DM écrit 1, corrigé.

Exercice 1. *Montrer que la formule*

$$\Big(\mathrm{vp}\big(\frac{1}{x}\big)\Big)(\phi) = \lim_{\epsilon\to 0^+}\int_{|x|>\epsilon}\frac{\phi(x)}{x}\,\mathrm{d}x, \qquad \textit{pour tout } \phi\in\mathcal{S}(\mathbb{R}),$$

définit un élément de $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$. Calculer sa transformée de Fourier.

Solution. Soit $\phi\in\mathcal{S}(\mathbb{R})$. Soit $\psi(x) := \frac{\phi(x)-\phi(0)}{x}$. On voit que ψ est une fonction continue et $\|\psi\|_{L^\infty}\le\|\phi'\|_{L^\infty}$. Fixons une fonction paire $\chi\in C_0^\infty(\mathbb{R})$ telle que $\|\chi\|_{L^\infty}=1$, $\chi(x)=1$ si $|x|\le 1$ et $\chi(x)=0$ si $|x|\ge 2$. Écrivons

$$\phi(x) = \chi(x)(\phi(0)+x\psi(x)) + (1-\chi(x))\phi(x).$$

Comme ψ est une fonction paire, on obtient

$$\lim_{\epsilon\to 0^+}\int_{|x|>\epsilon}\frac{1}{x}\big(\chi(x)(\phi(0)+x\psi(x))\big)\,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}}\chi(x)\psi(x)\,\mathrm{d}x.$$

Aussi,

$$\lim_{\epsilon\to 0^+}\int_{|x|>\epsilon}\frac{1}{x}\big((1-\chi(x))\phi(x)\big)\,\mathrm{d}x = \int_{|x|\ge 1}\frac{1}{x}\big((1-\chi(x))\phi(x)\big)\,\mathrm{d}x,$$

donc $\lim_{\epsilon\to 0^+}\int_{|x|>\epsilon}\frac{\phi(x)}{x}\,\mathrm{d}x$ existe et

$$\left|\lim_{\epsilon\to 0^+}\int_{|x|>\epsilon}\frac{\phi(x)}{x}\,\mathrm{d}x\right| \le 4\|\psi\|_{L^\infty}+\|\phi\|_{L^\infty}\le\|\phi\|_{L^\infty}+4\|\phi'\|_{L^\infty}\le 5p_1(\phi).$$

La linéarité est évidente.

Notons $u := \mathrm{vp}(1/x)\in\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ et $v := xu$ (multiplication de u par la fonction x, ce qui est bien défini car cette dernière appartient à la classe $\mathcal{T}(\mathbb{R})$). Pour $\phi\in\mathcal{S}(\mathbb{R})$, on obtient

$$v(\phi) = (xu)(\phi) = u(x\phi) = \lim_{\epsilon\to 0^+}\int_{|x|>\epsilon}\frac{x\phi(x)}{x}\,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}}\phi(x)\,\mathrm{d}x.$$

(Autrement dit, v peut être identifiée à la fonction constante 1).

Il en résulte que $\widehat{v}\in\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ est donnée par

$$\widehat{v}(\psi) = v(\widehat{\psi}) = \int_{\mathbb{R}}\widehat{\psi}(x)\,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}}\widehat{\psi}(x)\mathrm{e}^{2\pi i x\cdot 0}\,\mathrm{d}x = (\mathcal{F}^{-1}\widehat{\psi})(0) = \psi(0),$$

donc $\widehat{v}=\delta_0$. En utilisant la Proposition 1.21 (ii), on peut écrire

$$(\widehat{u})' = -2\pi i\mathcal{F}(xu) = -2\pi i\widehat{v} = -2\pi i\delta_0.$$

On se sert du résultat suivant.

Lemme 1. *Si $\phi\in\mathcal{S}(\mathbb{R})$, $\int_{\mathbb{R}}\phi(x)\,\mathrm{d}x = 0$ et on pose $\psi(x) := \int_{-\infty}^x\phi(y)\,\mathrm{d}y$, alors $\psi\in\mathcal{S}(\mathbb{R})$.*

Admettons le lemme et finissons la démonstration. Soit $\phi\in\mathcal{S}(\mathbb{R})$ qui vérifie $\int_{\mathbb{R}}\phi(x)\,\mathrm{d}x=0$, et $\psi(x) := \int_{-\infty}^x\phi(y)\,\mathrm{d}y$. Alors $\psi'=\phi$, ce qui implique

$$\widehat{u}(\phi) = \widehat{u}(\psi') = -(\widehat{u})'(\psi) = 2\pi i\psi(0) = 2\pi i\int_{-\infty}^0\phi(y)\,\mathrm{d}y = -\pi i\int_{\mathbb{R}}\mathrm{sgn}(y)\phi(y)\,\mathrm{d}y,$$

où la dernière égalité vient du fait que $\int_{\mathbb{R}}\phi\,\mathrm{d}x = 0$.

Mais $\phi \mapsto \int \phi(y)\,\mathrm{d}y$ est une fonctionnelle continue sur $\mathcal{S}(\mathbb{R})$, donc l'analyse fonctionnelle abstraite (ou un argument direct) montre qu'il existe $A \in \mathbb{C}$ tel que

$$\widehat{u}(\phi) = A\int_{\mathbb{R}} \phi(y)\,\mathrm{d}y - \pi i \int_{\mathbb{R}} \operatorname{sgn}(y)\phi(y)\,\mathrm{d}y, \qquad \text{pour tout } \phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}).$$

En prenant ϕ une fonction symétrique d'intégrale $\neq 0$, on voit que $A = 0$, donc $\widehat{u} = -\pi i \operatorname{sgn}$.

Afin de démontrer le lemme, il suffit d'estimer $\|x^\alpha\psi(x)\|_{L^\infty}$ pour $\alpha \geq 0$. Si $x \leq 0$, on écrit

$$|x^\alpha\psi(x)| \leq \int_{-\infty}^{x} (-x)^\alpha|\phi(y)|\,\mathrm{d}y \leq \int_{-\infty}^{x} |y^\alpha\phi(y)|\,\mathrm{d}y,$$

ce qui est borné si $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. Si $x \geq 0$, c'est la même preuve, parce que $\int \phi(y)\,\mathrm{d}y$ donne $\psi(x) = -\int_x^\infty \phi(y)\,\mathrm{d}y$.

Remarque 1. Il est également possible de résoudre l'exercice en utilisant les théorèmes de Fubini et de convergence dominée.

□

Exercice 2. *Dans cet exercice, on examine des distributions tempérées qui "ne dépendent pas de certaines variables".*

(i) Soit $v \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^{d-1})$. Montrer que la formule

$$u(\phi) = v\left(\int_{\mathbb{R}} \phi(\cdot, x_d)\,\mathrm{d}x_d\right), \qquad \textit{pour tout } \phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d), \tag{1}$$

définit une distribution tempérée $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$. Montrer que $\partial_{x_d}u = 0$ au sens des distributions.

(ii) Supposons que $v \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^{d-1})$ est en fait une fonction continue bornée, et soit $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ donnée par (1). Montrer qu'alors u est une fonction continue bornée et l'écrire explicitement.

(iii) Soit $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ une distribution telle que $\partial_{x_d}u = 0$. Montrer qu'il existe une distribution $v \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^{d-1})$ telle que (1) est vrai.

(iv) Soit $l \in \{1, 2, \ldots, d\}$. Trouver et justifier une caractérisation similaire des distributions $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ telles que

$$\partial_{x_{d-l+1}}u = \ldots = \partial_{x_d}u = 0.$$

Solution. (i) On voit, en considérant les semi-normes p_N, que l'application $\phi \mapsto \int \phi(\cdot, x_d)\,\mathrm{d}x_d$ est continue $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d) \to \mathcal{S}(\mathbb{R}^{d-1})$. Cela implique que u est la composition de deux applications linéaires continues $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d) \to \mathcal{S}(\mathbb{R}^{d-1}) \to \mathbb{C}$, ce qui prouve que c'est une distribution tempérée.

Pour tout $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ on a

$$\partial_{x_d}u(\phi) = -u(\partial_{x_d}\phi) = v(0) = 0,$$

parce que $\int_{\mathbb{R}} \partial_{x_d}\phi(x', x_d)\,\mathrm{d}x_d = 0$ pour tout $x' \in \mathbb{R}^{d-1}$.

(ii) Si v peut être identifiée à une fonction bornée continue $\widetilde{v}$, alors pour tout $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ on peut écrire

$$u(\phi) = v\left(\int_{\mathbb{R}} \phi(\cdot, x_d)\,\mathrm{d}x_d\right) = \int_{\mathbb{R}^{d-1}} \widetilde{v}(x')\left(\int_{\mathbb{R}} \phi(x', x_d)\,\mathrm{d}x_d\right)\mathrm{d}x' = \int_{\mathbb{R}^d} \widetilde{u}(x)\phi(x)\,\mathrm{d}x,$$

où $\widetilde{u}(x) = \widetilde{u}(x', x_d) = \widetilde{v}(x')$. On a donc que u peut être identifiée à la fonction bornée continue donnée par $\widetilde{u}(x', x_d) = \widetilde{v}(x')$.

(iii) Soit χ une fonction lisse à support compact, telle que $\int_{\mathbb{R}} \chi(x_d)\,\mathrm{d}x_d = 1$. On définit, pour tout $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{d-1})$, $\widetilde{\phi}(x', x_d) := \psi(x')\chi(x_d)$, et on pose

$$v(\psi) := u(\widetilde{\phi}).$$

L'application associant $\widetilde{\phi}$ à ψ est continue $\mathcal{S}(\mathbb{R}^{d-1}) \to \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, donc cette formule définit bien un élément de $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^{d-1})$.

On vérifie que (1) est vrai pour tout $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$. Soit $\psi(x') := \int_{\mathbb{R}} \phi(x', x_d)\,\mathrm{d}x_d$, et $\widetilde{\phi}(x', x_d) := \psi(x')\chi(x_d)$. Alors $\int_{\mathbb{R}}(\phi(x', x_d) - \widetilde{\phi}(x', x_d))\,\mathrm{d}x_d = 0$, donc $u(\phi) = u(\widetilde{\phi})$. Mais $u(\widetilde{\phi}) = v(\psi)$.

(iv) On montre que la condition nécessaire et suffisante est qu'il existe $v \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^{d-l})$ tel que

$$u(\phi) = v\bigg(\int_{\mathbb{R}} \phi(\cdot, x_{d-l+1}, \dots x_d)\,\mathrm{d}x_{d-l+1} \dots \mathrm{d}x_d\bigg), \qquad \text{pour tout } \phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d). \tag{2}$$

La preuve de la suffisance est la même que dans le cas $l = 1$.

Pour montrer la nécessité, on procède par récurrence par rapport à l. Soit $l > 1$. On sait qu'il existe $w \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{d-1})$ tel que

$$u(\phi) = w\bigg(\int_{\mathbb{R}} \phi(\cdot, x_d)\,\mathrm{d}x_d\bigg), \qquad \text{pour tout } \phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d). \tag{3}$$

Il faut montrer que $\partial_{x_j} w = 0$ pour $j \in \{d - l + 1, \dots, d - 1\}$, ce qui nous permettra d'utiliser l'hypothèse de récurrence.

Soit $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{d-1})$ et $\widetilde{\phi}(x', x_d) := \psi(x')\chi(x_d)$, autrement dit $\widetilde{\phi} = \psi \otimes \chi$, de sorte que $w(\psi) = u(\widetilde{\phi})$. On a $(\partial_{x_j}\psi(x'))\chi(x_d) = \partial_{x_j}\widetilde{\phi}(x', x_d)$, donc

$$(\partial_{x_j} w)(\psi) = -w(\partial_{x_j}\psi) = -u((\partial_{x_j}\psi) \otimes \chi) = -u(\partial_{x_j}(\widetilde{\phi})) = (\partial_{x_j} u)(\widetilde{\phi}) = 0,$$

ce qui prouve que $\partial_{x_j} w = 0$. Par l'hypothèse de récurrence, il existe $v \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^{d-l})$ tel que

$$w(\psi) = v\bigg(\int_{\mathbb{R}} \psi(\cdot, x_{d-l+1}, \dots x_{d-1})\,\mathrm{d}x_{d-l+1} \dots \mathrm{d}x_{d-1}\bigg), \qquad \text{pour tout } \psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{d-1}),$$

donc (3) donne (2). $\square$