DM écrit, à rendre vendredi le 2 octobre

Exercice 1 *Pour tout $t > 0$ on définit le* noyau de la chaleur $G_t \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ *par*

$$G_t(x) := \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{4t}}, \qquad \textit{pour tout } x \in \mathbb{R}.$$

(i) *Rappelons que si on définit $\Gamma(x) := \mathrm{e}^{-\pi x^2}$, alors $\widehat{\Gamma}(\xi) = \mathrm{e}^{-\pi \xi^2}$. Vérifier que $\widehat{G_t}(\xi) = \mathrm{e}^{-4\pi^2 \xi^2 t}$ pour tout $\xi \in \mathbb{R}$.*

(ii) *Soit $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ et pour tout $t > 0$ posons $u_t := G_t * f$. Montrer que $u_{t+s}(x) = (G_t * u_s)(x)$ pour tout $t, s > 0$ et $x \in \mathbb{R}$.*

(iii) *Montrer que si $1 \le p < \infty$ et $f \in L^p(\mathbb{R})$, alors $\lim_{t \to 0^+} \|u_t - f\|_{L^p} = 0$. Montrer aussi que $\sup\limits_{t>0} \|u_t\|_{L^p} = \|f\|_{L^p}$.*

(iv) *(un peu difficile) Soit $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$. Montrer que $|(G_t * f)(x)| \le (Mf)(x)$ pour tout $t > 0$ et $x \in \mathbb{R}$, où Mf est la fonction maximale de Hardy-Littlewood de f.*

(v) *Soit $1 \le p < \infty$ et $f \in L^p(\mathbb{R})$. Montrer que $\lim\limits_{t \to 0^+} u_t(x) = f(x)$ pour presque tout $x \in \mathbb{R}$ (par rapport à la mesure de Lebesgue).*

Exercice 2 (Muscalu-Schlag, Exercise 7.4) *On étudie dans cet exercice les transformées de Riesz doubles. Soit $d \in \{3, 4, 5, \ldots\}$.*

(i) *(un peu difficile) Soit $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ et posons $u(x) := C \int_{\mathbb{R}^d} |x-y|^{2-d} f(y)\,\mathrm{d}y$, où $C = C(d)$ est une constante qu'il faudra déterminer. Montrer que, avec le bon choix de C, u vérifie*

$$\Delta u = f.$$

(ii) *Soit toujours $u(x) := C \int_{\mathbb{R}^d} |x-y|^{2-d} f(y)\,\mathrm{d}y$, et $1 \le i, j \le d$. Soit $K_{ij}(x) := \frac{x_i x_j}{|x|^{d+2}} - \frac{1}{d}\delta_{ij}\frac{1}{|x|^d}$, où $\delta_{ij} = 1$ si $i = j$ et $\delta_{ij} = 0$ si $i \ne j$. Montrer que*

$$\partial_{x_i}\partial_{x_j} u(x) = \widetilde{C} \int_{\mathbb{R}^d} K_{ij}(x-y) f(y)\,\mathrm{d}y + \frac{1}{d}\delta_{ij} f(x),$$

où il faut comprendre l'intégrale au sens de la valeur principale, c'est-à-dire $\lim_{\epsilon \to 0^+} \int_{|x-y|>\epsilon} K_{ij}(x-y) f(y)\,\mathrm{d}y$, et $\widetilde{C} = \widetilde{C}(d)$.

(iii) *Vérifier que K_{ij} est un noyau de Calderón-Zygmund fort.*

(iv) *(question bonus) Déduire de (i) la valeur de la constante $C(\alpha, d)$ dans l'Exercice 1.13 dans le poly, pour $\alpha = 2$ et $d \in \{3, 4, 5, \ldots\}$.*