DM écrit 5, corrigé.

Exercice 1. *On étudie dans cet exercice la convergence des intégrales de Fourier dans L^p pour $1 < p < \infty$.*

(i) La transformation de Hilbert $H : \mathcal{S}(\mathbb{R}) \to \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ est définie par la condition

$$\widehat{Hf}(\xi) = -i\,\mathrm{sgn}(\xi)\widehat{f}(\xi).$$

Montrer, en calculant le noyau et en vérifiant directement les hypothèses, que H est un opérateur de Calderón-Zygmund fort. (Vous pouvez, bien sûr, utiliser les résultats des exercices des DM précédents).

(ii) Soit $m_+ : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ la fonction définie par $m_+(\xi) = 1$ si $\xi > 0$ et $m_+(\xi) = 0$ si $\xi \le 0$. Pour tout $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ on pose $P_+ f := \mathcal{F}^{-1}(m_+\widehat{f})$. Montrer que pour tout $1 < p < \infty$ il existe une constante $A = A(p)$ telle que $\|P_+ f\|_{L^p} \le A(p)\|f\|_{L^p}$ pour tout $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. Donner deux preuves différentes : une qui utilise la question précédente, et une autre qui évoque le thèorème de Mikhlin.

(iii) Pour $\omega \in \mathbb{R}$ soit $m_\omega : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ la fonction définie par $m_\omega(\xi) = 1$ si $\xi > \omega$ et $m_\omega(\xi) = 0$ si $\xi \le \omega$. Pour tout $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ on pose $P_\omega f := \mathcal{F}^{-1}(m_\omega\widehat{f})$. Montrer que si $1 < p < \infty$, alors $\|P_\omega f\|_{L^p} \le A(p)\|f\|_{L^p}$ pour tout $\omega \in \mathbb{R}$ et $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, où $A(p)$ est la même constante que dans (i).

(iv) Pour tout $R \ge 0$ et $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, soit $S_R f := \mathcal{F}^{-1}(\chi_{[-R,R]}\widehat{f})$, où $\chi_{[-R,R]}$ est la fonction caractéristique de l'intervalle fermé $[-R, R]$. Montrer que pour tout $1 < p < \infty$ il existe une constante $C = C(p)$ telle que $\|S_R f\|_{L^p} \le C(p)\|f\|_{L^p}$ pour tout $R \in \mathbb{R}$ et $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$.

(v) Fixons $\psi \in C^\infty(\mathbb{R})$, une fonction telle que $\psi(\xi) = 1$ si $|\xi| \le \frac{1}{2}$ et $\psi(\xi) = 0$ si $|\xi| \ge 1$. Soit $\psi_R(\xi) := \psi(\xi/R)$ et $K_R := \mathcal{F}^{-1}(\psi_R)$. Montrer que K_R est une approximation de l'identité quand $R \to \infty$.

(vi) On définit $S_R : L^p(\mathbb{R}) \to L^p(\mathbb{R})$ comme l'unique extension continue sur $L^p(\mathbb{R})$ de l'opérateur S_R défini ci-dessus sur $\mathcal{S}(\mathbb{R})$. Montrer que $S_R(K_R * f) = K_R * f$ pour tout $R > 0$ et $f \in L^p(\mathbb{R})$. Montrer que $\lim_{R\to\infty} \|S_R f - f\|_{L^p} = 0$, pour tout $f \in L^p(\mathbb{R})$.

(vii) (question bonus) Montrer que pour tout $1 < p < \infty$ il existe $C = C(p)$ tel que

$$\|m\|_{M^p} \le C\|m\|_{BV}, \qquad \text{pour tout } m : \mathbb{R} \to \mathbb{C},$$

où $\|m\|_{M^p} := \|T_m\|_{L^p\to L^p}$ est la norme dans l'espace des multiplicateurs L^p et $BV(\mathbb{R})$ est l'espace des fonctions à variation bornée, c'est-à-dire

$$\|m\|_{BV} := \|m\|_{L^\infty} + \sum_{\xi_1 < \ldots < \xi_N} \sum_{j=1}^{N} |m(\xi_j) - m(\xi_{j+1})|.$$

Solution. **(i)** Le DM1 montre que $H = \mathrm{vp}(1/(\pi x))$, et il est facile de vérifier que $1/(\pi x)$ est un noyau de Calderón-Zygmund fort.

(ii) Il est évident que m_+ vérifie les hypothèse du théorème de Mikhlin.

Pour utiliser directement la question précédente, on observe que

$$m_+(\xi) = \frac{i}{2}\Big(-i\mathrm{sgn}(\xi) - \frac{i}{2}\Big).$$

(iii) Soit $\omega \in \mathbb{R}$ et $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. Soit $g(x) := \mathrm{e}^{-2\pi i\omega x}f(x)$, donc $\widehat{g}(\xi) = \widehat{f}(\xi + \omega)$, ce qui donne

$$\widehat{P_\omega f}(\xi + \omega) = m_\omega(\xi + \omega)\widehat{f}(\xi + \omega) = m_+(\xi)\widehat{g}(\xi) = \widehat{P_+ g}(\xi).$$

On en déduit que $\mathcal{F}(\mathrm{e}^{-2\pi i x\omega}P_\omega f) = \mathcal{F}P_+ g$, donc $P_\omega f = \mathrm{e}^{2\pi i x\omega}P_+ g$, et on obtient $\|P_\omega f\|_{L^p} = \|P_+ g\|_{L^p} \le A(p)\|g\|_{L^p} = A(p)\|f\|_{L^p}$.

(iv) Pour tout $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ et tout $R \geq 0$ on a $S_R f = P_R f - P_{-R} f$. Les extrémités de l'intervalle $[-R, R]$ ne jouent aucun rôle, parce que $\chi_{[-R,R]} = \chi_{]-R,R]}$ comme distributions. On a donc $\|S_R f\|_{L^p} \leq \|P_R f\|_{L^p} + \|P_{-R} f\|_{L^p} \leq 2A(p)\|f\|_{L^p}$.

(v) Par un changement de variable, on obtient $K_R(x) = RK(Rx)$, où $K := \mathcal{F}^{-1}\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. Toutes les propriétés sont immédiates. Notons que $\int_{\mathbb{R}} K_R(x)\,\mathrm{d}x = \psi_R(0) = 1$.

(vi) Soit d'abord $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. Comme $\chi_{[-R,R]}\psi_R = \psi_R$, on a $S_R(K_R f) = K_R f$, ce qui permet d'écrire

$$S_R f - f = S_R(f - K_R * f) - (f - K_R * f).$$

On sait que K_R est une approximation de l'identité, donc

$$\|S_R f - f\|_{L^p} \leq (1 + C(p))\|f - K_R * f\|_{L^p} \to 0.$$

Maintenant, pour $f \in L^p(\mathbb{R})$, soit $g \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ et $h := f - g$. On trouve

$$\limsup_{R\to\infty} \|S_R f - f\|_{L^p} \leq \limsup_{R\to\infty} \|S_R g - g\|_{L^p} + \limsup_{R\to\infty} \|S_R h - h\|_{L^p} \leq (1 + C(p))\|h\|_{L^p}.$$

C'est terminé, parce que $\|h\|_{L^p}$ peut être rendu arbitrairement petit. □

Exercice 2. *Soit* $0 \leq s < \frac{d}{2}$ *et* $p = \frac{2d}{d-2s}$. *Montrer qu'il existe une constate* $C = C(d, s)$ *telle que pour tout* $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$

$$\|f\|_{L^p} \leq C\|f\|_{\dot{B}^s_{2,\infty}}^{1-\frac{2}{p}} \|f\|_{\dot{H}^s}^{\frac{2}{p}}.$$

(C'est l'inégalité de Sobolev raffinée *de Chemin et Xu, '97.)*

Indication. *Estimer* $m_\lambda(f)$ *de manière suivante. Écrire* $f = f_b + f_h$, *où* $f_b := \sum_{j \leq j_0(\lambda)} P_j$ *(*basses *fréquences) et* $f_h := \sum_{j > j_0(\lambda)} P_j$ *(*hautes *fréquences), avec* $j_0 = j_0(\lambda)$ *qu'il faut choisir. Montrer qu'il existe une constante* $A = A(d, s)$ *telle que si* $2^{j_0(d/2-s)} \leq \lambda/(A\|f\|_{\dot{B}^s_{2,\infty}})$, *alors* $\|f_b\|_{L^\infty} < \lambda/2$. *Prendre le plus grand* j_0 *qui vérifie cela et estimer* $|\{x : |f_h(x)| > \lambda/2\}|$ *en utilisant l'inégalité de Markov.*

Solution. Le cas $s = 0$ et $p = 2$ est évident, donc on supposera $s > 0$ et $p > 2$.

On décompose $f = f_b + f_h$, comme indiqué. Par l'inégalité de Bernstein, pour tout $j \in \mathbb{Z}$ on a

$$\|P_j f\|_{L^\infty} \leq C2^{jd/2}\|P_j f\|_{L^2} \leq C2^{j(d/2-s)}2^{js}\|P_j f\|_{L^2}.$$

Par la définition de la norme $\dot{B}^s_{2,\infty}$, on obtient

$$\|P_j f\|_{L^\infty} \leq C2^{j(d/2-s)}\|f\|_{\dot{B}^s_{2,\infty}}.$$

En prenant la somme en j pour $j \leq j_0$, cela donne

$$\|f_b\|_{L^\infty} \leq C2^{j_0(d/2-s)}\|f\|_{\dot{B}^s_{2,\infty}},$$

où $C = C(s, d)$, donc il suffit de prendre $A = 3C$. On prend $j_0 = j_0(\lambda)$ le plus grand nombre entier qui vérifie l'inégalité dans l'indication, donc

$$2^{j_0(\lambda)\times(d/2-s)} \leq \lambda/(A\|f\|_{\dot{B}^s_{2,\infty}}) < 2^{(j_0(\lambda)+1)\times(d/2-s)}.$$

On a aussi, voir la preuve de la Proposition 4.8,

$$\|f_h\|_{L^2}^2 \leq 3 \sum_{j > j_0(\lambda)} \|P_j f\|_{L^2}^2.$$

Par l'inégalité de Markov,

$$m_\lambda(f) \leq m_{\lambda/2}(f_b) + m_{\lambda/2}(f_h) \leq \frac{12}{\lambda^2} \sum_{j > j_0} \|P_j f\|_{L^2}^2.$$

On peut estimer la norme L^p :

$$\begin{aligned}
\|f\|_{L^p}^p &= \int_0^\infty p\lambda^{p-1} m_\lambda(f)\,\mathrm{d}\lambda \leq C\int_0^\infty \lambda^{p-3} \sum_{j>j_0(\lambda)} \|P_j f\|_{L^2}^2 \,\mathrm{d}\lambda \\
&\leq C\sum_{j\in\mathbb{Z}} \|P_j f\|_{L^2}^2 \int_{j_0(\lambda)<j} \lambda^{p-3}\,\mathrm{d}\lambda.
\end{aligned} \tag{1}$$

Mais on voit que

$$j < j_0(\lambda) \Leftrightarrow 2^{j\times(d/2-s)} > \lambda/(A\|f\|_{\dot{B}^s_{2,\infty}}) \Leftrightarrow \lambda < 2^{j\times(d/2-s)} A\|f\|_{\dot{B}^s_{2,\infty}},$$

donc

$$\int_{j_0(\lambda)<j} \lambda^{p-3}\,\mathrm{d}\lambda \leq C\|f\|_{\dot{B}^s_{2,\infty}}^{p-2} 2^{j\times(d/2-s)\times(p-2)} = C\|f\|_{\dot{B}^s_{2,\infty}}^{p-2} 2^{2js},$$

où la dernière égalité vient de la condition $p = \frac{2d}{d-2s}$. On conclut grâce à (1) que

$$\|f\|_{L^p}^p \leq C\sum_{j\in\mathbb{Z}} \|P_j f\|_{L^2}^2 \|f\|_{\dot{B}^s_{2,\infty}}^{p-2} 2^{2js} \leq C\|f\|_{\dot{B}^s_{2,\infty}}^{p-2} \|f\|_{\dot{H}^s}^2,$$

ce qui termine la preuve. □