DM écrit, à rendre vendredi le 9 octobre.

Exercice 1. Montrer qu'il existe une constante $C = C(d)$ ayant la propriété suivante. Soit $1 \leq p \leq q \leq \infty$, $R > 0$ et $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ telle que $\mathrm{supp}(\widehat{f}) \subset B_R$ (la boule de centre 0 et de rayon R). Alors

$$\|f\|_{L^q} \leq CR^{d(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})}\|f\|_{L^p}, \qquad \|\nabla f\|_{L^p} \leq CR\|f\|_{L^p}.$$

En déduire que, sous les mêmes hypothèses, pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^d$

$$\|\partial^\alpha f\|_{L^q} \leq C^{1+|\alpha|}R^{|\alpha|+d(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})}\|f\|_{L^p}.$$

Remarque : Toutes les dérivées sont prises au sens $\mathcal{S}'$. Par convention, $\|f\|_{L^p} = \infty$ si $f \notin L^p$ (c'est-à-dire, si la distribution f ne peut pas être identifiée à une fonction L^p).
Indication : Soit $\chi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ telle que $\chi(\xi) = 1$ pour $|\xi| \leq 1$ et $\chi(\xi) = 0$ pour $|\xi| \geq 2$, et pour tout $R > 0$ notons $\chi_R(\xi) := \chi(\xi/R)$ et $V_R := \mathcal{F}^{-1}(\chi_R)$. Montrer que $\|V_R\|_{L^r} \leq CR^{d(1-\frac{1}{r})}$ et $\|\nabla V_R\|_{L^1} \leq CR$, où C dépend du choix de la fonction χ. Ensuite, considérer $V_R * f$.

Exercice 2. Montrer qu'il existe une constante $C > 0$ ayant la propriété suivante. Soit $r > 0$ et $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ telle que $\mathrm{supp}(\widehat{f}) \cap B_r = \emptyset$. Alors pour tout $1 \leq p \leq \infty$

$$\|f\|_{L^p} \leq Cr^{-1}\|f'\|_{L^p}, \qquad (*)$$

où $f' \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ est la dérivée de f.
Indication :

(i) Fixons $m \in C^\infty(\mathbb{R})$, une fonction telle que $m(\xi) = 0$ si $|\xi| \leq \frac{1}{3}$ et $m(\xi) = \dfrac{1}{2\pi i\xi}$ si $|\xi| \geq \frac{2}{3}$. Montrer que $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} \left(|m(\xi)|^2 + |m'(\xi)|^2\right) \mathrm{d}\xi < \infty$.

(ii) Soit $K := \mathcal{F}^{-1}(m)$. Montrer que $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} (1+x^2)|K(x)|^2 \,\mathrm{d}x < \infty$. En déduire que $K \in L^1(\mathbb{R})$.

(iii) Soit $m_r(\xi) := r^{-1}m(\xi/r)$ et $K_r := \mathcal{F}^{-1}(m_r)$. Montrer que $\|K_r\|_{L^1} = r^{-1}\|K\|_{L^1}$.

(iv) Montrer (rigoureusement !) que $K_r * (f') = f$. En déduire $(*)$.