi que dans $C_0(\mathbb{R}^d)$ (l'espace des fonctions continues $\mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$ qui tendent vers 0 quand $|x| \to \infty$).* □

Exemple 4.10. Voici quelques exemples d'opérateurs linéaires continus $\mathscr{S}(\mathbb{R}^d) \to \mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$:

(i) Pour tout $x_0 \in \mathbb{R}^d$ la *translation* τ_{x_0} est définie par $\tau_{x_0}(\phi) := x \mapsto \phi(x - x_0)$.

(ii) Pour tout $\lambda > 0$ la *dilatation* d_λ est définie par $d_\lambda(\phi) := x \mapsto \phi(x/\lambda)$.

(iii) La *réflexion* est définie par $\check{\phi} := x \mapsto \phi(-x)$.

(iv) Plus généralement, si A est une matrice inversible $d \times d$, alors l'application qui à ϕ associe $\phi \circ A$ est un opérateur continu $\mathscr{S}(\mathbb{R}^d) \to \mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$.

(v) Pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^d$ l'opérateur de la *dérivation* ∂^α associe à $\phi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$ la fonction $\partial^\alpha \phi$.

(vi) On note $\mathscr{T}(\mathbb{R}^d)$ l'ensemble des fonctions $h \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$ telles que pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^d$ il existe C_α et k_α vérifiant $|(\partial^\alpha h)(x)| \leq C_\alpha(1+|x|)^{k_\alpha}$ pour tout $x \in \mathbb{R}^d$. Si $h \in \mathscr{T}(\mathbb{R}^d)$, alors l'opérateur de multiplication qui à $\phi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$ associe $h\phi$ est continu $\mathscr{S}(\mathbb{R}^d) \to \mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$.

Définition 4.11. Soit $\phi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$. La *transformée de Fourier* de ϕ, notée $\widehat{\phi} : \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$, est définie par

$$\widehat{\phi}(\xi) := \int_{\mathbb{R}^d} \mathrm{e}^{-2\pi i x\cdot\xi}\phi(x)\,\mathrm{d}x, \qquad \text{pour tout } \xi \in \mathbb{R}^d.$$

On pose $\mathscr{F}\phi := \widehat{\phi}$ et on appelle $\mathscr{F}$ la *transformation de Fourier*.

Proposition 4.12. *La transformation de Fourier sur $\mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$ a les propriétés suivantes :*

(i) $\mathscr{F}(\partial^\alpha\phi) = (2\pi i)^{|\alpha|}\xi^\alpha\widehat{\phi}$, *pour tout* $\phi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$ *et* $\alpha \in \mathbb{N}^d$,

(ii) $\partial^\alpha\widehat{\phi} = (-2\pi i)^{|\alpha|}\mathscr{F}(x^\alpha\phi)$, *pour tout* $\phi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$ *et* $\alpha \in \mathbb{N}^d$,

(iii) $\mathscr{F}(\tau_{x_0}\phi) = \mathrm{e}^{-2\pi i x_0\cdot\xi}\widehat{\phi}$, *pour tout* $\phi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$ *et* $x_0 \in \mathbb{R}^d$,

(iv) $\mathscr{F}(\mathrm{e}^{2\pi i x\cdot\omega}\phi) = \tau_\omega\widehat{\phi}$, *pour tout* $\phi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$ *et* $\omega \in \mathbb{R}^d$,

(v) $\mathscr{F}(d_\lambda\phi) = \lambda^d d_{\lambda^{-1}}\widehat{\phi}$, *pour tout* $\phi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$ *et* $\lambda > 0$,

(vi) $\mathscr{F}(\check{\phi}) = (\widehat{\phi})^\vee$, *pour tout* $\phi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$,

(vii) $\mathscr{F}(\phi \circ A) = |\det A|^{-1}\widehat{\phi} \circ (A^{-1})^t$, *pour tout* $\phi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$ *et A une matrice inversible $d \times d$.*

Démonstration. Vérifions par exemple (vii). Pour tout $\xi \in \mathbb{R}^d$ on a, avec le changement de variable $y = Ax$,

$$\mathscr{F}(\phi \circ A)(\xi) = \int_{\mathbb{R}^d} \mathrm{e}^{-2\pi i x\cdot\xi}\phi(A(x))\,\mathrm{d}x = |\det A|^{-1}\int_{\mathbb{R}^d} \mathrm{e}^{-2\pi i y\cdot(A^{-1})^t\xi}\phi(y)\,\mathrm{d}y = |\det A|^{-1}\widehat{\phi}((A^{-1})^t\xi).$$

□

Si $\phi, \psi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$, alors leur convolution est définie par la formule $(\phi * \psi)(y) := \int_{\mathbb{R}^d}\phi(y-x)\psi(x)\,\mathrm{d}x$. Il est facile de vérifier que $\phi * \psi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$ et qu'on a les relations $\widehat{\phi * \psi} = \widehat{\phi}\widehat{\psi}$, $\widehat{\phi\psi} = \widehat{\phi} * \widehat{\psi}$, $\partial^\alpha(\phi * \psi) = (\partial^\alpha\phi) * \psi$ etc.

Théorème 4.13. *(i) L'application $\mathscr{F}$ est un automorphisme de $\mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$, d'inverse*

$$\mathscr{F}^{-1}\psi(x) = \int_{\mathbb{R}^d} \mathrm{e}^{2\pi i x\cdot\xi}\psi(\xi)\,\mathrm{d}\xi, \qquad \textit{pour tout } x \in \mathbb{R}^d.$$

(ii) Pour tous $\phi, \psi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$ la formule de Plancherel *est vraie :*

$$\int_{\mathbb{R}^d} \overline{\widehat{\phi}(\xi)}\widehat{\psi}(\xi)\,\mathrm{d}\xi = \int_{\mathbb{R}^d} \overline{\phi(x)}\psi(x)\,\mathrm{d}x.$$

Démonstration. Voir des textes standard sur la transformation de Fourier ou [2]. Rappelons que la preuve habituelle de (i) repose sur l'identité

$$\widehat{\mathrm{e}^{-\pi|x|^2}}(\xi) = e^{-\pi|\xi|^2} \quad \Rightarrow \quad \widehat{\Gamma_\epsilon}(\xi) = \mathrm{e}^{-\pi\epsilon^2|\xi|^2}, \quad \text{où } \Gamma_\epsilon(x) := \epsilon^{-d}\mathrm{e}^{-\pi\epsilon^{-2}|x|^2}.$$

On trouve $(\Gamma_\epsilon * f)(x) = \int_{\mathbb{R}^d}\mathrm{e}^{2\pi i x\cdot\xi}\mathrm{e}^{-\pi\epsilon^2|\xi|^2}\widehat{f}(\xi)\,\mathrm{d}\xi$ et on passe à la limite $\epsilon \to 0$, en utilisant le fait que Γ_ϵ est une approximation de l'identité. □

Remarque 4.14. Souvent on définit la transformée de Fourier par $(\mathscr{F}\phi)(\xi) = \int_{\mathbb{R}^d} \mathrm{e}^{-ix\cdot\xi}\phi(x)\,\mathrm{d}x$, ce qui conduit à $(\mathscr{F}^{-1}\psi)(x) = \frac{1}{(2\pi)^d}\int_{\mathbb{R}^d} \mathrm{e}^{ix\cdot\xi}\psi(\xi)\,\mathrm{d}\xi$ et $\int_{\mathbb{R}^d} \overline{\widehat{\phi}(\xi)}\widehat{\psi}(\xi)\,\mathrm{d}\xi = (2\pi)^d\int_{\mathbb{R}^d} \overline{\phi(x)}\psi(x)\,\mathrm{d}x$.

Remarque 4.15. Souvent on note $\check{\phi}$ la transormée de Fourier inverse de ϕ. Dans ces notes, $\check{\phi}$ est toujours la reflexion et $\mathscr{F}^{-1}\phi$ la transformée de Fourier inverse.

Remarque 4.16. Notons que pour tout $\phi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$ on a $\mathscr{F}(\widehat{\phi}) = \check{\phi}$. En effet, on voit que pour tout $\psi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$, on a $(\mathscr{F}^{-1}\psi)(-x) = (\mathscr{F}\psi)(x)$, et on pose $\psi = \widehat{\phi}$.

4.3 Distributions tempérées

Définition 4.17. On note $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^d)$ l'espace dual de $\mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$, c'est à dire l'espace des applications $\mathbb{C}$-linéaires continues $u : \mathscr{S}(\mathbb{R}^d) \to \mathbb{C}$. Concernant la topologie, on se servira uniquement de la notion de la convergence de suites :

$$u_n \to u \text{ au sens } \mathscr{S}'(\mathbb{R}^d) \quad \Leftrightarrow \quad u_n(\phi) \to u(\phi) \text{ pour tout } \phi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d).$$

On dit qu'un opérateur $T : \mathscr{S}'(\mathbb{R}^d) \to \mathscr{S}'(\mathbb{R}^d)$ est continu si $u_n \to u$ au sens $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^d)$ implique $Tu_n \to Tu$ au sens $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^d)$.

Proposition 4.18. *Pour tout $u \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^d)$ il existe $N \in \mathbb{N}$ et $C > 0$ tels que $|u(\phi)| \le Cp_N(\phi)$ pour tout $\phi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$.*

Démonstration. Supposons le contraire. Alors pour tout $N \in \mathbb{N}$ il existe $\phi_N \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$ tel que $p_N(\phi_N) \le \frac{1}{N}$ et $|u(\phi_N)| \ge 1$. Cela signifie que $\phi_N \to 0$ dans $\mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$ mais $u(\phi_N) \nrightarrow 0$, donc $u \notin \mathscr{S}'(\mathbb{R}^d)$. □

On a aussi un résultat de type Banach-Steinhaus :

Proposition 4.19. *Si $(u_n) \subset \mathscr{S}'(\mathbb{R}^d)$ une suite telle que $\sup_N |u_n(\phi)| < \infty$ pour tout $\phi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$, alors il existe $N \in \mathbb{N}$ et $C > 0$ tels que $|u_n(\phi)| \le Cp_N(\phi)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $\phi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$.*

Démonstration. On omettra la preuve, qui repose sur le théorème de Baire dans l'espace complet $\mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$. □

Exemple 4.20. Voici quelques exemples de distributions tempérées qu'on rencontre souvent.

(i) Si $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^d)$ et il existe k tel que $(1+|x|)^{-k}f(x) \in L^1(\mathbb{R}^d)$, alors on définit $T_f \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^d)$ par la formule $T_f(\phi) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x)\phi(x)\,\mathrm{d}x$. Notons l'absence du conjugé complexe. Souvent on écrit f au lieu de T_f. On a en particulier $\mathscr{S}(\mathbb{R}^d) \subset \mathscr{S}'(\mathbb{R}^d)$. On peut montrer que $T_f = 0$ au sens $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^d)$ implique $f = 0$ presque partout.

(ii) La distribution "delta de Dirac" en $x_0 \in \mathbb{R}^d$, notée δ_{x_0}, est définie par $\delta_{x_0}(\phi) = \phi(x_0)$.

(iii) Plus généralement, à toute mesure complexe $\mu \in \mathscr{M}(\mathbb{R}^d)$ on associe la distribution tempérée $T_\mu \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^d)$ définie par la formule $T_\mu(\phi) = \int_{\mathbb{R}^d} \phi(x)\mu(\mathrm{d}x)$. Souvent on écrit μ au lieu de T_μ.

(iv) Aussi, toute mesure de Radon (positive) telle que $\mu(B(0,R)) \le (1+R)^k$ définit une distribution tempérée.

(v) Un exemple d'une distribution tempérée qui n'est pas une mesure est donnée par la *valeur principale* de $\frac{1}{x}$, notée $\mathrm{vp}\big(\frac{1}{x}\big)$ et définie par

$$\Big(\mathrm{vp}\big(\frac{1}{x}\big)\Big)(\phi) = \lim_{\epsilon\to 0^+}\int_{|x|>\epsilon}\frac{\phi(x)}{x}\,\mathrm{d}x, \qquad \text{pour tout } \phi\in\mathscr{S}(\mathbb{R}).$$

Définition 4.21. Pour tout opérateur continu $T:\mathscr{S}(\mathbb{R}^d)\to\mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$ on définit un opérateur continu $T^t:\mathscr{S}'(\mathbb{R}^d)\to\mathscr{S}'(\mathbb{R}^d)$ par la formule $(T^t u)(\phi) = u(T\phi)$.

Exemple 4.22. En utilisant ce principe, on peut définir plusieurs opérations sur les distributions.

(i) Pour tout $x_0\in\mathbb{R}^d$ et $u\in\mathscr{S}'(\mathbb{R}^d)$ on pose $(\tau_{x_0}u)(\phi) := u(\tau_{-x_0}\phi)$.

(ii) Pour tout $\lambda>0$ et $u\in\mathscr{S}'(\mathbb{R}^d)$ on pose $(d_\lambda u)(\phi) := \lambda^d u(d_{\lambda^{-1}}\phi)$.

(iii) La reflexion de $u\in\mathscr{S}'(\mathbb{R}^d)$ est définie par $\check{u}(\phi) := u(\check{\phi})$.

(iv) Si A est une matrice inversible, alors $(u\circ A)(\phi) := |\det A|^{-1}\,u(\phi\circ A^{-1})$.

(v) Pour tout $\alpha\in\mathbb{N}^d$ on définit $(\partial^\alpha u)(\phi) := (-1)^{|\alpha|}u(\partial^\alpha\phi)$.

(vi) Si $h\in\mathscr{T}(\mathbb{R}^d)$, alors on définit $(hu)(\phi) := u(h\phi)$.

(vii) Pour tout $u\in\mathscr{S}'(\mathbb{R}^d)$, sa transformée de Fourier $\mathscr{F}u = \widehat{u}\in\mathscr{S}'(\mathbb{R}^d)$ est définie par la condition $\widehat{u}(\phi) := u(\widehat{\phi})$.

Il faut comprendre ces définitions de la manière suivante. On sait que τ_{-x_0} est un opérateur continu $\mathscr{S}(\mathbb{R}^d)\to\mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$. On lui associe l'opérateur $(\tau_{-x_0})^t:\mathscr{S}'(\mathbb{R}^d)\to\mathscr{S}'(\mathbb{R}^d)$. Il est facile de vérifier que $(\tau_{-x_0})^t u = \tau_{x_0}u$ si $u\in\mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$. Pour cette raison, on écrit τ_{x_0} au lieu de $(\tau_{-x_0})^t$, et de même pour les autres opérations. Pour la transformée de Fourier par exemple, soit $f,\phi\in\mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$, et $g\in\mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$ définie par la condition $\phi(\xi) = \overline{\widehat{g}(\xi)}$. Alors $\overline{\phi(\xi)} = \widehat{g}(\xi)$, donc $g(x) = \int_{\mathbb{R}^d}\mathrm{e}^{2\pi i\xi\cdot x}\overline{\phi(\xi)}\,\mathrm{d}\xi$ et $\overline{g(x)} = \int_{\mathbb{R}^d}\mathrm{e}^{-2\pi i\xi\cdot x}\phi(\xi)\,\mathrm{d}\xi = \widehat{\phi}(x)$, et on obtient

$$\widehat{f}(\phi) = \int_{\mathbb{R}^d}\widehat{f}(\xi)\phi(\xi)\,\mathrm{d}\xi = \int_{\mathbb{R}^d}\overline{\widehat{g}(\xi)}\widehat{f}(\xi)\,\mathrm{d}\xi = \int_{\mathbb{R}^d}\overline{g(x)}f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^d}\widehat{\phi}(x)f(x)\,\mathrm{d}x = f(\widehat{\phi}).$$

Proposition 4.23. *La transformation de Fourier $\mathscr{F}$ est un automorphisme de $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^d)$.*

Démonstration. C'est une conséquence du Théorème 4.13. On a $(\mathscr{F}^{-1}v)(\psi) = v(\mathscr{F}^{-1}\psi)$. □

Proposition 4.24. *La transformation de Fourier sur $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^d)$ a les propriétés suivantes :*

(i) $\mathscr{F}(\partial^\alpha u) = (2\pi i)^{|\alpha|}\xi^\alpha\widehat{u}$, *pour tout $u\in\mathscr{S}'(\mathbb{R}^d)$ et $\alpha\in\mathbb{N}^d$,*

(ii) $\partial^\alpha\widehat{u} = (-2\pi i)^{|\alpha|}\mathscr{F}(x^\alpha u)$, *pour tout $u\in\mathscr{S}'(\mathbb{R}^d)$ et $\alpha\in\mathbb{N}^d$,*

(iii) $\mathscr{F}(\tau_{x_0}u) = \mathrm{e}^{-2\pi i x_0\cdot\xi}\widehat{u}$, *pour tout $u\in\mathscr{S}'(\mathbb{R}^d)$ et $x_0\in\mathbb{R}^d$,*

(iv) $\mathscr{F}(\mathrm{e}^{2\pi i x\cdot\omega}u) = \tau_\omega\widehat{u}$, *pour tout $u\in\mathscr{S}'(\mathbb{R}^d)$ et $\omega\in\mathbb{R}^d$,*

(v) $\mathscr{F}(d_\lambda u) = \lambda^d d_{\lambda^{-1}}\widehat{u}$, *pour tout $u\in\mathscr{S}'(\mathbb{R}^d)$ et $\lambda>0$,*

(vi) $\mathscr{F}(\check{u}) = (\widehat{u})^\vee$, *pour tout $u\in\mathscr{S}'(\mathbb{R}^d)$,*

(vii) $\mathscr{F}(u\circ A) = |\det A|^{-1}\widehat{u}\circ(A^{-1})^t$, *pour tout $u\in\mathscr{S}'(\mathbb{R}^d)$ et A une matrice inversible $d\times d$.*

Démonstration. Toutes les propriétés sont obtenues facilement à partir des propriétés correspondantes pour les fonctions test. Par exemple pour (vii), on a pour tout $\phi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$

$$\begin{aligned}(\mathscr{F}(u \circ A))(\phi) &= (u \circ A)(\widehat{\phi}) = |\det A|^{-1} u(\widehat{\phi} \circ A^{-1}) = u(|\det A|^{-1}\widehat{\phi} \circ A^{-1}) = u(\mathscr{F}(\phi \circ A^t)) \\ &= \widehat{u}(\phi \circ A^t) = |\det A|^{-1}(\widehat{u} \circ (A^{-1})^t)(\phi).\end{aligned}$$

□

Remarque 4.25. Si $u \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^d)$ et $\phi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$, alors $\mathscr{F}(\widehat{u}) = (\widehat{u})(\widehat{\phi}) = u(\mathscr{F}(\widehat{\phi})) = u(\check{\phi}) = \check{u}(\phi)$.

Proposition 4.26. *Si $u \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^d)$ est une mesure, c'est-à-dire il existe $\mu \in \mathscr{M}(\mathbb{R}^d)$ telle que, pour tout $\phi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$, $u(\phi) = \int_{\mathbb{R}^d} \phi(x)\mu(\mathrm{d}x)$, alors le définition ci-dessus coincide avec la définition au début du chapitre.*

Démonstration. Il faut vérifier que pour tout $\psi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$ on a $\widehat{u}(\psi) = \int_{\mathbb{R}^d} \widehat{\mu}(\xi)\psi(\xi)\,\mathrm{d}\xi$. Par Fubini,

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^d} \widehat{\mu}(\xi)\psi(\xi)\,\mathrm{d}\xi &= \int_{\mathbb{R}^d}\Big(\int_{\mathbb{R}^d} \mathrm{e}^{-2\pi i x\cdot\xi}\mu(\mathrm{d}x)\Big)\psi(\xi)\,\mathrm{d}\xi = \int_{\mathbb{R}^d}\Big(\int_{\mathbb{R}^d} \mathrm{e}^{-2\pi i x\cdot\xi}\psi(\xi)\,\mathrm{d}\xi\Big)\mu(\mathrm{d}x) \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} \widehat{\psi}(x)\mu(\mathrm{d}x) = u(\widehat{\psi}) = \widehat{u}(\psi).\end{aligned}$$

□

Définition 4.27.
(i) Pour tout $s \in \mathbb{R}$ on définit *l'espace de Sobolev* $H^s(\mathbb{R}^d) := \{u \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^d) : \|u\|_{H^s} < \infty\}$, où $\|u\|_{H^s} := \|(1+|\xi|^2)^{\frac{s}{2}}\widehat{u}(\xi)\|_{L^2}$.
(ii) Pour tout $s < \frac{d}{2}$ on définit *l'espace de Sobolev homogène* $\dot{H}^s(\mathbb{R}^d) := \{u \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^d) : \|u\|_{\dot{H}^s} < \infty\}$, où $\|u\|_{\dot{H}^s} := \||\xi|^s\widehat{u}(\xi)\|_{L^2}$.

4.4 Convolutions de distributions tempérées

On aura besoin de savoir que les sommes de Riemann de l'intégrale définissant $\phi * \psi$ convergent dans $\mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$. Pour être plus précis, pour tout $m \in \mathbb{N}$ posons

$$D_m := \{(x_1, \ldots, x_d) : 2^m x_j \in \mathbb{Z} \text{ et } -2^m \leq x_j < 2^m\}.$$

Lemme 4.28. *Soit $\phi, \psi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$. Pour tout $m \in \mathbb{Z}$, soit*

$$\zeta_m(y) := 2^{-md}\sum_{x\in D_m}\phi(y-x)\psi(x).$$

Alors $\lim_{m\to\infty}\zeta_m = \phi * \psi$ *au sens $\mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$.*

Démonstration. Il suffit de montrer que pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^d$ on a $\lim_{m\to\infty}\|y^\alpha(\zeta_m - \phi * \psi)\|_{L^\infty} = 0$. En effet, $\partial^\beta\zeta_m$ est obtenu par la même formule que ζ_m, avec ϕ remplacé par $\partial^\beta\phi$.

On écrit $0 \leq \gamma \leq \alpha$ si $0 \leq \gamma_j \leq \alpha_j$ pour tout j. On a la formule de Newton $y^\alpha = \sum_{0\leq\gamma\leq\alpha} c_\gamma (y-x)^\gamma x^{\alpha-\gamma}$, donc il suffit de montrer que pour tout $0 \leq \gamma \leq \alpha$

$$\lim_{m\to\infty}\Big\|2^{-md}\sum_{x\in D_m}(y-x)^\gamma\phi(y-x)x^{\alpha-\gamma}\psi(x) - \int_{\mathbb{R}^d}(y-x)^\gamma\phi(y-x)x^{\alpha-\gamma}\psi(x)\Big\|_{L^\infty} = 0.$$

En remplaçant $x^\gamma\phi(x)$ par $\phi(x)$ et $x^{\alpha-\gamma}\psi(x)$ par $\psi(x)$, qui sont tout aussi bien des fonctions de classe $\mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$, on se ramène au cas $\gamma=\alpha=0$, et il est clair que

$$\Big|2^{-md}\sum_{x\in D_m}\phi(y-x)\psi(x)-\int_{\mathbb{R}^d}\phi(y-x)\psi(x)\Big|\leq$$
$$\|\phi\|_{L^\infty}\int_{\max|x_j|\geq 2^m}|\psi(x)|\,\mathrm{d}x+\sqrt{d}2^{-m}(\|\phi\|_{L^\infty}\|\nabla\psi\|_{L^\infty}+\|\psi\|_{L^\infty}\|\nabla\phi\|_{L^\infty})\to 0.$$

□

Définition 4.29. Soit $u\in\mathscr{S}'(\mathbb{R}^d)$ et $\phi\in\mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$. On définit la *convolution* $u*\phi$ par la formule

$$(u*\phi)(x):=u(y\mapsto\phi(x-y))=u(\tau_x\check{\phi}).$$

Proposition 4.30. *Si $u\in\mathscr{S}'(\mathbb{R}^d)$ et $\phi\in\mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$, alors $u*\phi\in\mathscr{T}(\mathbb{R}^d)$ (pour rappel, cela signifie que c'est une fonction à croissance polynômiale, ainsi que toutes ses dérivées). De plus, $\widehat{u*\phi}=\widehat{u}\widehat{\phi}$ et $\widehat{u}*\widehat{\phi}=\widehat{u\phi}$ au sens $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^d)$.*

Démonstration. Notons d'abord que l'application $x\mapsto\tau_x\check{\phi}$ est continue $\mathbb{R}^d\to\mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$, donc $u*\phi$ est une fonction continue. On va montrer que $\partial_{x_j}(u*\phi)(x)=(u*(\partial_{x_j}\phi))(x)$ pour tout $x\in\mathbb{R}^d$ et $j\in\{1,\ldots,d\}$. Par récurrence, cela prouvera que $u*\phi\in C^\infty(\mathbb{R}^d)$ et $\partial^\alpha(u*\phi)(x)=(u*(\partial^\alpha\phi))(x)$ pour tout $x\in\mathbb{R}^d$ et $\alpha\in\mathbb{N}^d$. Fixons x et j. Pour tout $h\neq 0$ on a

$$\frac{(u*\phi)(x+he_j)-(u*\phi)(x)}{h}=u\Big(y\mapsto\frac{1}{h}\big(\phi(x+he_j-y)-\phi(x-y)\big)\Big).\tag{4.2}$$

Quand $h\to 0$, $y\mapsto\frac{1}{h}\big(\phi(x+he_j-y)-\phi(x-y)\big)$ converge dans $\mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$ vers $y\mapsto\partial_{x_j}\phi(x-y)$, donc le membre de gauche de (4.2) converge vers $(u*\partial_{x_j}\phi)(x)$ quand $h\to 0$.

Pour montrer que $u*\phi$ est à croissance polynômiale, il suffit, par la Proposition 4.18, de montrer que pour tout $N\in\mathbb{N}$ et $\phi\in\mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$ il existe $k\in\mathbb{N}$ et $C>0$ tels que $p_N(\tau_x\check{\phi})\leq C(1+|x|)^k$ pour tout $x\in\mathbb{R}^d$. Par la définition de la norme p_N et en utilisant l'inégalité $|y|^N\lesssim|x|^N+|y-x|^N$, cela est vrai avec $k=N$.

On va montrer que $\widehat{u*\phi}=\widehat{u}*\widehat{\phi}$, la formule $\widehat{u}*\widehat{\phi}=\widehat{u\phi}$ étant la même chose pour la transformation de Fourier inverse. Soit $\psi\in\mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$. Par les définitions,

$$\widehat{u*\phi}(\psi)=(u*\phi)(\widehat{\psi})=\int_{\mathbb{R}^d}u(\tau_x\check{\phi})\widehat{\psi}(x)\,\mathrm{d}x.$$

La fonction $x\mapsto u(\tau_x\check{\phi})$ est continue, à croissance polynômiale, et $\widehat{\psi}\in\mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$, donc $u(\tau_x\check{\phi})\widehat{\psi}(x)$ est une fonction continue à décroissance rapide, ce qui implique que

$$\int_{\mathbb{R}^d}u(\tau_x\check{\phi})\widehat{\psi}(x)\,\mathrm{d}x=\lim_{m\to\infty}2^{-md}\sum_{x\in D_m}u(\tau_x\check{\phi})\widehat{\psi}(x)=\lim_{m\to\infty}u\Big(2^{-md}\sum_{x\in D_m}(\tau_x\check{\phi})\widehat{\psi}(x)\Big).$$

Par le Lemme 4.28, cette limite est égale à

$$u(\check{\phi}*\widehat{\psi})=u(\mathscr{F}(\widehat{\phi}\psi))=\widehat{u}(\widehat{\phi}\psi)=(\widehat{u}\widehat{\phi})(\psi).$$

□

Remarque 4.31. On voit donc qu'à tout élément $K \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^d)$ on peut associer un *opérateur de convolution* $T_K : \mathscr{S}(\mathbb{R}^d) \to \mathscr{T}(\mathbb{R}^d)$, défini par $T_K\phi := K * \phi$. Si X, Y sont deux espaces de Banach tels que $\mathscr{S}(\mathbb{R}^d) \subset X$, $\mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$ dense dans X et $T_K\phi \in Y$ pour tout $\phi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$, alors une question intéressante est de savoir si on peut étendre T_K comme opérateur borné $T_K : X \to Y$. Autrement dit, s'il existe une constante $C > 0$ telle que $\|T_K\phi\|_Y \le C\|\phi\|_X$ pour tout $\phi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$. Dans le cas du tore, on a abordé cette question dans la Section 2.7*. Dans le cas de l'espace euclidien $\mathbb{R}^d$, des critères similaires existent, voir par exemple [3, Section 2.5].

Corollaire 4.32. *Si $v \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^d)$ est une distribution telle que $\widehat{v} \in \mathscr{T}(\mathbb{R}^d)$, alors l'application qui à $\phi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$ associe $v * \phi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$ est un opérateur continu de $\mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$ dans lui-même.*

Démonstration. C'est une conséquence du Théorème 4.13 (i) combiné avec l'Exemple 4.10 (vi). □

Définition 4.33. Soit $v \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^d)$ une distribution telle que $\widehat{v} \in \mathscr{T}(\mathbb{R}^d)$ et $u \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^d)$. On définit $u * v = v * u \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^d)$ par la condition $(u * v)(\phi) = u(\check{v} * \phi)$ pour tout $\phi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$.

Remarque 4.34. La dernière condition définit bien un élément de $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^d)$, car $\phi \mapsto \check{v} * \phi$ est continu $\mathscr{S}(\mathbb{R}^d) \to \mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$, donc $\phi \mapsto u(\check{v} * \phi)$ est continu $\mathscr{S}(\mathbb{R}^d) \to \mathbb{C}$.

Proposition 4.35. *Si $u, v \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^d)$ et $\widehat{v} \in \mathscr{T}(\mathbb{R}^d)$, alors $\widehat{u * v} = \widehat{u}\widehat{v}$ au sens $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^d)$. Si $u \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^d)$ et $v \in \mathscr{T}(\mathbb{R}^d)$, alors $\widehat{uv} = \widehat{u} * \widehat{v}$.*

Démonstration. On montre la première affirmation, la deuxième étant la même que la première, mais pour $\mathscr{F}^{-1}$ au lieu de $\mathscr{F}$. On a

$$\begin{aligned}
\widehat{u * v}(\phi) &= (u * v)(\widehat{\phi}) = u(\check{v} * \widehat{\phi}),\\
(\widehat{u}\widehat{v})(\phi) &= \widehat{u}(\widehat{v}\phi) = u(\mathscr{F}(\widehat{v}\phi)) = u(\mathscr{F}(\widehat{v}) * \widehat{\phi}),
\end{aligned}$$

où la dernière égalité résulte de la Proposition 4.30. La Remarque 4.25 termine la preuve. □

Corollaire 4.36. *Si $v \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$, alors la Définition 4.33 coincide avec la Définition 4.29.*

Démonstration. La transformée de Fourier de $u * v$ dans les deux cas est la même. □

Proposition 4.37. *Si $v \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^d)$ est à support compact, c'est-à-dire il existe une boule $B_R = \{x \in \mathbb{R}^d : |x| \le R\} \subset \mathbb{R}^d$ telle que $\phi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$ et $\phi(x) = 0$ pour tout $x \in B_R$ implique $v(\phi) = 0$, alors $\widehat{v} \in \mathscr{T}(\mathbb{R}^d)$.*

Démonstration. Soit $\psi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$ telle que $\psi(x) = 1$ pour tout $x \in B_R$. On a alors $\psi v = v$ au sens $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^d)$, donc par la Proposition 4.30 $\widehat{v} = \widehat{\psi v} = \widehat{\psi} * \widehat{v} \in \mathscr{T}(\mathbb{R}^d)$. □

4.5 Exercices

Exercice 4.1. Démontrer l'inégalité de Bernstein suivante.

Lemme 4.38. *Il existe une constante $C = C(d)$ ayant la propriété suivante. Soit $1 \le p \le q \le \infty$ et $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$ telle que $\widehat{f}(\xi) = 0$ pour tout $|\xi| \ge R$. Alors*

$$\|f\|_{L^q} \le CR^{d(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})}\|f\|_{L^p}, \qquad \|\nabla f\|_{L^p} \le CR\|f\|_{L^p}.$$

Indication : Soit $\chi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ telle que $\chi(\xi) = 1$ pour $|\xi| \le 1$ et $\chi(\xi) = 0$ pour $|\xi| \ge 2$, et pour tout $R > 0$ notons $\chi_R(\xi) := \chi(\xi/R)$ et $V_R := \mathscr{F}^{-1}(\chi_R)$. Montrer que $\|V_R\|_{L^r} \le CR^{d(1-\frac{1}{r})}$ et $\|\nabla V_R\|_{L^1} \le CR$, où C dépend du choix de la fonction χ.

Exercice 4.2. Démontrer la *formule de sommation de Poisson* :

$$\sum_{m\in\mathbb{Z}^d} f(m) = \sum_{n\in\mathbb{Z}^d} \widehat{f}(n), \qquad \text{pour tout } f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d).$$

Indication : Considérer la fonction $g \in \mathscr{S}(\mathbb{T}^d)$ définie par $g(x) := \sum_{m\in\mathbb{Z}^d} f(x+m)$.

Exercice 4.3. On verra ici une démonstration des inégalités de Bernstein sur $\mathbb{T}^d$ sans utiliser le noyau de de la Vallée Poussin (il faut la comparer avec l'Exercice 2.17).

(i) Soit χ, χ_R et V_R les mêmes objets que dans l'Exercice 4.1. Pour tout $R \ge 0$, soit $W_R : \mathbb{T}^d \to \mathbb{C}$ la fonction définie par $W_R(x) := \sum_{m\in\mathbb{Z}^d} V_R(x+m)$. Montrer que $\widehat{W_R}(n) = \chi_R(n)$ pour tout $R \ge 0$ et $n \in \mathbb{Z}^d$.

(ii) Montrer que $\|W_R\|_{L^r} \le CR^{d(1-\frac{1}{r})}$ et $\|\nabla W_R\|_{L^1} \le CR$.

(iii) Formuler et démontrer les inégalités de Bernstein sur $\mathbb{T}^d$.

Chapitre 5

Théorie de Calderón-Zygmund des intégrales singulières

Rappelons que dans le Chapitre 3 on a examiné le lien entre les séries de Fourier et les fonctions harmoniques sur $\mathbb{D}$, ce qui a conduit en particulier aux bornes $L^{1,\infty}$ et L^p de la transformée de Hilbert. On présentera dans ce chapitre des méthodes qui auraient permis d'aboutir aux même conclusions en partant de la représentation (3.9) comme produit de convolution, sans faire appel aux propriétés des fonctions harmoniques et holomorphes. On considérera des opérateurs agissant sur des fonctions définies sur l'espace euclidien $\mathbb{R}^d$. Des résultats similaires peuvent être obtenus dans le cas du cercle $\mathbb{T}$ ou du tore $\mathbb{T}^d$.

5.1 Noyaux de Calderón-Zygmund

On va étudier des opérateurs de convolution dont le noyau a une singularité (non intégrable) en origine, d'où le nom "intégrales singulières".

Définition 5.1. On dit qu'une fonction mesurable $K : \mathbb{R}^d \setminus \{0\} \to \mathbb{C}$ est un *noyau de Calderón-Zygmund* s'il existe une constante $B > 0$ telle que

(H1) $|K(x)| \le B|x|^{-d}$, pour tout $x \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$,

(H2) $\int_{|x|>2|y|} |K(x) - K(x-y)|\,\mathrm{d}x \le B$, pour tout $y \in \mathbb{R}^d$,

(H3) $\int_{r<|x|<s} K(x)\,\mathrm{d}x = 0$, pour tout $0 < r < s < \infty$.

La condition (H2) s'appelle la *condition de Hörmander*. Il peut ne pas être évident comment la vérifier dans la pratique, c'est pourquoi il est utile de disposer de conditions suffisantes garantissant (H2).

Lemme 5.2. *Si $K : \mathbb{R}^d \setminus \{0\} \to \mathbb{C}$ une fonction dérivable qui vérifie*

(H2') $|\nabla K(x)| \le B|x|^{-d-1}$, pour tout $x \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$,

alors $\int_{|x|>2|y|} |K(x) - K(x-y)|\,\mathrm{d}x \le CB$ pour tout $y \in \mathbb{R}^d$, où $C = C(d)$.

Démonstration. Si (H2') est vrai, alors pour tous $x, y \in \mathbb{R}^d$ tels que $2|y| < |x|$ on a, par le théorème des accroissements finis, $|K(x) - K(x-y)| \le B2^{d+1}|x|^{-d-1}|y|$. On conclut en intégrant par rapport à x. $\square$

Définition 5.3. La *valeur principale* d'un noyau de Calderón-Zygmund K est une distribution tempérée définie par

$$(\mathrm{vp}\, K)(f) := \lim_{\epsilon\to 0^+} \int_{|x|>\epsilon} K(x) f(x)\,\mathrm{d}x, \qquad \text{pour tout } f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d).$$

Pour montrer que cette formule définit effectivement un élément de $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^d)$, pour $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$ écrivons $f(x) = \chi_{\{|x|<1\}}(x)f(0) + |x|g(x) + \chi_{\{|x|\geq 1\}}(x)f(x)$, donc $\|g\|_{L^\infty} \leq \|f\|_{L^\infty} + \|\nabla f\|_{L^\infty}$ et $g(x) = 0$ pour $|x| \geq 1$. Alors

$$\lim_{\epsilon\to 0^+} \int_{|x|>\epsilon} K(x) f(0)\chi_{\{|x|<1\}}(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{\epsilon\to 0^+} f(0)\int_{\epsilon<|x|<1} K(x)\,\mathrm{d}x = 0,$$

d'après (H3),

$$\lim_{\epsilon\to 0^+} \int_{|x|>\epsilon} K(x)|x|g(x)\,\mathrm{d}x = \int_{|x|<1} K(x)|x|g(x)\,\mathrm{d}x,$$

et

$$\lim_{\epsilon\to 0^+} \int_{|x|>\epsilon} K(x)\chi_{\{|x|\geq 1\}}(x) f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{|x|\geq 1} K(x) f(x)\,\mathrm{d}x.$$

On a donc

$$\lim_{\epsilon\to 0^+} \int_{|x|>\epsilon} K(x) f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{|x|<1} K(x)|x|g(x)\,\mathrm{d}x + \int_{|x|\geq 1} K(x) f(x)\,\mathrm{d}x,$$

et on voit que

$$\left|\lim_{\epsilon\to 0^+} \int_{|x|>\epsilon} K(x) f(x)\,\mathrm{d}x\right| \leq CB(\|f\|_{L^\infty} + \|\nabla f\|_{L^\infty} + \|f\|_{L^1}).$$

Lemme 5.4. *Si K est un noyau de Calderón-Zygmund, alors $\|\widehat{\mathrm{vp}\, K}\|_{L^\infty} \leq CB$, où $C = C(d)$.*

Démonstration. Pour $0 < r < s < \infty$, soit

$$m_{r,s}(\xi) := \int_{r<|x|<s} \mathrm{e}^{-2\pi i x\cdot\xi} K(x)\,\mathrm{d}x.$$

On va montrer que

$$\sup_{0<r<s<\infty} \|m_{r,s}\|_{L^\infty} \leq CB, \tag{5.1}$$

où B est la constante dans (H1) et (H2), et C dépend uniquement de la dimension d.

On fixe $0 < r < s < \infty$ et $\xi \in \mathbb{R}^d$. Il faut vérifier que $|m_{r,s}(\xi)| \leq CB$. Supposons d'abord que $r < |\xi| < s$ (on va commenter plus tard les cas $|\xi| \leq r$ et $|\xi| \geq s$). On estime séparément l'intégrale sur $\{r < |x| < |\xi|^{-1}\}$ et l'intégrale sur $\{|\xi|^{-1} < |x| < s\}$. Dans la région $|x| < |\xi|^{-1}$ la phase “ne varie pas beaucoup”, donc on peut s'attendre à ce que la condition d'annulation joue un rôle, ce qui est effectivement le cas :

$$\begin{aligned}\left|\int_{r<|x|<|\xi|^{-1}} \mathrm{e}^{-2\pi i x\cdot\xi} K(x)\,\mathrm{d}x\right| &= \left|\int_{r<|x|<|\xi|^{-1}} (\mathrm{e}^{-2\pi i x\cdot\xi} - 1) K(x)\,\mathrm{d}x\right| \\ &\leq 2\pi|\xi| \int_{r<|x|<|\xi|^{-1}} |x||K(x)|\,\mathrm{d}x \leq CB|\xi| \int_{|x|<|\xi|^{-1}} |x|^{-d+1}\,\mathrm{d}x \leq CB.\end{aligned}$$

Dans la région $|\xi|^{-1} < |x| < s$, la condition (H2) joue les premiers violons. L'observation cruciale est que

$$\int_{|\xi|^{-1}<\left|x-\frac{\xi}{2|\xi|^2}\right|<s} \mathrm{e}^{-2\pi i x\cdot\xi} K(x)\,\mathrm{d}x = \int_{|\xi|^{-1}<|x|<s} \mathrm{e}^{-2\pi i\left(x+\frac{\xi}{2|\xi|^2}\right)\cdot\xi} K\Big(x+\frac{\xi}{2|\xi|^2}\Big)\,\mathrm{d}x$$
$$= -\int_{|\xi|^{-1}<|x|<s} \mathrm{e}^{-2\pi i x\cdot\xi} K\Big(x+\frac{\xi}{2|\xi|^2}\Big)\,\mathrm{d}x,$$

ce qui donne, après une transformation élémentaire,

$$\begin{aligned} 2\int_{|\xi|^{-1}<|x|<s} \mathrm{e}^{-2\pi i x\cdot\xi} K\Big(x+\frac{\xi}{2|\xi|^2}\Big)\,\mathrm{d}x &= \int_{|\xi|^{-1}<|x|<s} \mathrm{e}^{-2\pi i x\cdot\xi}\Big(K(x)-K\Big(x+\frac{\xi}{2|\xi|^2}\Big)\Big)\,\mathrm{d}x \\ &+ \Big(\int_{|\xi|^{-1}<|x|<s} - \int_{|\xi|^{-1}<\left|x-\frac{\xi}{2|\xi|^2}\right|<s}\Big) \mathrm{e}^{-2\pi i x\cdot\xi} K(x)\,\mathrm{d}x. \end{aligned} \tag{5.2}$$

Avertissement : les formules qui suivent sont difficiles à comprendre si on ne fait pas de dessins. Affrontons d'abord la deuxième ligne, qui requiert juste (H1). En effet,

$$B\Big(0,s-\frac{1}{2}|\xi|^{-1}\Big)\setminus B\Big(0,\frac{3}{2}|\xi|^{-1}\Big) \subset \Big\{|\xi|^{-1} < \Big|x-\frac{\xi}{2|\xi|^2}\Big| < s\Big\} \subset B\Big(0,s+\frac{1}{2}|\xi|^{-1}\Big)\setminus B\Big(0,\frac{1}{2}|\xi|^{-1}\Big),$$
$$B\Big(0,s-\frac{1}{2}|\xi|^{-1}\Big)\setminus B\Big(0,\frac{3}{2}|\xi|^{-1}\Big) \subset \Big\{|\xi|^{-1} < |x| < s\Big\} \subset B\Big(0,s+\frac{1}{2}|\xi|^{-1}\Big)\setminus B\Big(0,\frac{1}{2}|\xi|^{-1}\Big).$$

De la relation de la théorie des ensembles (facile à vérifier) $(A\setminus B)\setminus(C\setminus D)\subset(A\setminus C)\cup(D\setminus B)$ on a

$$\Big(B\Big(0,s+\frac{1}{2}|\xi|^{-1}\Big)\setminus B\Big(0,\frac{1}{2}|\xi|^{-1}\Big)\Big)\setminus\Big(B\Big(0,s-\frac{1}{2}|\xi|^{-1}\Big)\setminus B\Big(0,\frac{3}{2}|\xi|^{-1}\Big)\Big)\subset$$
$$\Big(B\Big(0,s+\frac{1}{2}|\xi|^{-1}\Big)\setminus B\Big(0,s-\frac{1}{2}|\xi|^{-1}\Big)\Big)\cup\Big(B\Big(0,\frac{3}{2}|\xi|^{-1}\Big)\setminus B\Big(0,\frac{1}{2}|\xi|^{-1}\Big)\Big).$$

On vérifie facilement en utilisant (H1) que l'intégrale de $|K(x)|$ sur chacun de ces deux régions c'estime par CB.

Il reste la première ligne de (5.2). Ici, (H2) s'applique.

Dans le cas où par exemple $|\xi|^{-1}\le r$, on peut écrire $\int_{r<|x|<s} = \int_{|\xi|^{-1}<|x|<s} - \int_{|\xi|^{-1}<|x|<r}$ et appliquer le raisonnement ci-dessus. Cela termine la preuve de (5.1).

Soit $\phi\in\mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$. On va montrer que $|\widehat{(\mathrm{vp}\,K)}(\phi)| = |(\mathrm{vp}\,K)(\widehat{\phi})| \le CB\|\phi\|_{L^1}$. Par le théorème de représentation $(L^1)^* = L^\infty$, cela signifiera que $\widehat{\mathrm{vp}\,K}\in L^\infty(\mathbb{R}^d)$ et donnera la borne voulue sur $\widehat{\mathrm{vp}\,K}$. Par la définition de vp K on a

$$\begin{aligned} |(\mathrm{vp}\,K)(\widehat{\phi})| &= \Big|\lim_{\epsilon\to0^+}\int_{|x|>\epsilon} K(x)\widehat{\phi}(x)\,\mathrm{d}x\Big| \le \sup_{0<r<s<\infty}\Big|\int_{r<|x|<s} K(x)\widehat{\phi}(x)\,\mathrm{d}x\Big| \\ &\le \sup_{0<r<s<\infty}\Big|\int_{r<|x|<s} K(x)\int_{\mathbb{R}^d}\mathrm{e}^{-2\pi i x\cdot\xi}\phi(\xi)\,\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}x\Big| \\ &= \sup_{0<r<s<\infty}\Big|\int_{\mathbb{R}^d}\phi(\xi)\int_{r<|x|<s} K(x)\mathrm{e}^{-2\pi i x\cdot\xi}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}\xi\Big| \\ &\le \sup_{0<r<s<\infty}\|\phi\|_{L^1}\|m_{r,s}\|_{L^\infty} \le CB\|\phi\|_{L^1}. \end{aligned}$$

□

Définition 5.5. L'opérateur de Calderón-Zygmund associé à K est défini par $Tf := (\mathrm{vp}\, K)*f$ pour tout $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$, autrement dit

$$(Tf)(x) := \lim_{\epsilon\to 0^+}\int_{|y|>\epsilon} K(y)f(x-y)\,\mathrm{d}y = \lim_{\epsilon\to 0^+}\int_{|x-y|>\epsilon} K(x-y)f(y)\,\mathrm{d}y, \quad \text{pour } f\in\mathscr{S}(\mathbb{R}^d).$$

Exemple 5.6. Voici quelques opérateurs de Calderón-Zygmund.

(i) Soit $K : \mathbb{R}\setminus\{0\}\to\mathbb{C}$ donné par $K(x) = \frac{1}{\pi x}$. Il est clair que K vérifie les conditions (H1), (H2') et (H3). L'opérateur de Calderón-Zygmund correspondant est la *transformation de Hilbert* sur $\mathbb{R}$.

(ii) Soit $d \geq 1$. On définit $K_i(x) := x_i/|x|^{d+1}$. Les opérateurs de Calderón-Zygmund associés, notés R_i, sont appelés les *transformations de Riesz*.

(iii) Pour $d \geq 3$ on définit

$$K_{ij}(x) = \begin{cases} \frac{x_i x_j}{|x|^{d+2}} & \text{si } i\neq j,\\ \frac{x_i^2 - d^{-1}|x|^2}{|x|^{d+2}} & \text{si } i = j.\end{cases}$$

Les opérateurs de Calderón-Zygmund assocés R_{ij} sont les *transformations de Riesz doubles*. Leur importance vient du fait que

$$C_d R_{ij}(\Delta\phi) = \partial_{x_i}\partial_{x_j}\phi - \frac{1}{d}\delta_{ij}\Delta\phi, \qquad \text{pour tout } \phi\in\mathscr{S}(\mathbb{R}^d) \text{ et } 1\leq i,j\leq d.$$

On le vérifiera dans l'Exercice 5.2.

Proposition 5.7. *Si K est un noyau de Calderón-Zygmund, alors $\|Tf\|_{L^2} \leq CB\|f\|_{L^2}$ pour tout $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$, où $C = C(d) > 0$.*

Démonstration. Par la Proposition 4.30, pour tout $f\in\mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$ on a

$$|\widehat{Tf}(\xi)| = |\widehat{\mathrm{vp}\,K}(\xi)\widehat{f}(\xi)| \leq CB|\widehat{f}(\xi)|, \qquad \text{pour tout } \xi\in\mathbb{R}^d,$$

où la dernière inégalité vient du Lemme 5.4. Par Plancherel, on obtient $\|Tf\|_{L^2} \leq CB\|f\|_{L^2}$. □

Définition 5.8. On définit l'opérateur de Calderón-Zygmund $T : L^2(\mathbb{R}^d) \to L^2(\mathbb{R}^d)$ comme l'unique extension continue de l'opérateur $T : \mathscr{S}(\mathbb{R}^d)\to L^2(\mathbb{R}^d)$.

Lemme 5.9. *Si $f \in L^2_{\mathrm{comp}}(\mathbb{R}^d)$ (c'est-à-dire f est une fonction dans $L^2(\mathbb{R}^d)$ dont le support est borné) et $x_0 \notin \mathrm{supp}(f)$, alors Tf est une fonction continue au voisinage de x_0 et*

$$(Tf)(x_0) = \int_{\mathbb{R}^d} K(x_0-y)f(y)\,\mathrm{d}y.$$

Démonstration. Soit $R > 0$ tel que $\mathrm{supp}(f)\subset B(0,R)$ et $r > 0$ tel que $B(x_0,2r)\cap\mathrm{supp}(f) = \emptyset$. Posons $\widetilde{K} := K\chi_{\{r<|x|<|x_0|+R+r\}}$. Alors $\widetilde{K}\in L^2(\mathbb{R}^d)$, donc

$$(\widetilde{T}f)(x) := \int_{\mathbb{R}^d}\widetilde{K}(x-y)f(y)\,\mathrm{d}y$$

est une fonction continue bornée $\mathbb{R}^d\to\mathbb{C}$. Si $f_n\in\mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$ avec $\mathrm{supp}(f)\subset B(0,R)\setminus B(x_0,2r)$, alors on voit que $(Tf_n)(x) = (\widetilde{T}f_n)(x)$ pour tout x tel que $|x_0-x| < r$. En prenant $f_n\to f$ dans $L^2(\mathbb{R}^d)$ on obtient $(Tf)(x) = (\widetilde{T}f)(x)$ pour tout $|x-x_0| < r$, ce qui montre la continuité de Tf au voisinage de x_0 et que

$$(Tf)(x_0) = (\widetilde{T}f)(x_0) = \int_{\mathbb{R}^d}\widetilde{K}(x_0-y)f(y)\,\mathrm{d}y = \int_{\mathbb{R}^d}K(x_0-y)f(y)\,\mathrm{d}y.$$

□

5.2 Estimations L^1-faible et continuité dans L^p

Commençons par introduire la fonction maximale de Hardy-Littlewood sur $\mathbb{R}^d$.

Définition 5.10. Pour tout $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^d)$ on définit

$$(Mf)(x) := \sup_{B \ni x} \frac{1}{|B|} \int_B |f(y)|\,\mathrm{d}y,$$

où le supremum et pris sur l'ensemble des boules qui contiennent x. Par un argument similaire à celui qu'on a vu dans le cas du cercle, on obtient que Mf est une fonction mesurable.

Remarque 5.11. Si $f \notin L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^d)$, alors $(Mf)(x) = \infty$ pour tout $x \in \mathbb{R}^d$. Il peut arriver que $(Mf)(x) = \infty$ pour tout $x \in \mathbb{R}^d$, même si $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^d)$.

La démonstration du Théorème 3.23 se généralise facilement et on obtient le résultat suivant.

Théorème 5.12. *La fonction maximale de Hardy-Littlewood a les propriétés suivantes :*

(i) $\|Mf\|_{L^{1,\infty}} \le 3^d \|f\|_{L^1}$, *pour tout* $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$,

(ii) pour tout $1 < p \le \infty$ *il existe une constante* $C_p < \infty$ *telle que* $\|Mf\|_{L^p} \le C_p \|f\|_{L^p}$ *pour tout* $f \in L^p(\mathbb{T})$.

□

Le but principal de cette section est de montrer ce qui suit.

Proposition 5.13. *Soit* $T : L^2(\mathbb{R}^d) \to L^2(\mathbb{R}^d)$ *un opérateur linéaire borné,* $\|T\|_{\mathscr{L}(L^2)} \le B$, *tel que pour toute fonction* $f \in L^2_{\mathrm{comp}}(\mathbb{R}^d)$, *c'est-à-dire une fonction dans* $L^2(\mathbb{R}^d)$ *dont le support est borné,*

$$(Tf)(x) = \int_{\mathbb{R}^d} K(x-y) f(y)\,\mathrm{d}y, \qquad \text{pour tout } x \notin \mathrm{supp}(f),$$

où $K : \mathbb{R}^d \setminus \{0\} \to \mathbb{C}$ *est une fonction mesurable localement bornée qui vérifie (H2). Alors* $\|Tf\|_{L^{1,\infty}} \le CB\|f\|_{L^1}$ *pour tout* $f \in L^1(\mathbb{R}^d) \cap L^2(\mathbb{R}^d)$, *où* $C = C(d)$.

Avant d'aborder la démonstration, on introduit un outil appelé la *décomposition de Calderón-Zygmund*. On dit que $Q \subset \mathbb{R}^d$ est un *cube de taille* l si $\left|Q \triangle \prod_{j=1}^d [x_j, x_j + l]\right| = 0$ pour un certain $x = (x_1, \ldots, x_d) \in \mathbb{R}^d$.

Lemme 5.14. *Si* $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$, *alors pour presque tout* $x \in \mathbb{R}^d$

$$\lim_{l \to 0^+} \sup_{Q \ni x} \frac{1}{l^d} \int_Q |f(y) - f(x)|\,\mathrm{d}y = 0,$$

où le supremum est pris sur l'ensemble des cubes ouverts de taille l qui contiennent x.

Démonstration. Il est bien de comparer ce lemme avec l'Exercice 3.6. Il suffit de montrer que pour tout $\epsilon > 0$ l'ensemble $\{x \in \mathbb{R}^d : \limsup_{l\to 0^+} \sup_{Q\ni x} \frac{1}{l^d}\int_Q |f(y)-f(x)|\,\mathrm{d}y \geq \epsilon\}$ est de mesure de Lebesgue nulle. Soit $f = g + h$, où $g \in C_0(\mathbb{R}^d)$. Alors

$$\begin{aligned}
&\limsup_{l\to 0^+}\sup_{Q\ni x}\frac{1}{l^d}\int_Q |f(y)-f(x)|\,\mathrm{d}y \\
&\leq \limsup_{l\to 0^+}\sup_{Q\ni x}\frac{1}{l^d}\int_Q |g(y)-g(x)|\,\mathrm{d}y + \sup_{l>0}\sup_{Q\ni x}\frac{1}{l^d}\int_Q |h(y)-h(x)|\,\mathrm{d}y \\
&\leq 0 + |h(x)| + \sup_{l>0, Q\ni x}\frac{1}{l^d}\int_Q |h(y)|\,\mathrm{d}y.
\end{aligned}$$

On observe que pour tout cube ouvert Q de taille l qui contient x on a $\frac{1}{l^d}\int_Q |h(y)|\,\mathrm{d}y \leq C(Mh)(x)$, où $C = C(d)$. En effet, soit B la boule du même centre que Q et du rayon $\frac{l\sqrt{d}}{2}$, de sorte que $x \in Q \subset B$ et

$$\frac{1}{l^d}\int_Q |h(y)|\,\mathrm{d}y \leq \frac{1}{l^d}\int_B |h(y)|\,\mathrm{d}y \leq \frac{C(d)}{|B|}\int_B |h(y)|\,\mathrm{d}y \leq C(Mh)(x).$$

On a donc

$$\limsup_{l\to 0^+}\sup_{Q\ni x}\frac{1}{l^d}\int_Q |f(y)-f(x)|\,\mathrm{d}y \leq |h(x)| + C(Mh)(x).$$

Comme $\|h\|_{L^1}$ peut être rendu arbitrairement petit, le Théorème 5.12 (i) permet de conclure. □

Corollaire 5.15. *Si $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$, alors pour presque tout $x \in \mathbb{R}^d$*

$$\liminf_{l\to 0^+}\inf_{Q\ni x}\frac{1}{l^d}\int_Q |f(y)|\,\mathrm{d}y \geq |f(x)|, \tag{5.3}$$

où l'infimum est pris pour tous les cubes ouverts de taille l qui contiennent x.

Démonstration. Pour tout $x, y \in \mathbb{R}^d$ il y a $|f(x)| - |f(y)| \leq |f(x) - f(y)|$, donc par le lemme précédent

$$|f(x)| - \liminf_{l\to 0^+}\inf_{Q\ni x}\frac{1}{l^d}\int_Q |f(y)|\,\mathrm{d}y = \limsup_{l\to 0^+}\sup_{Q\ni x}\frac{1}{l^d}\int_Q (|f(x)| - |f(y)|)\,\mathrm{d}y \leq 0.$$

□

Lemme 5.16. *Soit $f \in L^1(\mathbb{T}^d)$ et $\lambda > 0$. Il existe une famille (dénombrable) de cubes disjoints $\mathscr{B} = \{Q\}$ ayant les propriétés suivantes :*

(i) $\lambda < \frac{1}{|Q|}\int_Q |f(x)|\,\mathrm{d}x \leq 2^d\lambda$ *pour tout* $Q \in \mathscr{B}$,

(ii) $\left|\bigcup_{Q\in\mathscr{B}} Q\right| < \frac{1}{\lambda}\|f\|_{L^1}$ *si* $f \neq 0$,

(iii) si $b := \sum_{Q\in\mathscr{B}} \chi_Q f$ *et* $g := f - b$, *alors* $\|g\|_{L^\infty} \leq \lambda$.

Démonstration. Pour tout $m \in \mathbb{Z}$ on définit une collection $\mathscr{D}_m$ de cubes "dyadiques" de taille 2^m :

$$\mathscr{D}_m := \Big\{\prod_{j=1}^{d}]2^m x_j, 2^m(x_j+1)[: x_j \in \mathbb{Z}\Big\}.$$

Pour tout $Q_1 \in \mathscr{D}_{m_1}$ et $Q_2 \in \mathscr{D}_{m_2}$ on a $Q_1 \subset Q_2$, $Q_2 \subset Q_1$ ou $Q_1 \cap Q_2 = \emptyset$.

Prenons $m_0 \in \mathbb{Z}$ tel que $\|f\|_{L^1} \leq \lambda 2^{m_0}$, donc

$$\frac{1}{|Q|}\int_Q |f(x)|\,\mathrm{d}x \leq \lambda, \qquad \text{pour tout } Q \in \mathscr{D}_{m_0}. \tag{5.4}$$

Pour $m = m_0, m_0-1, m_0-2, \ldots$, on construit par récurrence des familles $\mathscr{B}_m \subset \mathscr{D}_m$ de manière suivante.

— On pose $\mathscr{B}_{m_0} := \emptyset$.

— Supposons que $\mathscr{B}_m$ est construit. Pour chaque cube $Q \in \mathscr{D}_m \setminus \mathscr{B}_m$, on considère les cubes $Q_1, \ldots, Q_{2^d} \in \mathscr{D}_{m-1}$ tels que $Q_k \subset Q$. On décrète que $Q_k \in \mathscr{B}_{m-1}$ si, et seulement si, $\frac{1}{|Q_k|}\int_{Q_k} |f(x)|\,\mathrm{d}x > \lambda$.

On définit $\mathscr{B} := \bigcup_{m \leq m_0} \mathscr{B}_m$. On va montrer par récurrence que, pour tout $m \leq m_0$,

$$\lambda < \frac{1}{|Q|}\int_Q |f(x)|\,\mathrm{d}x \leq 2^d\lambda \quad \text{si } Q \in \mathscr{B}_m, \qquad \frac{1}{|Q|}\int_Q |f(x)|\,\mathrm{d}x \leq \lambda \quad \text{si } Q \in \mathscr{D}_m \setminus \mathscr{B}_m.$$

Pour $m = m_0$ c'est vrai, par (5.4). Pour montrer l'hérédité, on observe que, par la construction, $Q \in \mathscr{B}_{m-1}$ implique qu'il existe $\widetilde{Q} \in \mathscr{D} \setminus \mathscr{B}_m$ tel que $Q \subset \widetilde{Q}$. Par l'hypothèse de récurrence on a $\frac{1}{|\widetilde{Q}|}\int_{\widetilde{Q}} |f(x)|\,\mathrm{d}x \leq \lambda$, donc, comme $|Q| = 2^{-d}|\widetilde{Q}|$, $\frac{1}{|Q|}\int_Q |f(x)|\,\mathrm{d}x \leq 2^d\lambda$. Cela montre (i), et (ii) s'obtient facilement en multipliant par $|Q|$ l'inégalité de gauche dans (i) et en sommant pour tout $Q \in \mathscr{B}$.

Pour montrer (iii), prenons $x = (x_1, \ldots, x_d) \in \mathbb{R}^d \setminus \bigcup_{Q \in \mathscr{B}} \overline{Q}$ tel que (5.3) est vrai, et tel que, pour tout $1 \leq j \leq d$ et tout $m \in \mathbb{Z}$, $2^{-m}x_j \notin \mathbb{Z}$ (la dernière condition signifie que x n'appartient au bord d'aucun cube dans $\mathscr{D}$). Pour tout $m \leq m_0$ il existe un cube ouvert $Q \in \mathscr{D}_m \setminus \mathscr{B}_m$ tel que $x \in Q$. En particulier $\frac{1}{|Q|}\int_Q |f(y)|\,\mathrm{d}y \leq \lambda$, et la taille de Q tend vers 0 quand $m \to -\infty$. Alors (5.3) donne $|f(x)| \leq \lambda$, ce qui termine la preuve. □

Démonstration de la Proposition 5.13. En remplaçant T par $\frac{1}{B}T$ on peut supposer, sans perdre la généralité, que $B = 1$.

Soit $\lambda > 0$. Il faut montrer que

$$|\{x : |(Tf)(x)| > \lambda\}| \leq \frac{CB}{\lambda}\|f\|_{L^1}.$$

Soit $\mathscr{B}$ la famille de cubes donnée par le Lemme 5.16 pour cette valeur de λ. Pour tout $Q \in \mathscr{B}$ soit $f_Q := \chi_Q\Big(f - \frac{1}{|Q|}\int_Q f(x)\,\mathrm{d}x\Big)$. On pose

$$f_2 := \sum_{Q \in \mathscr{B}} f_Q = b - \sum_{Q \in \mathscr{B}} \chi_Q \frac{1}{|Q|}\int_Q f(x)\,\mathrm{d}x, \qquad f_1 := f - f_2 = g + \sum_{Q \in \mathscr{B}} \chi_Q \frac{1}{|Q|}\int_Q f(x)\,\mathrm{d}x.$$

En utilisant la linéarité de T, on écrit

$$|\{x : |(Tf)(x)| > \lambda\}| \leq |\{x : |(Tf_1)(x)| > \lambda/2\}| + |\{x : |(Tf_2)(x)| > \lambda/2\}|.$$

Le premier terme est facile :

$$|\{x : |(Tf_1)(x)| > \lambda/2\}| \leq \frac{4}{\lambda^2}\|Tf_1\|_{L^2}^2 \leq \frac{4}{\lambda^2}\|f_1\|_{L^2}^2 \leq \frac{4}{\lambda^2}\|f_1\|_{L^1}\|f_1\|_{L^\infty},$$

et on observe que $\|f_1\|_{L^1} \le \|f\|_{L^1}$ et $\|f_1\|_{L^\infty} \le 2^d\lambda$ (en effet, $\|g\|_{L^\infty} \le \lambda \le 2^d\lambda$ et pour tout $Q \in \mathscr{B}$ on a $\left|\frac{1}{|Q|}\int_Q f(x)\,\mathrm{d}x\right| \le 2^d\lambda$).

C'est dans l'estimation de $|\{x : |(Tf_2)(x)| > \lambda/2\}|$ que la condition de Hörmander (H2) joue un rôle. Pour tout $Q \in \mathscr{B}$, soit Q^* le cube du même centre, et de taille $2\sqrt{d} \times$ (taille de Q). Alors

$$|\{x : |(Tf_2)(x)| > \lambda/2\}| \le \left|\bigcup_{Q\in\mathscr{B}} Q^*\right| + \left|\{x \in \mathbb{R}^d \setminus \bigcup_{Q\in\mathscr{B}} Q^* : |(Tf_2)(x)| > \lambda/2\right|.$$

Le premier terme est $\le \frac{C}{\lambda}\|f\|_{L^1}$ par le Lemme 5.16 (ii). On applique l'inégalité de Markov au deuxième terme :

$$\left|\{x \in \mathbb{R}^d \setminus \bigcup_{Q\in\mathscr{B}} Q^* : |(Tf_2)(x)| > \lambda/2\right| \le \frac{2}{\lambda}\int_{\mathbb{R}^d\setminus\bigcup_{Q\in\mathscr{B}} Q^*} |(Tf_2)(x)|\,\mathrm{d}x \le \frac{2}{\lambda}\sum_{Q\in\mathscr{B}}\int_{\mathbb{R}^d\setminus Q^*} |(Tf_Q)(x)|\,\mathrm{d}x.$$

Fixons $Q \in \mathscr{B}$. Pour tout $x \in \mathbb{R}^d \setminus Q^*$ on a

$$(Tf_Q)(x) = \int_{\mathbb{R}^d} K(x-y)f_Q(y)\,\mathrm{d}y = \int_{\mathbb{R}^d} (K(x-y) - K(x-y_Q))f_Q(y)\,\mathrm{d}y,$$

où y_Q est le centre du cube Q. La dernière inégalité est une conséquence du fait que $\int_{\mathbb{R}^d} f_Q(y)\,\mathrm{d}y = 0$. Par Fubini, on a

$$\int_{\mathbb{R}^d\setminus Q^*} |(Tf_Q)(x)|\,\mathrm{d}x \le \int_{\mathbb{R}^d} |f_Q(y)| \int_{\mathbb{R}^d\setminus Q^*} |K(x-y) - K(x-y_Q)|\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \le C\|f_Q\|_{L^1},$$

où la dernière inégalité vient de l'hypothèse (H2). En effet, soit l la taille de Q. Si $y \in Q$, alors $|y - y_Q| < \frac{l\sqrt{d}}{2}$. Si $x \in \mathbb{R}^d \setminus Q^*$, alors $|x - y_Q| \ge 2\sqrt{d} \times \frac{l}{2} > 2|y - y_Q|$. □

Remarque 5.17. Soulignons que seulement l'hypothèse (H2) a été utilisée dans la preuve de la Proposition 5.13.

Théorème 5.18. *Soit $T : L^2(\mathbb{R}^d) \to L^2(\mathbb{R}^d)$ un opérateur linéaire borné tel que pour toute fonction $f \in L^2_{\mathrm{comp}}(\mathbb{R}^d)$, c'est-à-dire une fonction dans $L^2(\mathbb{R}^d)$ dont le support est borné,*

$$(Tf)(x) = \int_{\mathbb{R}^d} K(x-y)f(y)\,\mathrm{d}y, \qquad \textit{pour tout } x \notin \operatorname{supp}(f), \tag{5.5}$$

où $K : \mathbb{R}^d \setminus \{0\} \to \mathbb{C}$ est une fonction mesurable localement bornée qui vérifie (H2). Alors $\|Tf\|_{L^p} \le CB\|f\|_{L^p}$ pour tout $f \in L^2(\mathbb{R}^d) \cap L^p(\mathbb{R}^d)$, où $C = C(d,p)$.

Démonstration. Soit d'abord $1 < p \le 2$. La Proposition 5.13 et l'Exercice 3.4 donnent $\|Tf\|_{L^p} \le CB\|f\|_{L^p}$ pour tout $f \in L^1(\mathbb{R}^d) \cap L^2(\mathbb{R}^d)$.

Si $f \in L^p(\mathbb{R}^d) \cap L^2(\mathbb{R}^d)$, alors on utilise un argument d'approximation standard. Soit $f_n \in L^1(\mathbb{R}^d) \cap L^2(\mathbb{R}^d)$ et $\|f_n - f\|_{L^p\cap L^2} \to 0$. Alors $g := \lim_{n\to\infty} Tf_n$ existe dans $L^p(\mathbb{R}^d) \cap L^2(\mathbb{R}^d)$. En particulier $g = \lim_{n\to\infty} Tf_n = Tf$, avec la limite prise au sens $L^2(\mathbb{R}^d)$, donc

$$\|Tf\|_{L^p} = \|g\|_{L^p} \le \lim_{n\to\infty} \|Tf_n\|_{L^p} \le CB \lim_{n\to\infty} \|f_n\|_{L^p} = CB\|f\|_{L^p}.$$

Soit maintenant $2 \leq p < \infty$. On va montrer que pour tout $g \in L^2_{\mathrm{comp}}(\mathbb{R}^2)$ on a

$$(T^*g)(x) = \int_{\mathbb{R}^d} \overline{K(-x+y)}g(y)\,\mathrm{d}y, \qquad \text{pour tout } x \notin \operatorname{supp}(g). \tag{5.6}$$

Supposons que c'est vrai et finissons la démonstration. Comme $T^* : L^2(\mathbb{R}^d) \to L^2(\mathbb{R}^d)$ est un opérateur borné et $\overline{\check{K}}$ vérifie (H2), la première partie de la preuve impliquera que $\|T^*g\|_{L^{p'}} \leq CB\|g\|_{L^{p'}}$ pour tout $g \in L^2(\mathbb{R}^d) \cap L^{p'}(\mathbb{R}^d)$, où p' est l'exposant dual de p, c'est-à-dire $(p')^{-1} + p^{-1} = 1$. Si $f \in L^2(\mathbb{R}^d) \cap L^p(\mathbb{R}^d)$, alors pour tout $g \in L^2(\mathbb{R}^d) \cap L^{p'}(\mathbb{R}^d)$

$$\left| \int_{\mathbb{R}^d} \overline{g(x)}(Tf)(x)\,\mathrm{d}x \right| = \left| \int_{\mathbb{R}^d} \overline{(T^*g)(x)}f(x)\,\mathrm{d}x \right| \leq \|T^*g\|_{L^{p'}}\|f\|_{L^p} \leq CB\|g\|_{L^{p'}}\|f\|_{L^p},$$

donc par le théorème de représentation $(L^{p'})^* = L^p$ on déduit $Tf \in L^p(\mathbb{R}^d)$ et $\|Tf\|_{L^p} \leq CB\|f\|_{L^p}$.

Il ne reste qu'à vérifier (5.6). Soit $g \in L^2_{\mathrm{comp}}(\mathbb{R}^d)$, $x_0 \in \mathbb{R}^d \setminus \operatorname{supp}(g)$, $R > 0$ tel que $\operatorname{supp}(g) \subset B(0,R)$ et $r > 0$ tel que $B(x_0, 2r) \cap \operatorname{supp}(g) = \emptyset$. Soit $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$ avec $\operatorname{supp}(f) \subset B(x_0, r)$. La formule (5.5) et la preuve du Lemme 5.9 montrent que Tf est une fonction continue sur $\operatorname{supp}(g)$. Soit $\widetilde{K} := \chi_{\{r \leq |x| \leq R+r+|x_0|\}}K$. On a

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^d} \overline{g(x)}(Tf)(x)\,\mathrm{d}x &= \int_{\mathbb{R}^d} \overline{g(x)} \int_{\mathbb{R}^d} K(x-y)f(y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^d} \overline{g(x)} \int_{\mathbb{R}^d} \widetilde{K}(x-y)f(y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} f(y) \int_{\mathbb{R}^d} \widetilde{K}(-y+x))\overline{g(x)}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_{\mathbb{R}^d} f(y) \overline{\int_{\mathbb{R}^d} \overline{K(-y+x)}g(x)\,\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}y,\end{aligned}$$

autrement dit

$$\int_{\mathbb{R}^d} \overline{(T^*g)(x)}f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^d} \overline{h(x)}f(x)\,\mathrm{d}x,$$

pour tout $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$ telle que $\operatorname{supp}(f) \subset B(x_0, r)$, où h est une fonction continue sur $B(x_0, r)$ définie par $h(x) := \int_{\mathbb{R}^d} \overline{K(-x+y)}g(y)\,\mathrm{d}y$ pour tout $x \in B(x_0, r)$. Mais cela implique $(T^*g)(x) = h(x)$ pour tout $x \in B(x_0, r)$, en particulier (5.6) pour $x = x_0$. □

5.3 Continuité dans les espaces de Hölder

Théorème 5.19. *Soit K un noyau de Calderón-Zygmund fort, c'est-à-dire qui vérifie (H1), (H2') et (H3), et soit $0 < \alpha < 1$. Pour toute fonction $f \in C^{0,\alpha}(\mathbb{R}^d)$ telle que $\operatorname{supp}(f) \subset B(0,1) \subset \mathbb{R}^d$, posons*

$$(Tf)(x) := \lim_{\epsilon \to 0^+} \int_{|y| > \epsilon} K(y)f(x-y)\,\mathrm{d}y = \lim_{\epsilon \to 0^+} \int_{|x-y| > \epsilon} K(x-y)f(y)\,\mathrm{d}y, \quad \textit{pour tout } x \in \mathbb{R}^d. \tag{5.7}$$

Il existe $C = C(d, \alpha)$ tel que $\|Tf\|_{C^{0,\alpha}} \leq CB\|f\|_{C^{0,\alpha}}$ pour tout $f \in C^{0,\alpha}(\mathbb{R}^d)$.

Remarque 5.20. Il fait partie de la démonstration de montrer que (5.7) a un sens pour tout $x \in \mathbb{R}^d$ et définit une fonction disons continue (a posteriori hölderienne).

Remarque 5.21. L'hypothèse $\operatorname{supp}(f) \subset B(0,1)$ pourrait être affaiblie, mais on a besoin de supposer une sorte de décroissance de $|f(x)|$ quand $|x| \to \infty$.

Démonstration. Sans restreindre la généralité, on peut supposer $B = 1$. Si $|x| \le 2$, alors

$$\int_{|y|>\epsilon} K(y) f(x-y)\,\mathrm{d}y = \int_{3\ge|y|>\epsilon} K(y) f(x-y)\,\mathrm{d}y = \int_{3\ge|y|>\epsilon} K(y)(f(x-y) - f(x))\,\mathrm{d}y.$$

De l'estimation

$$\int_{3\ge|y|>\epsilon} |K(y)||f(x-y) - f(x)|\,\mathrm{d}y \le [f]_\alpha \int_{|y|\le 3} |y|^{-d}|y|^\alpha\,\mathrm{d}y \le C(d,\alpha)[f]_\alpha.$$

on déduit que la limite $\epsilon \to 0$ existe et $|(Tf)(x)| \le C[f]_\alpha$ pour tout $|x| \le 2$. Si $|x| > 2$, alors

$$\int_{|y|>\epsilon} K(y) f(x-y)\,\mathrm{d}y = \int_{|y|>1} K(y) f(x-y)\,\mathrm{d}y,$$

et en vue du fait que $|K(y)| \le 1$ pour $|y| \ge 1$ on a $|(Tf)(x)| \le \|f\|_{L^1} \le C\|f\|_{L^\infty}$.

Soit maintenant $x, x' \in \mathbb{R}^d$ et $|x - x'| = \delta < \frac{1}{100}$. On estime $|(Tf)(x) - (Tf)(x')|$ en divisant l'intégration en deux régions :

$$\int_{|y|>\epsilon} K(y)(f(x-y) - f(x'-y))\,\mathrm{d}y = \left(\int_{|y|>3\delta} + \int_{3\delta\ge|y|>\epsilon}\right) K(y)(f(x-y) - f(x'-y))\,\mathrm{d}y.$$

En utilisant la condition (H3), la deuxième intégrale s'estime par

$$\left|\int_{3\delta\ge|y|>\epsilon} K(y)(f(x-y) - f(x) - f(x'-y) + f(x'))\,\mathrm{d}y\right| \le C[f]_\alpha \int_{3\delta\ge|y|>\epsilon} |y|^{-d}|y|^\alpha\,\mathrm{d}y \le C[f]_\alpha \delta^\alpha.$$

Pour la première intégrale, introduisons $\widetilde{K} := \chi_{|y|>3\delta} K$, de sorte que

$$\begin{aligned}\int_{|y|>3\delta} K(y)(f(x-y) - f(x'-y))\,\mathrm{d}y &= \int_{\mathbb{R}^d} \widetilde{K}(y)(f(x-y) - f(x'-y))\,\mathrm{d}y \\ = \int_{\mathbb{R}^d} (\widetilde{K}(x-y) - \widetilde{K}(x'-y)) f(y)\,\mathrm{d}y &= \int_{\mathbb{R}^d} (\widetilde{K}(x-y) - \widetilde{K}(x'-y))(f(y) - f(x))\,\mathrm{d}y.\end{aligned}$$

Si $|x-y| < 2\delta$ ou $|x'-y| < 2\delta$, alors $\widetilde{K}(x-y) = \widetilde{K}(x'-y) = 0$. Mais $|x-y| \ge 2\delta$ et $|x'-y| \ge 2\delta$ implique en particulier $|x'-y| \ge \frac{1}{2}|x-y|$. Par le théorème des accroissements finis, on a donc $|\widetilde{K}(x-y) - \widetilde{K}(x'-y)| \le \frac{C\delta}{|x-y|^{d+1}}$, ce qui permet de conclure car

$$C[f]_\alpha \delta \int_{|x-y|\ge 2\delta} |x-y|^{\alpha-d-1}\,\mathrm{d}y \le C[f]_\alpha \delta^\alpha.$$

$\square$

Corollaire 5.22. *(i) Pour tout $1 < p < \infty$ il existe $C = C(d,p)$ tel que*

$$\sup_{1\le i,j\le d} \|\partial_{x_i x_j} u\|_{L^p} \le C_{p,d}\|\Delta u\|_{L^p}, \qquad \textit{pour tout } u \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d).$$

(ii) *Pour tout* $0 < \alpha < 1$ *il existe* $C = C(d, \alpha)$ *tel que*

$$\sup_{1 \le i,j \le d} [\partial_{x_i x_j} u]_\alpha \le C_{p,d} [\Delta u]_\alpha, \qquad \textit{pour tout } u \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d).$$

Démonstration. Cela résulte directement du fait que les transformations de Riesz doubles sont des opérateurs de Calderón-Zygmund forts. Dans le cas hölderien, on n'utilise pas vraiment le Théorème 5.19, mais plutôt la deuxième partie de la démonstration. Si $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$ et $x, x' \in \mathbb{R}^d$ avec $|x - x'| = \delta$, alors l'intégrale $\int_{\epsilon < |x| \le 3\delta}$ s'estime exactement comme dans la preuve du Théorème. Concernant l'autre intégrale, on a, grâce à la décroissance rapide de f,

$$\int_{|y| > 3\delta} K(y)(f(x-y) - f(x'-y))\,\mathrm{d}y = \lim_{R \to \infty} \int_{R \ge |y| > 3\delta} K(y)(f(x-y) - f(x'-y))\,\mathrm{d}y.$$

Pour R fixe, on pose $\widetilde{K} := \chi_{\{R \ge |y| > 3\delta\}} K$, et le calcul dans la preuve du Théorme montre que

$$\left| \int_{R \ge |y| > 3\delta} K(y)(f(x-y) - f(x'-y))\,\mathrm{d}y \right| = \left| \int_{\mathbb{R}^d} \widetilde{K}(y)(f(x-y) - f(x'-y))\,\mathrm{d}y \right| \le C[f]_\alpha \delta^\alpha.$$

Maintenant on passe à la limite $R \to \infty$. $\square$

5.4 Exercices

Exercice 5.1. Écrire les détails de la preuve du Théorème 5.12.

Exercice 5.2 (M-S, Exercise 7.4)**.** On étudie dans cet exercice les transformées de Riesz doubles. Soit $d \geq 3$.

(i) Soit $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$ et posons $u(x) := C \int_{\mathbb{R}^d} |x-y|^{2-d} f(y)\,\mathrm{d}y$, où $C = C(d)$ est une constante qu'il faudra déterminer. Montrer que, avec le bon choix de C, u est une solution de l'équation

$$\Delta u = f.$$

(ii) Soit toujours $u(x) := C \int_{\mathbb{R}^d} |x-y|^{2-d} f(y)\,\mathrm{d}y$, et $1 \leq i, j \leq d$. Soit $K_{ij}(x) := \frac{x_i x_j}{|x|^{d+2}} - \frac{1}{d}\delta_{ij}\frac{1}{|x|^d}$, où $\delta_{ij} = 1$ si $i = j$ et $\delta_{ij} = 0$ si $i \neq j$. Montrer que

$$\partial_{x_i}\partial_{x_j} u(x) = \widetilde{C} \int_{\mathbb{R}^d} K_{ij}(x-y) f(y)\,\mathrm{d}y + \frac{1}{d}\delta_{ij} f(x),$$

où il faut comprendre l'intégrale au sens de la valeur principale, c'est-à-dire $\lim_{\epsilon \to 0^+} \int_{|x-y|>\epsilon} K_{ij}(x-y) f(y)\,\mathrm{d}y$, et $\widetilde{C} = \widetilde{C}(d)$.

(iii) Vérifier que K_{ij} est un noyau de Calderón-Zygmund fort.

Exercice 5.3 (M-S, Problem 7.3)**.** On généralise ici le Théorème 5.18 au cas des opérateurs qui ne sont pas des opérateurs de convolution.

Soit T un opérateur borné $L^2(\mathbb{R}^d) \to L^2(\mathbb{R}^d)$ tel que, pour une certaine fonction localement bornée $K : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \setminus \Delta \to \mathbb{C}$, où $\Delta := \{x = y\}$ est la diagonale dans $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$, et pour tout $f \in L^2_{\mathrm{comp}}(\mathbb{R}^d)$

$$(Tf)(x) = \int_{\mathbb{R}^d} K(x,y) f(y)\,\mathrm{d}y, \qquad \text{pour tout } x \notin \operatorname{supp}(f).$$

Supposons aussi les *conditions de Hörmander* :

$$\int_{\{|x-y|>2|y-y'|\}} |K(x,y) - K(x,y')|\,\mathrm{d}x \leq A, \quad \text{pour tout } y \neq y',$$
$$\int_{\{|x-y|>2|x-x'|\}} |K(x,y) - K(x',y)|\,\mathrm{d}y \leq A, \quad \text{pour tout } x \neq x'.$$

Alors $\|Tf\|_{L^{1,\infty}} \leq CA\|f\|_{L^1}$ pour tout $f \in L^1(\mathbb{R}^d) \cap L^2(\mathbb{R}^d)$, où $C = C(d)$. Aussi, pour tout $1 < p < \infty$ il existe $C = C(d,p)$ tel que $\|Tf\|_{L^p} \leq CA\|f\|_{L^p}$ pour tout $f \in L^p(\mathbb{R}^d) \cap L^2(\mathbb{R}^d)$.

Chapitre 6

Théorie de Littlewood-Paley

6.1 Théorème de multiplicateurs de Mikhlin

À toute distribution $Q \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^d)$ est associé un *opérateur de convolution* T, défini pour tout $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$ par $Tf := Q * f$. Soit $m := \mathscr{F}^{-1}(Q) \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^d)$. Alors $\widehat{Tf} = m\widehat{f}$ pour tout $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$, au sens $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^d)$. On appèle $T = T_m$ *l'opérateur de multiplication de Fourier* correspondant au *multiplicateur de Fourier* m. On dit aussi que m est le *symbole* de l'opérateur $T = T_m$.

Est-il possible d'avoir des conditions simples sur le symbole qui impliqueraient des propriétés essentielles de l'opérateur correspondant, telles que, par exemple, la continuité entre deux espaces fonctionnels ? On montre ici un exemple de résultat de ce type.

Théorème 6.1. *Pour tout $1 < p < \infty$ il existe $C = C(d,p)$ ayant la propriété suivante. Soit $m \in C^{d+2}(\mathbb{R}^d \setminus \{0\})$ une fonction à valeurs complexes qui vérifie*

$$|\partial^\gamma m(\xi)| \le B|\xi|^{-|\gamma|}, \quad \text{pour tout } |\gamma| \le d+2,\ \xi \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}. \tag{6.1}$$

Soit T_m l'opérateur de multiplication de Fourier de symbole m. Alors

$$\|T_m f\|_{L^p} \le CB\|f\|_{L^p}, \qquad \text{pour tout } f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d).$$

Avant de démontrer ce théorème, on introduit la *décomposition dyadique de l'identité*.

Lemme 6.2. *Il existe $\chi, \varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$ des fonctions positives, sphériquement symétriques, telles que* $\mathrm{supp}(\varphi) \subset \{\xi : \frac{1}{2} \le |\xi| \le 2\}$, $\mathrm{supp}(\chi) \subset \{\xi : |\xi| \le 2\}$ *et*

$$\chi(\xi) + \sum_{j=1}^{\infty} \varphi(2^{-j}\xi) = 1, \qquad \text{pour tout } \xi \in \mathbb{R}^d, \tag{6.2}$$

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty} \varphi(2^{-j}\xi) = 1, \qquad \text{pour tout } \xi \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}. \tag{6.3}$$

Pour chaque ξ, au plus deux termes dans les sommes ci-dessus sont non-nuls.

Démonstration. Soit $\theta \in C^\infty([0,\infty[)$ une fonction décroissante telle que $\theta(r) = 1$ pour $r \le 1$ et $\theta(r) = 0$ pour tout $r \ge 2$. Soit $\chi(\xi) := \theta(|\xi|)$ et $\varphi(\xi) := \chi(\xi) - \chi(2\xi)$. On voit que $\varphi(\xi) = 0$ si

$|\xi| \leq \frac{1}{2}$, $\varphi(\xi) \geq 0$ si $\frac{1}{2} \leq |\xi| \leq 2$ et $\varphi(\xi) = 0$ si $|\xi| \geq 2$. Si $\chi(\xi) \neq 0$, alors $|\xi| \leq 2$, donc pour $j \geq 2$ on a $|2^{-j}\xi| \leq \frac{1}{2}$ et $\varphi(2^{-j}\xi) = 0$, donc il y a au plus 2 termes non-nuls dans la somme (6.2). Soit $1 \leq j \leq k-2$. Si $\varphi(2^{-j}\xi) \neq 0$, alors $|2^{-j}\xi| \leq 2$, donc $|2^{-k}\xi| \leq \frac{1}{2}$, donc $\varphi(2^{-k}\xi) = 0$, ce qui montre que, si $\chi(\xi) = 0$, alors il y aussi au plus 2 termes non-nuls dans la somme (6.2). Pour tout $N \in \mathbb{N}$ on a

$$\sum_{j=1}^{N} \varphi(2^{-j}\xi) = \sum_{j=1}^{N} (\chi(2^{-j}\xi) - \chi(2^{-j+1}\xi)) = \chi(2^{-N}\xi) - \chi(\xi).$$

Pour $\xi \in \mathbb{R}^d$ donné, on a $\chi(2^{-N}\xi) = 1$ pour N suffisamment grand, donc on obtient (6.2).

La preuve de (6.3) est similaire. On voit que, si $-\infty < j \leq k-2 < \infty$, alors $\varphi(2^{-j}\xi) \neq 0$ implique $\varphi(2^{-k}\xi) = 0$, donc il y a au plus 2 termes non-nuls dans la somme. On a

$$\sum_{j=-N}^{N} \varphi(2^{-j}\xi) = \sum_{j=-N}^{N} (\chi(2^{-j}\xi) - \chi(2^{-j+1}\xi)) = \chi(2^{-N}\xi) - \chi(2^{N+1}\xi),$$

ce qui, pour $\xi \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ donné, vaut 1 pour tout N suffisamment grand. □

La convention est qu'on fixe la fonction χ pour chaque d, une fois pour toutes, et lorsque on dit par exemple “une constante qui dépend de la dimension”, il est sous-entendu qu'elle peut dépendre du choix de la fonction χ. On introduit la notation

$$\varphi_j(\xi) := \varphi(2^{-j}\xi), \qquad \text{pour tout } j \in \mathbb{Z},\ \xi \in \mathbb{R}^d.$$

Il est utile de remarquer que

$$\|\partial^\gamma \varphi_j\|_{L^\infty} = 2^{-j|\gamma|}\|\partial^\gamma \varphi\|_{L^\infty} \leq C2^{-j|\gamma|}, \qquad \text{où } C = C(d,\gamma). \tag{6.4}$$

Lemme 6.3. *Supposons que m vérifie les conditions du Théorème 6.1. Pour tout $j \in \mathbb{Z}$, soit $m_j(\xi) := \varphi_j(\xi)m(\xi)$ et $K_j := \mathscr{F}^{-1}(m_j)$. Alors $\sum_{j\in\mathbb{Z}} K_j$ converge au sens C^1, sur tout sous-ensemble compact de $\mathbb{R}^d \setminus \{0\}$, vers une fonction $K : \mathbb{R}^d \setminus \{0\} \to \mathbb{C}$ qui vérifie*

$$|K(x)| \leq CB|x|^{-d}, \quad |\nabla K(x)| \leq CB|x|^{-d-1}, \qquad \textit{pour tout } x \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}.$$

Démonstration. Il suffit de montrer que

$$\sum_{j\in\mathbb{Z}} |K_j(x)| \leq CB|x|^{-d}, \quad \sum_{j\in\mathbb{Z}} |\nabla K_j(x)| \leq CB|x|^{-d-1}, \qquad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}.$$

L'idée est de se servir de la Proposition 4.24 (i) et (ii). On observe pour cela que (6.5), (6.4) et la règle de Leibniz impliquent

$$\|\partial^\gamma m_j\|_{L^\infty} \leq CB2^{-j|\gamma|},\ \|\partial^\gamma(\xi_k m_j)\|_{L^\infty} \leq CB2^{-j(|\gamma|-1)}, \quad \text{pour tout } 0 \leq |\gamma| \leq d+2,\ j \in \mathbb{Z},\ 1 \leq k \leq d,$$

ce qui donne en intégrant

$$\|\partial^\gamma m_j\|_{L^1} \leq CB2^{jd-j|\gamma|}, \quad \|\partial^\gamma(\xi_k m_j)\|_{L^1} \leq CB2^{jd-j(|\gamma|-1)}.$$

En prenant $\mathscr{F}^{-1}$ on en déduit que

$$\|x^\gamma K_j\|_{L^\infty} \le CB2^{jd-j|\gamma|}, \quad \|x^\gamma \partial_{x_k} K_j\|_{L^\infty} \le CB2^{jd-j(|\gamma|-1)}.$$

Fixons $x \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$. Notons que $|x|^l \le C \max_{|\gamma|=l} |x^\gamma|$, donc les estimations ci-dessus donnent

$$|K_j(x)| \le CB|x|^{-l}2^{j(d-l)}, \qquad |\nabla K_j(x)| \le CB|x|^{-l}2^{j(d-l+1)}, \qquad \text{pour tout } j \in \mathbb{Z},\ 0 \le l \le d+2.$$

On voit qu'il est intéressant de prendre $l = 0$ si $2^j|x| < 1$ et $l = d+2$ si $2^j|x| \ge 1$. Suivant cette logique, on écrit

$$|K_j(x)| \le CB2^{jd},\ \text{si } 2^j|x| < 1, \qquad |K_j(x)| \le CB|x|^{-d-2}2^{-2j},\ \text{si } 2^j|x| \ge 1,$$

et on prend la somme (en utilisant le principe "la somme d'une suite géométrique est comparable au plus grand terme") :

$$\sum_{j\in\mathbb{Z}} |K_j(x)| \le \sum_{2^j<|x|^{-1}} CB2^{jd} + \sum_{2^j\ge|x|^{-1}} CB|x|^{d+2}2^{-2j} \le CB|x|^{-d} + CB|x|^{-d-2}|x|^2.$$

De manière similaire,

$$|\nabla K_j(x)| \le CB2^{j(d+1)},\ \text{si } 2^j|x| < 1, \qquad |\nabla K_j(x)| \le CB|x|^{-d-2}2^{-j},\ \text{si } 2^j|x| \ge 1,$$

donc

$$\sum_{j\in\mathbb{Z}} |\nabla K_j(x)| \le \sum_{2^j<|x|^{-1}} CB2^{j(d+1)} + \sum_{2^j\ge|x|^{-1}} CB|x|^{d+2}2^{-j} \le CB|x|^{-d-1} + CB|x|^{-d-2}|x|.$$

□

Démonstration du Théorème 6.1. Pour $\gamma = 0$, la condition 6.5 signifie que $\|m\|_{L^\infty} \le B$. Par la formule de Plancherel, cela implique $\|T_m f\|_{L^2} \le B\|f\|_{L^2}$ pour tout $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$. On note avec le même symbole T_m l'extension de l'opérateur sur $L^2(\mathbb{R}^d)$. Il suffit de montrer que $T = T_m$ vérifie la condition (5.5), où K la fonction donnée par le Lemme 6.3.

On fixe $f \in L^2_{\mathrm{comp}}(\mathbb{R}^d)$, $\mathrm{supp}(f) \subset B(0,R)$. Soit $K^{(N)} := \sum_{j=-N}^N K_j$ et $g^{(N)} := K^{(N)} * f$. Soit $x_0 \in \mathbb{R}^d \setminus \mathrm{supp}(f)$ et $r > 0$ tel que $B(x_0, 2r) \cap \mathrm{supp}(f) = \emptyset$. Soit $\Omega := \{x \in \mathbb{R}^d : r \le |x| \le R + |x_0| + r\}$. D'un côté, pour tout $x \in B(x_0, r)$ on a

$$\begin{aligned} g^{(N)}(x) = \int_{\mathbb{R}^d} K^{(N)}(x-y)f(y)\,\mathrm{d}y &= \int_\Omega K^{(N)}(x-y)f(y)\,\mathrm{d}y \\ \to \int_\Omega K(x-y)f(y)\,\mathrm{d}y &= \int_{\mathbb{R}^d} K(x-y)f(y)\,\mathrm{d}y, \end{aligned} \tag{6.5}$$

où la convergence est uniforme en x. D'un autre côté,

$$\widehat{g^{(N)}}(\xi) = \sum_{j=-N}^{N} m_j(\xi)\widehat{f}(\xi) = (\chi(2^{-N}\xi) - \chi(2^{N+1}\xi))m(\xi)\widehat{f}(\xi) \to m(\xi)\widehat{f}(\xi), \quad \text{au sens } L^2(\mathbb{R}^d),$$

autrement dit, par Plancherel, $g^{(N)} \to Tf$ dans $L^2(\mathbb{R}^d)$. On obtient donc que $(Tf)(x)$ est donné par (6.5) au voisinage de x_0. □

6.2 Décomposition de Littlewood-Paley

La décomposition dyadique de l'identité définie au début du chapitre peut être vue comme une famille de multiplicateurs de Fourier. On appelle les opérateurs correspondants les *projections de Littlewood-Paley*. On note

$$S_0 u := \mathscr{F}^{-1}(\chi \widehat{f}), \quad P_j u := \mathscr{F}^{-1}(\varphi_j \widehat{u}), \qquad \text{pour } u \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^d),\ j \in \mathbb{Z}.$$

Cette définition a un sens, parce que $\chi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$ et $\varphi_j \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$ pour tout $j \in \mathbb{Z}$. Ce sont des opérateurs de convolution par une fonction $\in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$. En particulier,

$$u_n \to u \text{ au sens } \mathscr{S}'(\mathbb{R}^d) \quad \Rightarrow \quad (S_0 u_n)(x) \to (S_0 u)(x) \text{ et } (P_j u_n)(x) \to (P_j u)(x), \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}^d.$$

Remarque 6.4. Ces opérateurs ne sont pas des projections au sens de l'algèbre linéaire, car $S_0^2 \neq S_0$ et $P_j^2 \neq P_j$.

Remarque 6.5. Notons pourtant que pour tout $j \in \mathbb{Z}$ on a $(P_{j-1} + P_j + P_{j+1})P_j = P_j$. En effet, cela revient à dire que $(\varphi_{j-1} + \varphi_j + \varphi_{j+1})\varphi_j = \varphi_j$. Cela est vrai, car $\varphi_{j-1}(\xi) + \varphi_j(\xi) + \varphi_{j+1}(\xi) = \chi(2^{-j-1}\xi) - \chi(2^{-j+2}\xi) = 1$ pour tout $2^{j-1} \leq |\xi| \leq 2^{j+1}$.

Remarque 6.6. Beaucoup d'auteurs écrivent Δ_j ou $\dot{\Delta}_j$ au lieu de P_j.

Lemme 6.7. *Pour tout $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$, $f = S_0 f + \sum_{j=1}^{\infty} P_j f = \sum_{j=-\infty}^{\infty} P_j f$ au sens de la convergence dans $L^2(\mathbb{R}^d)$. De plus,*

$$\frac{1}{2}\|f\|_{L^2}^2 \leq \|S_0 f\|_{L^2}^2 + \sum_{j=1}^{\infty} \|P_j f\|_{L^2}^2 \leq \|f\|_{L^2}^2, \tag{6.6}$$

$$\frac{1}{2}\|f\|_{L^2}^2 \leq \sum_{j \in \mathbb{Z}} \|P_j f\|_{L^2}^2 \leq \|f\|_{L^2}^2. \tag{6.7}$$

Démonstration. La première partie est laissée comme exercice, voir la fin de la preuve du Théorème 6.1.

Concernant la deuxième partie, par la formule de Plancherel,

$$\|S_0 f\|_{L^2}^2 + \sum_{j=1}^{\infty} \|P_j f\|_{L^2}^2 = \int_{\mathbb{R}^d} |\widehat{f}(\xi)|^2 \Big(\chi(\xi)^2 + \sum_{j=1}^{\infty} \phi_j(\xi)^2\Big)\,\mathrm{d}\xi.$$

Pour chaque $\xi \in \mathbb{R}^d$, au plus deux termes dans la somme $\chi(\xi)^2 + \sum_{j=1}^{\infty} \phi_j(\xi)^2$ sont non nuls. En utilisant le fait que $\frac{1}{2}(a+b)^2 \leq a^2 + b^2 \leq (a+b)^2$, on a donc

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{2}\Big(\chi(\xi) + \sum_{j=1}^{\infty} \phi_j(\xi)\Big) \leq \chi(\xi)^2 + \sum_{j=1}^{\infty} \phi_j(\xi)^2 \leq \Big(\chi(\xi) + \sum_{j=1}^{\infty} \phi_j(\xi)\Big)^2 = 1,$$

et on obtient (6.6) en appliquant de nouveau Plancherel.

La preuve de (6.7) est similaire. □

Remarque 6.8. Voir l'Exercice 6.2 pour une généralisation au cas des espaces de Sobolev.

En changeant l'ordre de la sommation on peut écrire

$$\sum_{j\in\mathbb{Z}} \|P_j f\|_{L^2}^2 = \sum_{j\in\mathbb{Z}} \int_{\mathbb{R}^d} |(P_j f)(x)|^2 \,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^d} |Sf(x)|^2 \,\mathrm{d}x = \|Sf\|_{L^2}^2,$$

où S est la *fonction carrée de Littlewood-Paley* définie par

$$(Sf)(x) := \Big(\sum_{j\in\mathbb{Z}} |(P_j f)(x)|^2\Big)^{\frac{1}{2}}. \tag{6.8}$$

Par l'estimation (6.7), on a donc

$$\frac{1}{2}\|f\|_{L^2}^2 \le \|Sf\|_{L^2}^2 \le \|f\|_{L^2}^2, \qquad \text{pour tout } f \in L^2(\mathbb{R}^d). \tag{6.9}$$

La définition (6.8) a un sens pour tout $f \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^d)$ et définit une fonction mesurable $Sf : \mathbb{R}^d \to [0, +\infty]$. Il est très important de ne pas confondre S et S_0, qui n'ont pas grand chose à voir.

Remarque 6.9. Pour tout $u, v \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^d)$ et $x \in \mathbb{R}^d$ on a $(S(u+v))(x) \le (Su)(x) + (Sv)(x)$. Aussi, si $u_n \to u$ au sens $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^d)$ et $x \in \mathbb{R}^d$, alors $(P_j u_n)(x) \to (P_j u)(x)$ pour tout $j \in \mathbb{Z}$, donc par le lemme de Fatou $(Su)(x) \le \liminf_{n\to\infty}(Su_n)(x)$.

On va montrer que les inégalités (6.9) se généralisent au cas L^p.

6.3 Estimation L^p de la fonction carrée

Théorème 6.10. *Pour tout $1 < p < \infty$ il existe $C = C(d,p)$ tel que*

$$\frac{1}{C}\|f\|_{L^p} \le \|Sf\|_{L^p} \le C\|f\|_{L^p}, \qquad \textit{pour tout } f \in L^p(\mathbb{R}^d).$$

Pour démontrer ce théorème, on a besoin du lemme suivant (qui permettra en fait d'appliquer le théorème sur les bornes L^p des opérateurs de Calderón-Zygmund).

Lemme 6.11. *Il existe $B > 0$ (qui dépend de d et du choix de la décomposition dyadique) tel que pour tout $x \neq 0$ et tout $N \in \mathbb{N}$*

$$|(\mathscr{F}^{-1}\chi)(x)| + \sum_{j=1}^{N} |(\mathscr{F}^{-1}\varphi_j)(x)| \le B|x|^{-d}, \quad |\nabla(\mathscr{F}^{-1}\chi)(x)| + \sum_{j=1}^{N} |\nabla(\mathscr{F}^{-1}\varphi_j)(x)| \le B|x|^{-d-1},$$

$$\sum_{j=-N}^{N} |(\mathscr{F}^{-1}\varphi_j)(x)| \le B|x|^{-d}, \quad \sum_{j=-N}^{N} |\nabla(\mathscr{F}^{-1}\varphi_j)(x)| \le B|x|^{-d-1}.$$

Démonstration. Comme $\mathscr{F}^{-1}\chi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$, la première ligne est une conséquence de la deuxième. Pour montrer l'estimation dans la deuxième ligne, on répète l'argument de la preuve du Lemme 6.3, pour $K_j := \mathscr{F}^{-1}\varphi_j$. □

Remarque 6.12. Concernant les estimations de la première ligne dans l'énoncé du lemme, il est assez facile de se convaincre qu'en fait la décroissance est plus rapide que toute fonction rationnelle quand $|x| \to \infty$.

Démonstration du Théorème 6.10. Montrons d'abord l'inégalité à droite pour $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$. Il suffit de montrer que pour tout $N \in \mathbb{N}$ on a

$$\Big\| \Big(\sum_{j=-N}^{N} |(P_j f)(x)|^2 \Big)^{\frac{1}{2}} \Big\|_{L^p} \le C \|f\|_{L^p}, \tag{6.10}$$

et ensuite passer à la limite $N \to \infty$ (théorème de convergence monotone). Fixons donc $N \in \mathbb{N}$, $x \in \mathbb{R}^d$ et soit $a_j := (P_j f)(x)$ pour $-N \le j \le N$. Soit Ω l'ensemble des suites $r_{-N}, r_{-N+1}, \ldots, r_{N-1}, r_N$ à valeurs dans $\{-1, 1\}$. Par l'inégalité de Khintchin, voir le Lemme 6.13 plus bas,

$$\begin{aligned}
\Big(\sum_{j=-N}^{N} |(P_j f)(x)|^2 \Big)^{\frac{p}{2}} = \Big(\sum_{j=-N}^{N} |a_j|^2 \Big)^{\frac{p}{2}} &\le C 2^{-(2N+1)} \sum_{r\in\Omega} \Big| \sum_{j=-N}^{N} a_j r_j \Big|^p \\
&= C 2^{-(2N+1)} \sum_{r\in\Omega} \Big| \Big(\Big(\sum_{j=-N}^{N} r_j P_j \Big) f \Big)(x) \Big|^p = C 2^{-(2N+1)} \sum_{r\in\Omega} \big| \big(P^{(r)} f\big)(x) \big|^p.
\end{aligned}$$

L'observation essentielle est que l'opérateur $P^{(r)} := \sum_{j=-N}^{N} r_j P_j$ est continu $L^p(\mathbb{R}^d) \to L^p(\mathbb{R}^d)$, avec la borne sur la norme $\|P^{(r)}\|_{\mathscr{L}(L^p)} \le C = C(d)$. C'est une conséquence du Lemme 6.11 et du Théorème 5.18. On a donc

$$\int_{\mathbb{R}^d} \big| \big(P^{(r)} f\big)(x) \big|^p \, \mathrm{d}x \le C \|f\|_{L^p}^p,$$

ce qui implique, en prenant la somme en $r \in \Omega$, (6.10).

On passe à l'inégalité à gauche. Soit $g \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$. On procède par dualité. Posons $\widetilde{P}_j = P_{j-1} + P_j + P_{j+1}$ et $(\widetilde{S} g)(x) := \Big(\sum_{j\in\mathbb{Z}} |(\widetilde{S} g)(x)|^2 \Big)^{\frac{1}{2}} \le 3(Sg)(x)$. En utilisant la Remarque 6.5,

$$\begin{aligned}
\langle f, g \rangle = \Big\langle \sum_{j\in\mathbb{Z}} P_j f, g \Big\rangle = \sum_{j\in\mathbb{Z}} \langle P_j f, g \rangle &= \sum_{j\in\mathbb{Z}} \langle P_j f, (P_{j-1} + P_j + P_{j+1}) g \rangle \\
&= \int_{\mathbb{R}^d} \sum_{j\in\mathbb{Z}} \overline{(P_j f)(x)} (\widetilde{P}_j g)(x) \, \mathrm{d}x \le \int_{\mathbb{R}^d} (Sf)(x) (\widetilde{S} g)(x) \, \mathrm{d}x \\
&\le \|Sf\|_{L^p} \|\widetilde{S} g\|_{L^{p'}} \le C \|Sf\|_{L^p} \|g\|_{L^{p'}},
\end{aligned}$$

ce qui termine la preuve.

Si $f \notin \mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$, on prend $f_n \to f$ dans $L^p(\mathbb{R}^d)$. En utilisant la Remarque 6.9, on peut montrer que $\|Sf - Sf_n\|_{L^p} \to 0$ quand $n \to \infty$. □

6.4 Inégalité de Khintchine (*)

Soit $\Omega := \{-1, 1\}^N$. On note $r = (r_1, \ldots, r_N)$ les éléments de Ω.

Lemme 6.13. *Pour tout $1 \le p < \infty$ il existe $C > 0$ tel que pour tout $N \in \mathbb{N}$ et toute suite $(a_1, \ldots, a_N) \in \mathbb{C}^N$*

$$C^{-1} \Big(\sum_{j=1}^{N} |a_j|^2 \Big)^{\frac{p}{2}} \le 2^{-N} \sum_{r\in\Omega} \Big| \sum_{j=1}^{N} a_j r_j \Big|^p \le C \Big(\sum_{j=1}^{N} |a_j|^2 \Big)^{\frac{p}{2}}. \tag{6.11}$$

Avant de démontrer ce lemme, on en donnera une interprétation. Considérons l'ensemble des fonctions $u : \Omega \to \mathbb{C}$. Soit μ la mesure de comptage normalisée sur Ω, c'est-á-dire $\mu(A) = 2^{-N}|A|$ pour tout $A \subset \Omega$. Pour $1 \le p < \infty$ l'espace $L^p(\Omega)$ est défini par la norme

$$\|u\|_{L^p}^p = \int_\Omega |u(r)|^p \mu(\mathrm{d}r) = 2^{-N} \sum_{r \in \Omega} |u(r)|^p.$$

Il est facile de voir que les fonctions $e_j : \Omega \to \mathbb{C}$ définies pour $1 \le j \le N$ par $e_j(r) = r_j$ vérifient $\|e_j\|_{L^2} = 1$ et $\langle e_j, e_k \rangle = \int_\Omega \overline{e_j(r)} e_k(r) \mu(\mathrm{d}r) = 0$ si $j \ne k$. Soit $a_1, \ldots, a_N \in \mathbb{C}$ et $u(r) := \sum_{j=1}^N a_j r_j$, donc $u = \sum_{j=1}^N a_j e_j$. On peut réécrire (6.11) de manière suivante :

$$\widetilde{C}^{-1} \|u\|_{L^2} \le \|u\|_{L^p} \le \widetilde{C} \|u\|_{L^2}, \qquad \text{où } \widetilde{C} := C^{\frac{1}{p}}. \tag{6.12}$$

Comme $\mu(\Omega) = 1$, on voit de cette écriture que l'inégalité à gauche est évidente pour $p \ge 2$ et celle à droite pour $p \le 2$.

Il n'y a évidemment aucune chance que les bornes (6.12) puissent être vraies pour *toute* fonction $u : \Omega \to \mathbb{C}$, avec une constante $\widetilde{C}$ qui ne dépend pas de N. Les fonctions de la forme $\sum_{j=1}^N a_j e_j$ sont très spéciales.

En réalité, il est facile de voir que les fonctions $e_A := \prod_{j \in A} e_j$ pour $A \subset \{1, 2, \ldots, N\}$ forment une *base orthonormée* de $L^2(\Omega)$. On les appelle les *fonctions de Walsh*. Une fonction générale $u : \Omega \to \mathbb{C}$ peut donc s'écrire comme $u = \sum_{A \subset \{1,\ldots,N\}} a_A e_A$, où $a_A \in \mathbb{C}$ pour tout $A \subset \{1, \ldots, N\}$. Si on voit Ω comme le groupe abélien $\Omega = \mathbb{Z}_2^N$, alors les fonctions de Walsh sont les *caractères*, c'est-à-dire les homomorphismes $\mathbb{Z}_2^N \to \mathbb{C}^*$. Avec la multiplication de fonctions comme opération de groupe, les fonctions de Walsh forment le *groupe dual* de $\mathbb{Z}_2^N$, qui s'avère isomorphe à $\mathbb{Z}_2^N$. De ce point de vue, $(a_A)_{A \subset \{1,\ldots,N\}}$ est la *transformée de Fourier* de la fonction u.

L'inégalité (6.12) dit que toutes les normes $\|u\|_{L^p}$ sont comparables, à la condition que $a_A = 0$ pour tout A tel que $|A| \ne 1$. On peut voir facilement que cela reste vrai si on suppose seulement $a_A = 0$ pour tout $|A| \ge 2$. L'inégalité (6.12) paraît maintenant, peut-être, moins surprenante. Elle affirme l'équivalence des normes L^p sous des hypothèses très fortes sur la transformée de Fourier de u. On a déjà vu des résultats de ce type, notamment les inégalités de Bernstein.

Démonstration du Lemme 6.13. On commence par l'inégalité à droite. Comme on l'a observé ci-dessus, les grandes valeurs de p sont intéressantes, donc on peut prendre $p = 2k$ avec $k \in \mathbb{N}$. (Avertissement : les formules qui suivent peuvent être difficiles à digérer pour k général ; il est utiles de prendre $k = 2$ ou $k = 3$ pour voir ce qui se passe.) On a alors

$$\begin{aligned} 2^{-N} \sum_{r \in \Omega} \Big| \sum_{j=1}^N a_j r_j \Big|^{2k} &= 2^{-N} \sum_{r \in \Omega} \Big(\sum_{j=1}^N a_j r_j \Big)^k \Big(\sum_{j=1}^N \overline{a_j} r_j \Big)^k \\ &= 2^{-N} \sum_{r \in \Omega} \sum_{\sum_{j=1}^N \alpha_j = \sum_{j=1}^N \beta_j = k} \frac{k!}{\alpha!} \frac{k!}{\beta!} \prod_{j=1}^N a_j^{\alpha_j} \overline{a_j}^{\beta_j} r_j^{\alpha_j + \beta_j}. \end{aligned}$$

Seulement les termes où $\alpha_j + \beta_j$ est paire pour tout j peuvent être non nuls. On a donc

$$\begin{aligned}
2^{-N} \sum_{r\in\Omega} \Big| \sum_{j=1}^{N} a_j r_j \Big|^{2k} &\leq 2^{-N} \sum_{r\in\Omega} \sum_{\sum_{j=1}^{N} \alpha_j = \sum_{j=1}^{N} \beta_j = k,\, 2|\alpha_j+\beta_j} \frac{k!}{\alpha!} \frac{k!}{\beta!} \prod_{j=1}^{N} |a_j|^{\alpha_j+\beta_j} r_j^{\alpha_j+\beta_j} \\
&= \sum_{\sum_{j=1}^{N} \alpha_j = \sum_{j=1}^{N} \beta_j = k,\, 2|\alpha_j+\beta_j} \frac{k!}{\alpha!} \frac{k!}{\beta!} \prod_{j=1}^{N} |a_j|^{\alpha_j+\beta_j} \leq C_k \Big(\sum_{j=1}^{N} |a_j|^2 \Big)^k,
\end{aligned}$$

où C_k dépend seulement de k.

Pour montrer l'inégalité à gauche pour $p = 1$ (sans perdre la généralité), on écrit

$$2^{-N} \sum_{r\in\Omega} \Big| \sum_{j=1}^{N} a_j r_j \Big|^2 = 2^{-N} \sum_{r\in\Omega} \Big| \sum_{j=1}^{N} a_j r_j \Big|^{\frac{2}{3}} \Big| \sum_{j=1}^{N} a_j r_j \Big|^{\frac{4}{3}} \leq \Big(2^{-N} \sum_{r\in\Omega} \Big| \sum_{j=1}^{N} a_j r_j \Big| \Big)^{\frac{2}{3}} \Big(2^{-N} \sum_{r\in\Omega} \Big| \sum_{j=1}^{N} a_j r_j \Big|^4 \Big)^{\frac{1}{3}}.$$

Il suffit maintenant d'appliquer l'inégalité déjà démontrée pour $p = 4$. $\square$

6.5 Exercices

Exercice 6.1. Construire une décomposition de Littlewood-Paley sur $\mathbb{T}^d$ en utilisant la formule de sommation de Poisson au lieu du noyau de de la Vallée Poussin.

Exercice 6.2. (i) Montrer que pour tout $s \in \mathbb{R}$ il existe $C = C(d,s)$ tel que pour tout $u \in H^s(\mathbb{R}^d)$

$$C^{-1}\|u\|_{H^s}^2 \leq \|S_0 u\|_{L^2}^2 + \sum_{j=1}^{\infty} 2^{2js}\|P_j u\|_{L^2}^2 \leq C\|u\|_{H^s}^2.$$

(ii) Montrer que pour tout $s < \frac{d}{2}$ il existe $C = C(d,s)$ tel que pour tout $u \in \dot{H}^s(\mathbb{R}^d)$

$$C^{-1}\|u\|_{\dot{H}^s}^2 \leq \sum_{j\in\mathbb{Z}} 2^{2js}\|P_j u\|_{L^2}^2 \leq C\|u\|_{\dot{H}^s}^2.$$

Exercice 6.3. Montrer que pour tout $0 < \alpha < 1$ il existe $C = C(d,\alpha)$ tel que pour tout $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$

$$C^{-1}\|f\|_{C^{0,\alpha}} \leq \|S_0 f\|_{L^\infty} + \sup_{1\leq j<\infty} 2^{\alpha j}\|P_j f\|_{L^\infty} \leq C\|f\|_{C^{0,\alpha}}.$$

Exercice 6.4. Le but est de démontrer l'inégalité suivante.

Théorème 6.14 (Injection de Sobolev)**.** *Pour tout $0 \leq s < \frac{d}{2}$ il existe $C = C(d,s)$ tel que pour tout $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$*

$$\|f\|_{L^p} \leq C\|f\|_{\dot{H}^s}, \qquad \text{où } p := \frac{2d}{d-2s}.$$

(i) En utilisant l'inégalité de Bernstein, montrer que pour tout $j \in \mathbb{Z}$ on a $\|P_j f\|_{L^p} \leq 2^{js}\|P_j f\|_{L^2}$.

(ii) En prenant la norme l^2 en j et en utilisant l'Exercice 6.2 (ii), en déduire que $\|f\|_{\dot{B}^0_{p,2}} \leq C\|f\|_{\dot{H}^2}$, où $\dot{B}^0_{p,2}$ est la norme de Besov homogène.

(iii) Appliquer l'inégalité de Minkowski, voir Lemme 2.16, pour montrer que $\|f\|_{\dot{F}^0_{p,2}} \leq \|f\|_{\dot{B}^0_{p,2}}$, où $\dot{F}^0_{p,2}$ est la norme de Triebel-Lizorkin homogène.

(iv) Conclure en évoquant le Théorème 6.10.

Bibliographie

[1] J. Bergh et J. Löfström. *Interpolation Spaces. An Introduction*, Springer.

[2] H. Boumaza. *Distributions tempérées et espaces de Sobolev*, notes de cours, `https://www.math.univ-paris13.fr/~boumaza/cours/2018-2019-M1-Distributions%20temperees.pdf`.

[3] L. Grafakos. *Classical Fourier Analysis*, Springer.

[4] C. Muscalu et W. Schlag. *Classical and Multilinear Harmonic Analysis, Volume I*, Cambridge University Press.

[5] W. Rudin. *Analyse réelle et complexe*

[6] E. Stein. *Fourier Analysis and Differentiability Properties of Functions*, Princeton University Press.

[7] T. Tao. *Blog*, `https://terrytao.wordpress.com`.