DM écrit 3, corrigé.

Exercice 1. *Pour tout $t > 0$ on définit le* noyau de la chaleur $G_t \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ *par*

$$G_t(x) := \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{4t}}, \qquad \textit{pour tout } x \in \mathbb{R}.$$

(i) Rappelons que si on définit $\Gamma(x) := \mathrm{e}^{-\pi x^2}$, alors $\widehat{\Gamma}(\xi) = \mathrm{e}^{-\pi \xi^2}$. Vérifier que $\widehat{G_t}(\xi) = \mathrm{e}^{-4\pi^2\xi^2 t}$ pour tout $\xi \in \mathbb{R}$.

(ii) Soit $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ et pour tout $t > 0$ posons $u_t := G_t * f$. Montrer que $u_{t+s}(x) = (G_t * u_s)(x)$ pour tout $t, s > 0$ et $x \in \mathbb{R}$.

(iii) Montrer que si $1 \leq p < \infty$ et $f \in L^p(\mathbb{R})$, alors $\lim_{t\to 0^+} \|u_t - f\|_{L^p} = 0$. Montrer aussi que $\sup\limits_{t>0} \|u_t\|_{L^p} = \|f\|_{L^p}$.

(iv) (un peu difficile) Soit $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$. Montrer que $|(G_t * f)(x)| \leq (Mf)(x)$ pour tout $t > 0$ et $x \in \mathbb{R}$, où Mf est la fonction maximale de Hardy-Littlewood de f.

(v) Soit $1 \leq p < \infty$ et $f \in L^p(\mathbb{R})$. Montrer que $\lim\limits_{t\to 0^+} u_t(x) = f(x)$ pour presque tout $x \in \mathbb{R}$ (par rapport à la mesure de Lebesgue).

Solution. (i) Avec le changement de variable $x = \sqrt{4\pi t}y$,

$$\begin{aligned}\widehat{G_t}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-2\pi i x\xi} \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{4t}}\, \mathrm{d}x &= \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-2\pi i y(\sqrt{4\pi t}\xi)} \mathrm{e}^{-\pi y^2}\, \mathrm{d}y \\ &= \widehat{\Gamma}(\sqrt{4\pi t}\xi) = \mathrm{e}^{-4\pi^2\xi^2 t}.\end{aligned}$$

(ii) Pour tout $t > 0$ la fonction $u_t : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ est lisse (elle est la convolution d'une distribution avec une fonction de $\mathcal{S}(\mathbb{R})$). Il suffit de vérifier que $u_{t+s} = G_t * u_s$ au sens $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$. On obtient

$$\begin{aligned}\widehat{u_{t+s}}(\xi) &= \widehat{G_{t+s}}(\xi)\widehat{f}(\xi) = \mathrm{e}^{-4\pi^2\xi^2(t+s)}\widehat{f}(\xi) \\ &= \mathrm{e}^{-4\pi^2\xi^2 t}\mathrm{e}^{-4\pi^2\xi^2 s}\widehat{f}(\xi) = \widehat{G_t}(\xi)\widehat{G_s}(\xi)\widehat{f}(\xi) \\ &= \widehat{G_t}(\xi)(\widehat{G_s * f})(\xi) = \widehat{G_t}(\xi)\widehat{u_s}(\xi),\end{aligned}$$

donc en prenant la transformée de Fourier inverse $u_{t+s} = G_t * u_s$.

(iii) On a $G_t(x) = (4\pi t)^{-\frac{1}{2}}\Gamma((4\pi t)^{-\frac{1}{2}}x)$. La fonction Γ est positive et d'intégrale 1. Par un changement de variable, $\|G_t\|_{L^1} = \|\Gamma\|_{L^1} = 1$ et $\int_{\mathbb{R}} G_t(x)\,\mathrm{d}x = 1$ pour tout $t > 0$. Aussi, pour tout $\delta > 0$ on a

$$\int_{|x|>\delta} G_t(x)\,\mathrm{d}x = \int_{|y|>(4\pi t)^{-\frac{1}{2}}\delta} \Gamma(y)\,\mathrm{d}y,$$

ce qui tend vers 0 quand $t \to 0^+$. Par la Proposition 3.5 du cours, on a

$$\lim_{t\to 0^+} \|u_t - f\|_{L^p} = \lim_{t\to 0^+} \|G_t * f - f\|_{L^p} = 0,$$

en particulier $\sup_{t>0} \|u_t\|_{L^p} \geq \|f\|_{L^p}$. D'un autre côté, pour tout $t > 0$ on a $\|u_t\|_{L^p} = \|G_t * f\|_{L^p} \leq \|G_t\|_{L^1}\|f\|_{L^p} = \|f\|_{L^p}$, donc $\sup_{t>0} \|u_t\|_{L^p} \leq \|f\|_{L^p}$.

(iv) Comme $|(G_t * f)(x)| \leq (G_t * |f|)(x)$, sans perdre la généralité on peut supposer que $f \geq 0$. Soit $h(x) := -G_t'(x)$ pour $x \geq 0$, donc, pour tout $x \geq 0$, $G_t(x) = G_t(-x) = \int_x^\infty h(z)\,\mathrm{d}z$. On écrit

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}} G_t(y) f(x-y)\,\mathrm{d}y &= \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{|y|}^\infty h(z)\,\mathrm{d}z \right) f(x-y)\,\mathrm{d}y \\
&= \int_0^\infty h(z) \int_{-z}^{z} f(x-y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z \\
&\leq \int_0^\infty h(z) 2z (Mf)(x)\,\mathrm{d}z \\
&= (Mf)(x) 2 \int_0^\infty z h(z)\,\mathrm{d}z \\
&= (Mf)(x) 2 \int_0^\infty G_t(z)\,\mathrm{d}z = (Mf)(x).
\end{aligned}$$

On fait une intégration par parties pour passer de l'avant dernière à la dernière ligne.

(v) Soit $\epsilon > 0$. Il suffit de montrer que l'ensemble $A_\epsilon := \{x \in \mathbb{R} : \limsup_{t\to 0^+} |(G_t * f)(x) - f(x)| \geq \epsilon\}$ est de mesure de Lebesgue nulle. Soit $g \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ et $h := f - g$. Cela implique que $\lim_{t\to 0^+} (G_t * g)(x) = g(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, donc

$$A_\epsilon = \{x \in \mathbb{R} : \limsup_{t\to 0^+} |(G_t * h)(x) - h(x)| \geq \epsilon\}.$$

Le sous-problème précédent implique donc que

$$|A_\epsilon| \leq |\{x \in \mathbb{R} : (Mh)(x) \geq \epsilon/2\}| + |\{x \in \mathbb{R} : |h(x)| \geq \epsilon/2\}| \leq (2/\epsilon)^p (\|Mh\|_{L^{p,\infty}}^p + \|h\|_{L^{p,\infty}}^p).$$

Par le Théorème 3.13 du cours, il existe $C = C(d,p)$ tel que $\|Mh\|_{L^{p,\infty}} \leq C\|h\|_{L^p}$ (si $p > 1$, alors c'est vrai même en remplaçant $\|Mh\|_{L^{p,\infty}}$ par $\|Mh\|_{L^p}$, mais ce n'est pas essentiel pour cette démonstration – la borne dans $L^{p,\infty}$ suffit). On a donc

$$|A_\epsilon| \leq 2C^p (2/\epsilon)^p \|h\|_{L^p}^p.$$

On peut rendre $\|h\|_{L^p}$ arbitrairement petit, donc $|A_\epsilon| = 0$. □

Exercice 2 (Muscalu-Schlag, Exercise 7.4)**.** *On étudie dans cet exercice les transformées de Riesz doubles. Soit $d \in \{3, 4, 5, \ldots\}$.*

(i) (un peu difficile) Soit $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ et posons $u(x) := C \int_{\mathbb{R}^d} |x-y|^{2-d} f(y)\,\mathrm{d}y$, où $C = C(d)$ est une constante qu'il faudra déterminer. Montrer que, avec le bon choix de C, u vérifie

$$\Delta u = f.$$

(ii) Soit toujours $u(x) := C \int_{\mathbb{R}^d} |x-y|^{2-d} f(y)\,\mathrm{d}y$, et $1 \leq i, j \leq d$. Soit $K_{ij}(x) := \frac{x_i x_j}{|x|^{d+2}} - \frac{1}{d}\delta_{ij}\frac{1}{|x|^d}$, où $\delta_{ij} = 1$ si $i = j$ et $\delta_{ij} = 0$ si $i \neq j$. Montrer que

$$\partial_{x_i}\partial_{x_j} u(x) = \widetilde{C} \int_{\mathbb{R}^d} K_{ij}(x-y) f(y)\,\mathrm{d}y + \frac{1}{d}\delta_{ij} f(x),$$

où il faut comprendre l'intégrale au sens de la valeur principale, c'est-à-dire $\lim_{\epsilon\to 0^+} \int_{|x-y|>\epsilon} K_{ij}(x-y) f(y)\,\mathrm{d}y$, et $\widetilde{C} = \widetilde{C}(d)$.

(iii) Vérifier que K_{ij} est un noyau de Calderón-Zygmund fort.

(iv) (question bonus) Déduire de (i) la valeur de la constante $C(\alpha, d)$ dans l'Exercice 1.13 dans le poly, pour $\alpha = 2$ et $d \in \{3, 4, 5, \ldots\}$.

Solution. Soit $\Gamma(y) := C|y|^{2-d}$. Comme Γ est localement intégrable et bornée, $\Gamma \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$. Il est clair que

$$u(x) = \int_{\mathbb{R}^d} \Gamma(x-y) f(y)\,\mathrm{d}y = \int_{\mathbb{R}^d} \Gamma(y) f(x-y)\,\mathrm{d}y$$

est bien défini pour tout $x \in \mathbb{R}^d$, et que $u = \Gamma * f \in \mathcal{T}(\mathbb{R}^d)$ (voir Proposition 1.27 du cours), en particulier $u \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$. On a aussi

$$(\Delta u)(x) = (\Gamma * (\Delta f))(x) = \int_{\mathbb{R}^d} \Gamma(y) \Delta f(x-y)\,\mathrm{d}y.$$

Prenons $\epsilon > 0$ et écrivons

$$(\Delta u)(x) = \int_{|y|\le\epsilon} \Gamma(y)\Delta f(x-y)\,\mathrm{d}y + \int_{|y|\ge\epsilon} \Gamma(y)\Delta f(x-y)\,\mathrm{d}y. \tag{1}$$

La fonction Δf est bornée et $\int_{|y|\le\epsilon} \Gamma(y)\,\mathrm{d}y \le C_1\epsilon^2$ pour une constante $C_1 = C_1(d)$, donc le premier terme dans (1) converge vers 0 quand $\epsilon > 0$.

On calcule le deuxième terme en utilisant la formule de Green (c'est-à-dire, d'intégration par parties) :

$$\int_\Omega (g\Delta h - h\Delta g)\,\mathrm{d}x = \int_{\partial\Omega} (g\partial_n h - h\partial_n g)\,\mathrm{d}\sigma,$$

pour Ω un domaine borné régulier et g, h fonctions lisses, ∂_n étant la dérivée normale et $\mathrm{d}\sigma$ la mesure de Hausdorff sur $\partial\Omega$. On prend $R \gg 1$, et on pose $\Omega := \{y : \epsilon \le |\epsilon| \le R\}$, $g(y) := \Gamma(y)$, $h(y) := f(x-y)$. On calcule maintenant $\Delta\Gamma(y)$ pour $y \neq 0$. D'abord,

$$\partial_{y_j}\Gamma(y) = C\partial_y\big((y_1^2 + \ldots + y_d^2)^{1-\frac{d}{2}}\big) = -C(d-2)y_j|y|^{-d},$$

et en dérivant une seconde fois

$$\partial_{y_j}^2\Gamma(y) = -C\big((d-2)|y|^{-d} - d(d-2)y_j^2|y|^{-d-2}\big).$$

On trouve donc

$$\Delta\Gamma(y) = C\sum_{j=1}^d \big(-(d-2)|y|^{-d} + d(d-2)y_j^2|y|^{-d-2}\big) = 0.$$

Ainsi, la formule de Green donne

$$\int_\Omega \Gamma(y) f(x-y)\,\mathrm{d}y = \int_{\partial\Omega} (\Gamma(y)\partial_n f(x-y) - f(x-y)\partial_n\Gamma(y))\,\mathrm{d}\sigma.$$

Sur la sphère $|y| = \epsilon$, la direction de la dérivée normale pointe vers l'origine, donc $\partial_n\Gamma(y) = (d-2)\epsilon^{1-d}$ si $|y| = \epsilon$. On a aussi $\partial_n\Gamma(y) = -(d-2)R^{1-d}$ si $|y| = R$. Comme $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, il est facile de voir que

$$\sup_{x,R} \int_{|y|=R} \big(|f(x-y)| + |\nabla f(x-y)|\big)\,\mathrm{d}\sigma < \infty.$$

Ceci implique que la contribution de la sphère $|y| = R$ devient nulle quand $R \to \infty$. Aussi, $\int_{|y|=\epsilon} \Gamma(y)\partial_n f(x-y)\,\mathrm{d}\sigma \to 0$ quand $\epsilon \to 0$. Il ne reste que

$$-\int_{|y|=\epsilon} f(x-y)\partial_n\Gamma(y)\,\mathrm{d}\sigma = -C(d-2)\epsilon^{1-d}\int_{|y|=\epsilon} f(x-y)\,\mathrm{d}y \to -C(d-2)|\partial B| f(x),$$

où $|\partial B|$ est la surface de la sphère unité $\partial B \subset \mathbb{R}^d$. On trouve donc $C = -((d-2)|\partial B|)^{-1}$.

(ii) On procède comme dans (i). On a

$$\partial_{x_i}\partial_{x_j}u(x) = \int_{\mathbb{R}^d}\Gamma(y)\partial_{x_i}\partial_{x_j}f(x-y)\,\mathrm{d}y = \lim_{\epsilon\to 0}\int_{|y|\geq\epsilon}\Gamma(y)\partial_{x_i}\partial_{x_j}f(x-y)\,\mathrm{d}y.$$

On a la formule d'intégration par parties :

$$\int_\Omega (g\partial_{x_i}\partial_{x_j}h - h\partial_{x_i}\partial_{x_j}g)\,\mathrm{d}x = \int_{\partial\Omega}(g\partial_{x_j}hn_i - h\partial_{x_i}gn_j)\,\mathrm{d}\sigma,$$

où $n = (n_1,\dots,n_d)$ est le vecteur normal qui pointe vers l'extérieur de Ω. Comme dans (i), on applique cette formule avec $\Omega := \{y : \epsilon \leq |y| \leq R\}$, $g(y) := \Gamma(y)$ et $h(y) := f(x-y)$. Comme dans (i), on voit que la contribution de la sphère $\{|y| = R\}$ devient petite quand $R \to \infty$, donc pour simplifier on prend directement $\Omega = \{y : |y| \geq \epsilon\}$.

On a déjà calculé, pour $y \neq 0$, $\partial_{y_j}\Gamma(y) = -C(d-2)y_j|y|^{-d} = |\partial B|^{-1}y_j|y|^{-d}$ et $\partial^2_{y_j}\Gamma(y) = |\partial B|^{-1}(|y|^{-d} - dy_j^2|y|^{-d-2})$. Si $i \neq j$, on obtient

$$\partial_{y_i}\partial_{y_j}\Gamma(y) = Cd(d-2)y_iy_j|y|^{-d-2} = -|\partial B|^{-1}dy_iy_j|y|^{-d-2}.$$

On voit donc que pour tout i et j, $\partial_{y_i}\partial_{y_j}\Gamma(y) = -|\partial B|^{-1}dK_{ij}(y)$.

Comme dans (i), on voit que le terme de bord $\int_{|y|=\epsilon}\Gamma(y)\partial_{x_j}f(x-y)n_i\,\mathrm{d}\sigma \to 0$ quand $\epsilon \to 0$. Considérons le terme

$$\begin{aligned}-\int_{|y|=\epsilon}\partial_{y_i}\Gamma(y)f(x-y)n_j\,\mathrm{d}\sigma &= -\int_{|y|=\epsilon}\big(|\partial B|^{-1}y_j|y|^{-d}\big)f(x-y)\big(-y_i|y|^{-1}\big)\,\mathrm{d}\sigma\\ &= |\partial B|^{-1}\int_{|y|=\epsilon}y_iy_j|y|^{-d-1}f(x-y)\,\mathrm{d}\sigma.\end{aligned}$$

Si $i \neq j$, alors cette limite vaut 0 (en utilisant le fait que pour tout $\epsilon > 0$, on a $\int_{|y|=\epsilon}y_iy_j|y|^{-d-1}\,\mathrm{d}\sigma = 0$). Si $i = j$, alors cette limite vaut $\frac{1}{d}f(x)$ (en utilisant le fait que pour tout $\epsilon > 0$, on a $\int_{|y|=\epsilon}y_j^2|y|^{-d-1}\,\mathrm{d}\sigma = \frac{1}{d}|\partial B|$). On retrouve donc bien le terme $\frac{1}{d}\delta_{ij}f(x)$ de l'énoncé.

Considérons maintenant le terme

$$\int_{|y|\geq\epsilon}f(x-y)\partial_{y_i}\partial_{y_j}\Gamma(y)\,\mathrm{d}y = -d|\partial B|^{-1}\int_{|y|\geq\epsilon}f(x-y)K_{ij}(y)\,\mathrm{d}y.$$

On trouve donc $\widetilde{C} = -d|\partial B|^{-1}$.

(iii) Il est clair que $|K_{ij}(x)| \leq 2|x|^{-d}$. La condition $\int_{r\leq|x|\leq s}K_{ij}(x)\,\mathrm{d}x = 0$ est facile à justifier en considérant des symétries. Enfin, un calcul élémentaire montre que $|\partial_{x_k}K_{ij}(x)| \leq B|x|^{-d-1}$ pour tous i, j, k.

(iv) En prenant la transformée de Fourier de la relation $\Delta u = f$, on a

$$-4\pi^2|\xi|^2\widehat{u}(\xi) = \widehat{f}(\xi).$$

D'un autre côté, $u = \Gamma * f$, donc $\widehat{u} = \widehat{\Gamma}\widehat{f}$, d'où $\widehat{\Gamma}(\xi) = -(2\pi)^{-2}|\xi|^{-2}$. Cela implique $\mathcal{F}^{-1}(|\xi|^{-2})(x) = -4\pi^2\Gamma(x) = -4C\pi^2|x|^{2-d} = \frac{4\pi^2}{(d-2)|\partial B|}|x|^{2-d}$. $\square$