DM écrit 2, corrigé.

Exercice 1. *Montrer que pour tout $s > 0$ l'opérateur $f \mapsto (1+|x|^2)^{-\frac{s}{2}}(1+|D|^2)^{-\frac{s}{2}} f$ est compact $L^2(\mathbb{R}^d) \to L^2(\mathbb{R}^d)$. Autrement dit, si f_n est une suite bornée dans $L^2(\mathbb{R}^d)$, alors $(1+|x|^2)^{-\frac{s}{2}}(1+|D|^2)^{-\frac{s}{2}} f_n$ a une sous-suite qui converge dans $L^2(\mathbb{R}^d)$.*

Montrer que ni $f \mapsto (1+|x|^2)^{-\frac{s}{2}} f$, ni $f \mapsto (1+|D|^2)^{-\frac{s}{2}} f$ n'est compact $L^2(\mathbb{R}^d) \to L^2(\mathbb{R}^d)$.

Indication :

(i) Il suffit de montrer que si $f_n \rightharpoonup 0$ dans $L^2(\mathbb{R}^d)$, alors pour tout $\epsilon > 0$ il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\|(1+|x|^2)^{-\frac{s}{2}}(1+|D|^2)^{-\frac{s}{2}} f_n\|_{L^2} \leq \epsilon$ pour tout $n \geq n_0$.

(ii) Montrer d'abord que, si $g_n \in L^2(\mathbb{R}^d)$ une suite telle que $g_n \rightharpoonup 0$ dans $L^2(\mathbb{R}^d)$ et $\operatorname{supp}(\widehat{g}_n) \subset B_R$ pour une certaine boule B_R, alors $\lim_{n\to\infty} \|g_n\|_{L^\infty(B_\rho)} = 0$ pour tout $\rho > 0$ (Arzela-Ascoli...)

(iii) Concernant les contre-exemples, penser aux translations.

Solution. (i) Soit $s > 0$ et $T : L^2(\mathbb{R}^d) \to L^2(\mathbb{R}^d)$ l'opérateur défini par

$$Tf := (1+|x|^2)^{-\frac{s}{2}}(1+|D|^2)^{-\frac{s}{2}} f = UVf,$$

où $V := (1+|D|^2)^{-\frac{s}{2}}$, c'est-à-dire l'opérateur de multiplication par $(1+|\xi|^2)^{-\frac{s}{2}}$ dans l'espace des fréquences, et U est l'opérateur de multiplication par $(1+|x|^2)^{-\frac{s}{2}}$ dans l'espace physique. Notons d'abord que $\|U\|_{L^2\to L^2} \leq 1$ et $\|V\|_{L^2\to L^2} \leq 1$, donc T est un opérateur continu et $\|T\|_{L^2\to L^2} \leq 1$.

Si (f_n) une suite bornée dans L^2, alors f_n a une sous-suite (f_{n_k}) qui converge faiblement vers $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$. On a donc $h_k := f_{n_k} - f \rightharpoonup 0$. Si on réussit à montrer que pour tout $\epsilon > 0$ on a $\|Th_k\| \leq \epsilon$ pour k assez grand, alors cela voudra dire que $Th_k = T(f_{n_k} - f) \to 0$ dans L^2, donc $Tf_{n_k} \to Tf$, ce qui finira la preuve.

(ii) Soit $g_n \rightharpoonup 0$ et $\operatorname{supp}(\widehat{g}_n) \subset B_R$ pour tout n. Par l'analyse fonctionnelle abstraite (par exemple, Banach-Steinhaus), on sait que la suite (g_n) est bornée dans L^2, donc $(\widehat{g}_n)$ aussi. Comme $\widehat{g}_n$ sont toutes à support dans une certaine boule, pour tout $\sigma \in \mathbb{R}$ la suite $((1+|\xi|^2)^{\frac{\sigma}{2}}\widehat{g}_n)$ est bornée dans L^2, autrement dit (g_n) est bornée dans $H^\sigma(\mathbb{R}^d)$ pour tout $\sigma \in \mathbb{R}$. En prenant $\sigma > \frac{d}{2} + 1$, on obtient que (g_n) est bornée dans $C^1(\mathbb{R}^d)$, donc admet une sous-suite g_{n_k} convergeant uniformément sur B_ρ. Mais comme $g_n \rightharpoonup 0$, cette limite doit être 0, donc $g_{n_k} \to 0$ uniformément sur B_ρ. Le même raisonnement fonctionne pour toute sous-suite de (g_n), donc toute sous-suite de (g_n) admet une sous-suite qui converge uniformément vers 0 sur B_ρ, ce qui signifie que $g_n \to 0$ sur B_ρ uniformément, pour tout $\rho > 0$.

Soit maintenant $f_n \rightharpoonup 0$, sans conditions sur les supports de $\widehat{f}_n$, et soit $\epsilon > 0$. Sans restreindre la généralité, on peut supposer que $\|f_n\|_{L^2} \leq 1$ pour tout n. Soit $R > 0$ tel que $(1+R^2)^{-\frac{s}{2}} = \frac{\epsilon}{2}$ et χ_R la fonction caractéristique de la boule de centre 0 et de rayon R. Posons $g_n := V\chi_R(D) f_n = \chi_R(D) V f_n$ (on sait que V et $\chi_R(D)$ commutent parce que tous les deux sont des multiplicateurs de Fourier). On observe que

$$\begin{aligned}\|Vf_n - g_n\|_{L^2} &= \|V(1-\chi_R(D))f_n\|_{L^2} = \|(1+|\xi|^2)^{-\frac{s}{2}}(1-\chi_R(\xi))\widehat{f}_n\|_{L^2} \\ &\leq \|(1+R^2)^{-\frac{s}{2}}\widehat{f}\|_{L^2} \leq \frac{\epsilon}{2}\|\widehat{f}\|_{L^2} \leq \frac{\epsilon}{2}.\end{aligned}$$

Par l'inégalité triangulaire,

$$\|Tf_n\|_{L^2} = \|UVf_n\|_{L^2} \leq \|U(Vf_n - g_n)\|_{L^2} + \|Ug_n\|_{L^2} \leq \|Vf_n - g_n\|_{L^2} + \|Ug_n\|_{L^2},$$

donc il suffit de montrer que $\|Ug_n\|_{L^2} \leq \frac{\epsilon}{2}$ pour n assez grand.

L'opérateur $V\chi_R(D)$ est continu $L^2 \to L^2$, de norme ≤ 1, donc $f_n \rightharpoonup 0$ implique $g_n \rightharpoonup 0$ et $\|f_n\|_{L^2} \leq 1$ implique $\|g_n\|_{L^2} \leq 1$. Aussi, $\operatorname{supp}(\widehat{g}_n) \subset B_R$ pour tout n, donc $g_n \to 0$ uniformément sur toute boule B_ρ, en particulier pour tout $\rho > 0$ et n assez grand on a $\|Ug_n\|_{L^2(B_\rho)} \leq \frac{\epsilon}{4}$. Soir $\rho > 0$ tel que $(1+\rho^2)^{-\frac{s}{2}} = \frac{\epsilon}{4}$. On voit que

$$\|Ug_n\|_{L^2(|x|\geq\rho)} \leq (1+\rho^2)^{-\frac{s}{2}}\|g_n\|_{L^2(|x|\geq\rho)} \leq \frac{\epsilon}{4}\|g_n\|_{L^2} \leq \frac{\epsilon}{4}.$$

Par l'inégalité triangulaire, on a $\|Ug_n\|_{L^2} \leq \frac{\epsilon}{2}$, ce qui termine la preuve.

(iii) Pour montrer que l'opérateur U n'est pas compact, on peut considérer par exemple $f_n := 2^{\frac{dn}{2}}\chi_{2^{-n}}$, où $\chi_{2^{-n}}$ est la fonction caractéristique de la boule de centre 0 et de rayon 2^{-n}. Si par exemple $n < m$, alors

$$|f_n(x) - f_m(x)| \geq (1 - 2^{-\frac{d(m-n)}{2}})2^{\frac{dm}{2}} \geq (1-2^{-\frac{d}{2}})2^{\frac{dm}{2}}, \qquad \text{pour tout } |x| \leq 2^{-m}.$$

On voit que $(1+|x|^2)^{-\frac{s}{2}} \geq 2^{-\frac{s}{2}}$ pour tout $|x| \leq 2^{-m}$, donc

$$\|f_n - f_m\|_{L^2} \geq 2^{-\frac{s}{2}}(1-2^{-\frac{d}{2}})\sqrt{2^{dm}|B_{2^{-m}}|} = 2^{-\frac{s}{2}}(1-2^{-\frac{d}{2}})\sqrt{|B|}.$$

Pour montrer que V n'est pas compact, on peut considérer $f_n := \chi_{B(ne_1,1)}$, où $e_1 := (1,0,\ldots,0)$, donc la fonction caractéristique de la boule de centre ne_1 et de rayon 1. Comme $f_n = \tau_{ne_1}f_0$ et V est invariant par translations, $Vf_n = \tau_{ne_1}Vf_0$, ce qui n'a pas de sous-suite convergente.

Remarque 1. On a $V = \mathcal{F}^{-1}\circ U \circ \mathcal{F}$, donc la non-compacité de U implique la non-compacité de V et vice-versa. Par conséquent, il suffirait de donner un des deux contre-exemples si-dessus. En revanche, il est peut-être utile de comprendre les deux contre-exemples. Le premier exploite le phénomène de concentration, qui est une obstruction typique à la compacité $L^2 \to L^2$.

Le deuxième exploite la translation, une autre obstruction typique à la compacité $L^2 \to L^2$. L'opérateur V élimine la concentration, mais pas la translation. L'opérateur U élimine la translation, mais pas la concentration. Il faut les deux pour avoir la compacité.

Un autre contrexemple pour la compacité de U, peut-être plus simple, est donné par $f_n(x) := g(x)\mathrm{e}^{2\pi i n x_1}$, où $g \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$. Ici, on observe la perte de compacité à cause des *oscillations*, ce qui est éliminé par l'opérateur V.

□

Exercice 2. *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une fonction mesurable non-nulle à décroissance exponentielle, c'est-à-dire telle qu'il existe $C, \epsilon > 0$ qui vérifient*

$$|f(x)| \leq C\mathrm{e}^{-\epsilon|x|}, \qquad \textit{pour presque tout } x \in \mathbb{R}.$$

Rappeler pourquoi $\widehat{f}$ est une fonction continue. Montrer que l'ensemble $\{\xi \in \mathbb{R} : \widehat{f}(\xi) = 0\}$ n'a pas de points d'accumulation.

(Question bonus : que peut-on dire en dimension $d > 1$?)

Solution. Une fonction à décroissance exponentielle est intégrable, donc $\widehat{f}$ est une fonction continue décroissante à l'infini, donnée par

$$\widehat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-2\pi i x\xi} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Soit $\Omega \subset \mathbb{C}$ l'ensemble $\{\zeta = \xi + i\eta : |\eta| < \epsilon/(2\pi)\}$. On définit la fonction continue $g : \Omega \to \mathbb{C}$ par

$$g(\zeta) := \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-2\pi i x\zeta} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

En dérivant sous le signe de l'intégrale, on voit que g vérifie les équations de Cauchy-Riemann, elle est donc une fonction holomorphe $\Omega \to \mathbb{C}$. (Alternativement, on peut développer en série entière le terme $\mathrm{e}^{-2\pi i x\zeta}$ et changer l'ordre de sommation et d'intégration.) De plus $g(\xi + 0i) = \widehat{f}(\xi)$ pour tout

$\xi \in \mathbb{R}$. Si l'ensemble $\{\xi \in \mathbb{R} : \widehat{f}(\xi) = 0\}$ avait un point d'accumulation, alors on aurait $g(\zeta) = 0$ pour tout $\zeta \in \Omega$, en particulier $\widehat{f}(\xi) = 0$ pour tout $\xi \in \mathbb{R}$, donc f identiquement nulle.

Soit maintenant $d > 1$, et $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$ une fonction à décroissance exponentielle, c'est-à-dire

$$|f(x)| \leq C\mathrm{e}^{-\epsilon|x|}, \qquad \text{pour presque tout } x \in \mathbb{R}^d.$$

Soit $\Omega \subset \mathbb{C}^d$ l'ensemble $\{\zeta = \xi + i\eta : |\eta| < \epsilon/(2\pi)\}$ (ici, $\xi, \eta \in \mathbb{R}^d$). On définit la fonction continue $g : \Omega \to \mathbb{C}$ par

$$g(\zeta) := \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-2\pi i x \cdot \zeta} f(x)\, \mathrm{d}x.$$

C'est une fonction holomorphe $\Omega \to \mathbb{C}$, et $g(\xi + 0i) = \widehat{f}(\xi)$ pour tout $\xi \in \mathbb{R}^d$. Il en résulte, d'après le Théorème 2.10 du cours, que l'ensemble $\{\xi \in \mathbb{R}^d : \widehat{f}(\xi) = 0\}$ est de mesure de Lebesgue nulle, à moins que f soit identiquement nulle. $\square$