DM écrit 4, corrigé.

Exercice 1. *Montrer qu'il existe une constante $C = C(d)$ ayant la propriété suivante. Soit $1 \leq p \leq q \leq \infty$, $R > 0$ et $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ telle que $\mathrm{supp}(\widehat{f}) \subset B_R$ (la boule de centre 0 et de rayon R). Alors*

$$\|f\|_{L^q} \leq CR^{d(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})}\|f\|_{L^p}, \qquad \|\nabla f\|_{L^p} \leq CR\|f\|_{L^p}.$$

En déduire que, sous les mêmes hypothèses, pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^d$

$$\|\partial^\alpha f\|_{L^q} \leq C^{1+|\alpha|}R^{|\alpha|+d(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})}\|f\|_{L^p}.$$

Remarque : *Toutes les dérivées sont prises au sens $\mathcal{S}'$. Par convention, $\|f\|_{L^p} = \infty$ si $f \notin L^p$ (c'est-à-dire, si la distribution f ne peut pas être identifiée à une fonction L^p).*
Indication : *Soit $\chi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ telle que $\chi(\xi) = 1$ pour $|\xi| \leq 1$ et $\chi(\xi) = 0$ pour $|\xi| \geq 2$, et pour tout $R > 0$ notons $\chi_R(\xi) := \chi(\xi/R)$ et $V_R := \mathcal{F}^{-1}(\chi_R)$. Montrer que $\|V_R\|_{L^r} \leq CR^{d(1-\frac{1}{r})}$ et $\|\nabla V_R\|_{L^1} \leq CR$, où C dépend du choix de la fonction χ. Ensuite, considérer $V_R * f$.*

Solution. Soit $V := \mathcal{F}^{-1}(\chi)$. On observe que

$$V_R(\xi) = R^d V(R\xi),$$

donc

$$\|V_R\|_{L^r}^r = R^{rd}\int_{\mathbb{R}^d}|V(R\xi)|^r\,\mathrm{d}\xi = R^{(r-1)d}\int_{\mathbb{R}^d}|V(\zeta)|^r\,\mathrm{d}\zeta \leq R^{(r-1)d}\|V\|_{L^\infty}^{r-1}\|V\|_{L^1} \leq CR^{(r-1)d},$$

ce qui implique $\|V_R\|_{L^r} \leq CR^{d(1-1/r)}$.

On suppose $\mathrm{supp}(\widehat{f}) \subset B_R$, donc

$$\widehat{V_R}\widehat{f} = \chi_R\widehat{f} = \widehat{f} - (1-\chi_R)\widehat{f} = \widehat{f}$$

(en effet, pour toute fonction test $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, $(1-\chi_R)\widehat{f}(\phi) = \widehat{f}((1-\chi_R)\phi) = 0$). Autrement dit, $V_R * f = f$. Par l'inégalité de Young, avec $1 - 1/r = 1/p - 1/q$,

$$\|f\|_{L^q} = \|V_R * f\|_{L^q} \leq \|V_R\|_{L^r}\|f\|_{L^p} \leq CR^{d(1-1/r)}\|f\|_{L^p}.$$

Ensuite, on voit que $\nabla V_R(\xi) = R^{d+1}\nabla V(R\xi)$, et une intégration par un changement de variable montre que $\|\nabla V_R\|_{L^1} \leq CR$. Par conséquent,

$$\|\nabla f\|_{L^p} = \|\nabla(V_R * f)\|_{L^p} = \|(\nabla V_R) * f\|_{L^p} \leq \|\nabla V_R\|_{L^1}\|f\|_{L^p} \leq CR\|f\|_{L^p}.$$

L'estimation sur $\partial^\alpha f$ s'obtient par récurrence par rapport à $|\alpha|$. $\square$

Exercice 2. *Montrer qu'il existe une constante $C > 0$ ayant la propriété suivante. Soit $r > 0$ et $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ telle que $\mathrm{supp}(\widehat{f}) \cap B_r = \emptyset$. Alors pour tout $1 \leq p \leq \infty$*

$$(*) \qquad \|f\|_{L^p} \leq Cr^{-1}\|f'\|_{L^p},$$

où $f' \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ est la dérivée de f.
Indication :

(i) Fixons $m \in C^\infty(\mathbb{R})$, une fonction telle que $m(\xi) = 0$ si $|\xi| \leq \frac{1}{3}$ et $m(\xi) = \dfrac{1}{2\pi i\xi}$ si $|\xi| \geq \frac{2}{3}$. Montrer que $\displaystyle\int_{\mathbb{R}}\left(|m(\xi)|^2 + |m'(\xi)|^2\right)\mathrm{d}\xi < \infty$.

(ii) Soit $K := \mathcal{F}^{-1}(m)$. Montrer que $\displaystyle\int_{\mathbb{R}}(1+x^2)|K(x)|^2\,\mathrm{d}x < \infty$. En déduire que $K \in L^1(\mathbb{R})$.

(iii) Soit $m_r(\xi) := r^{-1}m(\xi/r)$ et $K_r := \mathcal{F}^{-1}(m_r)$. Montrer que $\|K_r\|_{L^1} = r^{-1}\|K\|_{L^1}$.

(iv) Montrer (rigoureusement !) que $K_r * (f') = f$. En déduire $(*)$.

Solution. (i) On a $m' \in C^\infty(\mathbb{R})$, $m'(\xi) = 0$ si $|\xi| \leq \frac{1}{2}$ et $m'(\xi) = -\frac{1}{2\pi i \xi^2}$ si $|\xi| \geq \frac{2}{3}$. Évidemment $\int_{|\xi|\leq 1}(|m(\xi)|^2 + |m'(\xi)|^2)\,\mathrm{d}\xi < \infty$. On a aussi

$$\int_{|\xi|\geq 1}(|m(\xi)|^2 + |m'(\xi)|^2)\,\mathrm{d}\xi = \int_{|\xi|\geq 1}\Big(\frac{1}{4\pi^2\xi^2} + \frac{1}{4\pi^2\xi^4}\Big)\,\mathrm{d}\xi < \infty.$$

(ii) Soit $L(x) := xK(x)$ au sens des distributions. Par les propriétés de la transformation de Fourier, on a $-2\pi i\widehat{L} = m' \in L^2(\mathbb{R})$, donc $L \in L^2(\mathbb{R})$ par le théorème de Plancherel. Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz,

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} |K(x)|\,\mathrm{d}x &= \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\big(\sqrt{1+x^2}|K(x)|\big)\,\mathrm{d}x \\ &\leq \int_{\mathbb{R}} \frac{\mathrm{d}x}{x^2+1}\int_{\mathbb{R}}(1+x^2)K(x)^2\,\mathrm{d}x < \infty.\end{aligned}$$

(iii) Avec les notations du cours, on a, au sens $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$,

$$m_r = r^{-1}d_r m, \qquad \text{donc } K_r = \mathcal{F}^{-1}(m_r) = r^{-1}r d_{r^{-1}}\mathcal{F}^{-1}m = d_{r^{-1}}K.$$

Avec un changement de variable,

$$\int_{\mathbb{R}} |K_r(x)|\,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}} |K(rx)|\,\mathrm{d}x = r^{-1}\|K\|_{L^1}.$$

(iv) On a $\widetilde{K}_r = m_r \in \mathcal{T}(\mathbb{R})$, donc $K_r * (f')$ est bien défini au sens des distributions. En prenant la transformée de Fourier, la relation $f = K_r * f'$ est équivalente à

$$\widehat{f} = \widehat{K_r}\widehat{f'} = 2\pi i\xi m_r \widehat{f}.$$

Soit $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. Il faut vérifier que $\widehat{f}(\phi) = \widehat{f}(2\pi i\xi m_r\phi)$. Soit $\chi \in C^\infty$, $\chi(\xi) = 1$ pour $|\xi| \leq \frac{2}{3}r$ et $\chi(\xi) = 0$ pour $|\xi| \geq r$. On a donc

$$\widehat{f}(2\pi i\xi m_r\phi) = \widehat{f}(2\pi i\xi\chi m_r\phi) + \widehat{f}(2\pi i\xi(1-\chi)m_r\phi).$$

Comme $\mathrm{supp}(\widehat{f}) \cap B_r = \emptyset$, on voit que $\widehat{f}(2\pi i\xi\chi m_r\phi) = 0 = \widehat{f}(\chi\phi)$. Aussi, $2\pi i\xi(1-\chi)m_r = (1-\chi)$, donc

$$\widehat{f}(2\pi i\xi m_r\phi) = \widehat{f}(\chi\phi) + \widehat{f}((1-\chi)\phi) = \widehat{f}(\phi).$$

On a ainsi montré que $f = K_r * (f')$.

Par l'inégalité de Young, pour tout $1 \leq p \leq \infty$ on a

$$\|f\|_{L^p} = \|K_r * (f')\|_{L^p} \leq \|K_r\|_{L^1}\|f'\|_{L^p} \leq \|K\|_{L^1}r^{-1}\|f'\|_{L^p},$$

ce qui prouve $(*)$ avec $C := \|K\|_{L^1}$.

$\square$