DM écrit, à rendre vendredi le 25 septembre

Exercice 1 *Montrer que pour tout* $s > 0$ *l'opérateur* $f \mapsto (1+|x|^2)^{-\frac{s}{2}}(1+|D|^2)^{-\frac{s}{2}} f$ *est compact* $L^2(\mathbb{R}^d) \to L^2(\mathbb{R}^d)$. *Autrement dit, si* f_n *est une suite bornée dans* $L^2(\mathbb{R}^d)$, *alors* $(1+|x|^2)^{-\frac{s}{2}}(1+|D|^2)^{-\frac{s}{2}} f_n$ *a une sous-suite qui converge dans* $L^2(\mathbb{R}^d)$.

Montrer que ni $f \mapsto (1+|x|^2)^{-\frac{s}{2}} f$, *ni* $f \mapsto (1+|D|^2)^{-\frac{s}{2}} f$ *n'est compact* $L^2(\mathbb{R}^d) \to L^2(\mathbb{R}^d)$.

Indication :

(i) *Il suffit de montrer que si* $f_n \rightharpoonup 0$ *dans* $L^2(\mathbb{R}^d)$, *alors pour tout* $\epsilon > 0$ *il existe* $n_0 \in \mathbb{N}$ *tel que* $\|(1+|x|^2)^{-\frac{s}{2}}(1+|D|^2)^{-\frac{s}{2}} f_n\|_{L^2} \le \epsilon$ *pour tout* $n \ge n_0$.

(ii) *Montrer d'abord que, si* $g_n \in L^2(\mathbb{R}^d)$ *une suite telle que* $g_n \rightharpoonup 0$ *dans* $L^2(\mathbb{R}^d)$ *et* $\mathrm{supp}(\widehat{g}_n) \subset B_R$ *pour une certaine boule* B_R, *alors* $\lim_{n\to\infty} \|g_n\|_{L^\infty(B_\rho)} = 0$ *pour tout* $\rho > 0$ *(Arzela-Ascoli...)*

(iii) *Concernant les contre-exemples, penser aux translations.*

Exercice 2 *Soit* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ *une fonction mesurable à décroissance exponentielle, c'est-à-dire telle qu'il existe* $C, \epsilon > 0$ *qui vérifient*

$$|f(x)| \le C\mathrm{e}^{-\epsilon|x|}, \qquad \textit{pour presque tout } x \in \mathbb{R}.$$

Rappeler pourquoi $\widehat{f}$ *est une fonction continue. Montrer que l'ensemble* $\{\xi \in \mathbb{R} : \widehat{f}(\xi) = 0\}$ *n'a pas de points d'accumulation.*

(Question bonus : que peut-on dire en dimension $d > 1$ *?)*