**DM écrit, à rendre vendredi le 18 septembre**

**Exercice 1** *Montrer que la formule*

$$\Big(\mathrm{vp}\big(\frac{1}{x}\big)\Big)(\phi) = \lim_{\epsilon\to 0^+} \int_{|x|>\epsilon} \frac{\phi(x)}{x}\,\mathrm{d}x, \qquad \textit{pour tout } \phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}),$$

*définit un élément de* $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$. *Calculer sa transformée de Fourier.*

**Exercice 2** *Dans cet exercice, on examine des distributions tempérées qui "ne dépendent pas de certaines variables".*

*(i)* *Soit* $v \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^{d-1})$. *Montrer que la formule*

$$u(\phi) = v\bigg(\int \phi(\cdot, x_d)\,\mathrm{d}x_d\bigg), \qquad \textit{pour tout } \phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d), \tag{1}$$

*définit une distribution tempérée* $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$. *Montrer que* $\partial_{x_d} u = 0$ *au sens des distributions.*

*(ii)* *Supposons que* $v \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^{d-1})$ *est en fait une fonction continue bornée, et soit* $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ *donnée par* (1). *Montrer qu'alors* $u$ *est une fonction continue bornée et l'écrire explicitement.*

*(iii)* *Soit* $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ *une distribution telle que* $\partial_{x_d} u = 0$. *Montrer qu'il existe une distribution* $v \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^{d-1})$ *telle que* (1) *est vrai.*

*(iv)* *Soit* $l \in \{1, 2, \ldots, d\}$. *Trouver et justifier une caractérisation similaire des distributions* $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ *telles que*

$$\partial_{x_{d-l+1}} u = \ldots = \partial_{x_d} u = 0.$$