DM écrit, à rendre vendredi le 16 octobre.

Exercice 1. On étudie dans cet exercice la convergence des intégrales de Fourier dans L^p pour $1 < p < \infty$.

(i) La transformation de Hilbert $H : \mathcal{S}(\mathbb{R}) \to \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ est définie par la condition

$$\widehat{Hf}(\xi) = -i\,\mathrm{sgn}(\xi)\widehat{f}(\xi).$$

Montrer, en calculant le noyau et en vérifiant directement les hypothèses, que H est un opérateur de Calderón-Zygmund fort. (Vous pouvez, bien sûr, utiliser les résultats des exercices des DM précédents).

(ii) Soit $m_+ : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ la fonction définie par $m_+(\xi) = 1$ si $\xi > 0$ et $m_+(\xi) = 0$ si $\xi \leq 0$. Pour tout $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ on pose $P_+f := \mathcal{F}^{-1}(m_+\widehat{f})$. Montrer que pour tout $1 < p < \infty$ il existe une constante $A = A(p)$ telle que $\|P_+f\|_{L^p} \leq A(p)\|f\|_{L^p}$ pour tout $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. Donner deux preuves différentes : une qui utilise la question précédente, et une autre qui évoque le thèorème de Mikhlin.

(iii) Pour $\omega \in \mathbb{R}$ soit $m_\omega : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ la fonction définie par $m_\omega(\xi) = 1$ si $\xi > \omega$ et $m_\omega(\xi) = 0$ si $\xi \leq \omega$. Pour tout $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ on pose $P_\omega f := \mathcal{F}^{-1}(m_\omega\widehat{f})$. Montrer que si $1 < p < \infty$, alors $\|P_\omega f\|_{L^p} \leq A(p)\|f\|_{L^p}$ pour tout $\omega \in \mathbb{R}$ et $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, où $A(p)$ est la même constante que dans (i).

(iv) Pour tout $R \geq 0$ et $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, soit $S_Rf := \mathcal{F}^{-1}(\chi_{[-R,R]}\widehat{f})$, où $\chi_{[-R,R]}$ est la fonction caractéristique de l'intervalle fermé $[-R,R]$. Montrer que pour tout $1 < p < \infty$ il existe une constante $C = C(p)$ telle que $\|S_Rf\|_{L^p} \leq C(p)\|f\|_{L^p}$ pour tout $R \in \mathbb{R}$ et $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$.

(v) Fixons $\psi \in C^\infty(\mathbb{R})$, une fonction telle que $\psi(\xi) = 1$ si $|\xi| \leq \frac{1}{2}$ et $\psi(\xi) = 0$ si $|\xi| \geq 1$. Soit $\psi_R(\xi) := \psi(\xi/R)$ et $K_R := \mathcal{F}^{-1}(\psi_R)$. Montrer que K_R est une approximation de l'identité quand $R \to \infty$.

(vi) On définit $S_R : L^p(\mathbb{R}) \to L^p(\mathbb{R})$ comme l'unique extension continue sur $L^p(\mathbb{R})$ de l'opérateur S_R défini ci-dessus sur $\mathcal{S}(\mathbb{R})$. Montrer que $S_R(K_R * f) = K_R * f$ pour tout $R > 0$ et $f \in L^p(\mathbb{R})$. Montrer que $\lim\limits_{R\to\infty} \|S_Rf - f\|_{L^p} = 0$, pour tout $f \in L^p(\mathbb{R})$.

(vii) (question bonus) Montrer que pour tout $1 < p < \infty$ il existe $C = C(p)$ tel que

$$\|m\|_{M^p} \leq C\|m\|_{BV}, \qquad \text{pour tout } m : \mathbb{R} \to \mathbb{C},$$

où $\|m\|_{M^p} := \|T_m\|_{L^p\to L^p}$ est la norme dans l'espace des multiplicateurs L^p et $BV(\mathbb{R})$ est l'espace des fonctions à variation bornée, c'est-à-dire

$$\|m\|_{BV} := \|m\|_{L^\infty} + \sum_{\xi_1<\ldots<\xi_N} \sum_{j=1}^{N} |m(\xi_j) - m(\xi_{j+1})|.$$

Exercice 2. (plus difficile que l'Exercice 1.) Soit $0 \leq s < \frac{d}{2}$ et $p = \frac{2d}{d-2s}$. Montrer qu'il existe une constate $C = C(d,s)$ telle que pour tout $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$

$$\|f\|_{L^p} \leq C\|f\|_{\dot{B}^s_{2,\infty}}^{1-\frac{2}{p}}\|f\|_{\dot{H}^s}^{\frac{2}{p}}.$$

(C'est *l'inégalité de Sobolev raffinée* de Chemin et Xu, '97.)

Indication. Estimer $m_\lambda(f)$ de manière suivante. Écrire $f = f_b + f_h$, où $f_b := \sum_{j\leq j_0(\lambda)} P_j$ (*basses* fréquences) et $f_h := \sum_{j>j_0(\lambda)} P_j$ (*hautes* fréquences), avec $j_0 = j_0(\lambda)$ qu'il faut choisir. Montrer qu'il existe une constante $A = A(d,s)$ telle que si $2^{j_0(d/2-s)} \leq \lambda/(A\|f\|_{\dot{B}^s_{2,\infty}})$, alors $\|f_b\|_{L^\infty} < \lambda/2$. Prendre le plus grand j_0 qui vérifie cela et estimer $|\{x : |f_h(x)| > \lambda/2\}|$ en utilisant l'inégalité de Markov.