Introduction à l'analyse harmonique

Cours introductif 2020/2021

Examen écrit, 28/10/2020

Instructions.

— Vous pouvez utiliser vos notes et d'autres documents imprimés. Il est interdit d'utiliser des ordinateurs ou des téléphones portables.
— Écrivez vos solutions en utilisant des phrases complètes en langue française. Essayez s'il vous plaît d'écrire lisiblement.
— Il y a 4 problèmes.
— Même si vous ne savez pas résoudre un des sous-problèmes, vous pouvez l'utiliser dans la suite de l'exercice.
— Vous pouvez utiliser tout résultat énoncé dans le polycopié ou dans les DM.
— On adopte la convention que la transformée de Fourier d'une fonction $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ est donnée par

$$(\mathcal{F}f)(\xi) = \widehat{f}(\xi) := \int_{\mathbb{R}^d} \mathrm{e}^{-2\pi i x\cdot\xi} f(x)\,\mathrm{d}x, \qquad \text{pour tout } \xi \in \mathbb{R}^d.$$

On note $\mathcal{F}^{-1}$ la transformation de Fourier inverse, c'est-à-dire $\mathcal{F}^{-1}(\widehat{f}) = f$ pour tout $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$.

Problème 1. (3 points) Soit $d \in \{1, 2, \dots\}$, $1 \leq p_1 \leq p_2 \leq \infty$, $1 \leq r_1 \leq r_2 \leq \infty$, $s_1 \in \mathbb{R}$. Posons $s_2 := s_1 - d(p_1^{-1} - p_2^{-1})$. Montrer qu'il existe une constante $C = C(d)$ telle que

$$\|f\|_{B^{s_2}_{p_2,r_2}} \leq C\|f\|_{B^{s_1}_{p_1,r_1}}, \qquad \text{pour tout } f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d),$$

où $\|\cdot\|_{B^s_{p,r}}$ est la norme de Besov non homogène.

Solution. Soit $a_0 := \|S_0 f\|_{L^{p_1}}$, $a_j := 2^{js_1}\|P_j f\|_{L^{p_1}}$ pour $j \geq 1$, $b_0 := \|S_0 f\|_{L^{p_2}}$ et $b_j := 2^{js_2}\|P_j f\|_{L^{p_2}}$ pour $j \geq 1$.

Comme $\mathrm{supp}(\widehat{P_j f}) \subset B(0, 2^{j+1})$ et $p_2 \geq p_1$, par l'inégalité de Bernstein on a

$$\|P_j f\|_{L^{p_2}} \leq C2^{jd(p_1^{-1} - p_2^{-1})}\|P_j f\|_{L^{p_1}}, \qquad \text{pour tout } j \in \{1, 2, \dots\},$$

où C ne dépend que de la dimension. On remarque que $js_2 + jd(p_1^{-1} - p_2^{-1}) = js_1$, donc

$$2^{js_2}\|P_j f\|_{L^{p_2}} \leq C2^{js_1}\|P_j f\|_{L^{p_1}}, \qquad \text{pour tout } j \in \{1, 2, \dots\},$$

autrement dit $b_j \leq Ca_j$. Également par l'inégalité de Bernstein, $b_0 \leq Ca_0$. Ceci implique

$$b_0 + \Big(\sum_{j=1}^{\infty} b_j^{r_1}\Big)^{\frac{1}{r_1}} \leq C\Big(a_0 + \Big(\sum_{j=1}^{\infty} a_j^{r_1}\Big)^{\frac{1}{r_1}}\Big).$$

Mais puisque $r_2 \geq r_1$, on a aussi

$$\Big(\sum_{j=1}^{\infty} b_j^{r_2}\Big)^{\frac{1}{r_2}} \leq \Big(\sum_{j=1}^{\infty} b_j^{r_1}\Big)^{\frac{1}{r_1}},$$

donc

$$\|f\|_{B^{s_2}_{p_2,r_2}} = b_0 + \Big(\sum_{j=1}^{\infty} b_j^{r_2}\Big)^{\frac{1}{r_2}} \leq C\Big(a_0 + \Big(\sum_{j=1}^{\infty} a_j^{r_1}\Big)^{\frac{1}{r_1}}\Big) = C\|f\|_{B^{s_1}_{p_1,r_1}}.$$

□

Problème 2. (3 points)

(i) Vérifier que $\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \mathrm{e}^{2\pi i n\xi}\,\mathrm{d}\xi = 0$, pour tout $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$.

(ii) Trouver une fonction bornée continue $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que $\operatorname{supp}(\widehat{\gamma}) \subset [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$, $\gamma(0) = 1$ et $\gamma(n) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$.

(iii) Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ une suite de nombres complexes telle que $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |a_n| < \infty$. Montrer qu'il existe une fonction bornée continue $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ telle que $\operatorname{supp}(\widehat{f}) \subset [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ et $f(n) = a_n$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$.

Solution. (i) En effet,

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \mathrm{e}^{2\pi i n\xi}\,\mathrm{d}\xi = \frac{1}{2\pi i n}[\mathrm{e}^{2\pi i n\xi}]_{\xi=-\frac{1}{2}}^{\xi=\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\pi i n}(\mathrm{e}^{\pi i n} - \mathrm{e}^{-\pi i n}) = 0.$$

(ii) On peut observer que la formule dans (i) donne la transformée de Fourier inverse de la fonction indicatrice de l'intervalle $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$, calculée en n. Il suffira donc de poser $\gamma := \mathcal{F}^{-1}(\chi)$, où χ est la fonction indicatrice de l'intervalle $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$. On calcule

$$\gamma(x) = \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{2\pi i x\xi}\chi(\xi)\,\mathrm{d}\xi = \frac{1}{2\pi i x}(\mathrm{e}^{\pi i x} - \mathrm{e}^{-\pi i x}) = \frac{\sin(\pi x)}{\pi x}.$$

(iii) Posons

$$g(\xi) := \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n \mathrm{e}^{-2\pi i n\xi}\chi(\xi).$$

La série converge dans $L^1(\mathbb{R})$, donc $g \in L^1(\mathbb{R})$. Aussi, $\operatorname{supp}(\widehat{g}) \subset [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$. Soit $f := \mathcal{F}^{-1}(g)$. C'est une fonction continue bornée, et

$$f = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n \mathcal{F}^{-1}(\mathrm{e}^{-2\pi i n\xi}\chi),$$

avec la somme convergeant uniformément. Par la formule bien connue du cours,

$$\mathcal{F}^{-1}(\mathrm{e}^{-2\pi i n\xi}\chi)(x) = \mathcal{F}^{-1}(\chi)(x-n) = \gamma(x-n),$$

donc pour tout $m \in \mathbb{Z}$

$$f(m) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n\gamma(m-n) = a_m.$$

$\square$

Remarque. *La formule* $f(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} f(n)\gamma(x-n) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} f(n)\frac{\sin(\pi(x-n))}{\pi(x-n)}$ *s'appelle la* formule de Shannon *et permet de reconstruire un signal continu $f(x)$ à partir d'un échantillonnage $f(n)$ pour $n \in \mathbb{Z}$, sous la condition que* $\operatorname{supp}(\widehat{f}) \subset [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$, *voir par exemple l'article sur Wikipedia "Théorème d'échantillonnage".*

Problème 3. (6 points)

Pour tout $y > 0$ on définit le *noyau de Poisson* P_y par

$$P_y(x) := \frac{y}{\pi(x^2 + y^2)}, \qquad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}.$$

On peut vérifier, en utilisant le théorème des résidus par exemple, que $\widehat{P}_y(\xi) = \mathrm{e}^{-2\pi y|\xi|}$ (vous n'avez pas besoin de le vérifier).

(i) Soit $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}; \mathbb{R})$ et pour tout $y > 0$ posons $u_y := P_y * f$. Montrer que $u_{y_1+y_2}(x) = (P_{y_2} * u_{y_1})(x)$ pour tout $y_1, y_2 > 0$ et $x \in \mathbb{R}$.

(ii) Montrer que P_y est une approximation de l'identité quand $y \to 0^+$.

(iii) Pour tout $y > 0$ on définit le *noyau conjugué* Q_y par

$$Q_y(x) := \frac{x}{\pi(x^2 + y^2)} = \frac{x P_y(x)}{y}, \qquad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}.$$

Montrer que $\widehat{Q}_y(\xi) = -i \operatorname{sgn}(\xi) \widehat{P}_y(\xi)$ (il suffit de donner l'idée de la preuve).

(iv) Pour tout $y > 0$ posons $v_y := Q_y * f$. Rappelons que la transformée de Hilbert de $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ est définie par la condition

$$\widehat{Hf}(\xi) = -i \operatorname{sgn}(\xi) \widehat{f}(\xi).$$

Vérifier que $v_y = P_y * (Hf)$. Montrer que

$$\lim_{y \to 0^+} \|v_y - Hf\|_{L^\infty} = 0.$$

(v) Soit $\Omega := \{z = x + iy : y > 0\}$. Pour tout $z \in \Omega$, posons $w(z) := u_y(x) + i v_y(x)$. Montrer que $w : \Omega \to \mathbb{C}$ est une fonction holomorphe.

Solution. (i) On observe que $P_y \in L^1(\mathbb{R})$ pour tout $y > 0$, donc $P_y * g$ est bien défini pour tout $g \in L^2(\mathbb{R})$ et $\mathcal{F}(P_y * g) = \widehat{P}_y \widehat{g}$ (pour le justifier, il suffit d'approcher g par des fonctions test et passer à la limite).

On a donc

$$\widehat{u}_{y_1} = \widehat{P}_{y_1} \widehat{f} \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R}),$$
$$\widehat{u}_{y_1+y_2} = \widehat{P}_{y_1+y_2} \widehat{f},$$
$$\mathcal{F} P_{y_2} * u_{y_1} = \widehat{P}_{y_2} \widehat{u}_{y_1} = \widehat{P}_{y_2} \widehat{P}_{y_1} \widehat{f}.$$

Il est clair que $\widehat{P}_{y_2} \widehat{P}_{y_1} = \widehat{P}_{y_1+y_2}$, donc, en prenant les transformées de Fourier inverses, $u_{y_1+y_2} = P_{y_2} * u_{y_1}$.

(ii) Il est clair que $P_y(x) \geq 0$ pour tout x, et que $\int_{\mathbb{R}} P_y(x)\,\mathrm{d}x = 1$ (soit par un calcul direct, soit en invoquant le fait que $\widehat{P}_y(0) = 1$).

Soit $\delta > 0$. On obtient

$$\int_{|x|\geq\delta} P_y(x)\,\mathrm{d}x = \int_{|x|\geq\delta} \frac{1}{1+(x/y)^2}\,\mathrm{d}(x/y) = \int_{|x|\geq\delta/y} \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}.$$

Pour δ fixe et $y \to 0^+$, ce nombre converge vers 0.
(iii) Grâce à la formule bien connue du cours, $\widehat{xP_y}(\xi) = \frac{i}{2\pi}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\xi}\widehat{P}_y(\xi)$. En calculant explicitement cette dérivée pour $\xi > 0$ et pour $\xi < 0$, on obtient le résultat.
(iv) On observe que $Q_y \in L^2(\mathbb{R})$, donc $Q_y * f$ est bien défini et $\widehat{v}_y = \widehat{Q}_y\widehat{f}$. On a aussi $Hf \in L^2(\mathbb{R})$ et

$$\mathcal{F}(P_y * Hf)(\xi) = \widehat{P}_y(\xi)\widehat{Hf}(\xi) = -i\,\mathrm{sgn}(\xi)\widehat{P}_y(\xi)\widehat{f}(\xi) = \widehat{Q}_y(\xi)\widehat{f}(\xi).$$

En prenant $\mathcal{F}^{-1}$, on en déduit que $v_y = P_y * (Hf)$.

Comme $\widehat{Hf} \in L^1(\mathbb{R})$, on sait que $Hf \in C_0(\mathbb{R})$. Puisque P_y est une approximation de l'identité, on obtient

$$\lim_{y\to 0^+} \|v_y - Hf\|_{L^\infty} = \lim_{y\to 0^+} \|P_y * (Hf) - Hf\|_{L^\infty} = 0.$$

(v) Soit $\Gamma(z) := P_y(x) + iQ_y(x)$, de sorte que

$$w(z) = \int_{\mathbb{R}} \Gamma(z-x)f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Il suffit de vérifier que Γ est holomorphe, parce qu'on aura $w'(z) = \int_{\mathbb{R}} \Gamma'(z-x)f(x)\,\mathrm{d}x$ au sens de la dérivation complexe. Mais

$$\Gamma(z) = \frac{1}{\pi}\frac{y+ix}{x^2+y^2} = \frac{i}{\pi z}.$$

$\square$

Remarque. *Nous avons trouvé dans cet exercice une interprétation intéressante de la transformation de Hilbert : on prend une fonction réelle f dans la classe de Schwartz, on l'étend comme fonction harmonique sur le demi-plan supérieur, ensuite on trouve la partie imaginaire pour former une fonction holomorphe, et enfin on prend la limite de cette partie imaginaire sur l'axe réel. Ce qu'on obtient est précisément Hf.*

Problème 4. (8 points) Voici le résultat qu'il faut démontrer.

Proposition. *Pour tout $d \in \{1, 2, \dots\}$ il existe une constante $C = C(d) > 0$ ayant la propriété suivante. Soit $T : L^2(\mathbb{R}^d) \to L^2(\mathbb{R}^d)$ un opérateur linéaire vérifiant $\|T\|_{L^2 \to L^2} \leq 1$, et tel que pour toute fonction $f \in L^2_{\mathrm{comp}}(\mathbb{R}^d)$, c'est-à-dire une fonction dans $L^2(\mathbb{R}^d)$ dont le support est borné,*

$$(Tf)(x) = \int_{\mathbb{R}^d} K(x-y) f(y) \, \mathrm{d}y, \qquad \text{pour tout } x \notin \mathrm{supp}(f),$$

où $K : \mathbb{R}^d \setminus \{0\} \to \mathbb{C}$ est une fonction mesurable localement bornée qui vérifie

$$\int_{|x|>2|y|} |K(x) - K(x-y)| \, \mathrm{d}x \leq 1, \quad \text{pour tout } y \in \mathbb{R}^d.$$

Alors pour tout $f \in L^2_{\mathrm{comp}}(\mathbb{R}^d) \cap L^\infty(\mathbb{R}^d)$ il existe $a \in \mathbb{C}$ tel que

$$\int_B |(Tf)(x) - a| \, \mathrm{d}x \leq C \|f\|_{L^\infty},$$

où $B \subset \mathbb{R}^d$ est la boule unité de centre 0.

Pour $d = 1$, donner un exemple d'un opérateur T vérifiant les hypothèses ci-dessus et d'une suite $f_n \in L^2_{\mathrm{comp}}(\mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R})$ telle que $\|f_n\|_{L^\infty} \leq 1$ et $|a_n| \to \infty$, où $a_n \in \mathbb{C}$ vérifie

$$\int_{-1}^{1} |(Tf_n)(x) - a_n| \, \mathrm{d}x \leq C.$$

Indication. Soit $\chi(x) = 1$ si $|x| \leq 2$ et $\chi(x) = 0$ si $|x| > 2$, c'est-à-dire χ est la fonction caractéristique de la boule de centre 0 et de rayon 2. Décomposer $f = g + h = \chi f + (1-\chi) f$.

Solution. On décompose $f = g + h$, comme indiqué. Bien sûr, g et h appartiennent à $L^2_{\mathrm{comp}}(\mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R})$. Par linéarité, $Tf = Tg + Th$, donc

$$\int_B |(Tf)(x) - a| \, \mathrm{d}x \leq \int_B |(Tg)(x)| \, \mathrm{d}x + \int_B |(Th)(x) - a| \, \mathrm{d}x.$$

L'inégalité de Cauchy-Schwarz et le fait que $\|T\|_{L^2 \to L^2} \leq 1$ impliquent

$$\begin{aligned}\int_B |(Tg)(x)| \, \mathrm{d}x &\leq \sqrt{|B|} \times \|Tg\|_{L^2} \leq \sqrt{|B|} \times \|g\|_{L^2} \\ &\leq \sqrt{|B|}\sqrt{|B_2|} \times \|g\|_{L^\infty} \leq C\|f\|_{L^\infty}.\end{aligned}$$

Observons qu'on a utilisé le fait que g est à support dans une boule de rayon 2 pour estimer la norme L^2 de g par sa norme L^∞.

On considère maintenant $(Th)(x)$ pour $|x| < 1$. En particulier, $x \notin \operatorname{supp}(h)$, donc

$$\begin{aligned}(Th)(x) &= \int_{\mathbb{R}^d} K(x-y)h(y)\,\mathrm{d}y \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} (K(x-y) - K(-y))h(y)\,\mathrm{d}y + \int_{\mathbb{R}^d} K(-y)h(y)\,\mathrm{d}y.\end{aligned}$$

Posons $a := \int_{\mathbb{R}^d} K(-y)h(y)\,\mathrm{d}y \in \mathbb{C}$. L'intégrale a un sens parce que K est une fonction bornée sur $\operatorname{supp}(h)$, par l'hypothèse. On obtient

$$\begin{aligned}|(Th)(x) - a| &\leq \int_{\mathbb{R}^d} |K(x-y) - K(-y)| \times |h(y)|\,\mathrm{d}y \\ &\leq \|f\|_{L^\infty} \int_{|y|\geq 2} |K(x-y) - K(-y)|\,\mathrm{d}y \\ &\leq \|f\|_{L^\infty} \int_{|y|>2|x|} |K(x-y) - K(-y)|\,\mathrm{d}y \leq \|f\|_{L^\infty},\end{aligned}$$

où la dernière inégalité résulte directement de l'hypothèse sur K.

Concernant le contre-exemple, on considère la transformation de Hilbert (éventuellement multipliée par une constante strictement positive). On sait donc, d'après le cours, qu'il existe un opérateur T vérifiant toutes les hypothèses, avec $K(x) = cx^{-1}$, $c > 0$. Prenons la suite f_n définie par $f_n(x) = 1$ si $3 \leq x \leq n$, $f_n(x) = -1$ si $-3 \geq x \geq -n$, et $f_n(x) = 0$ pour toutes les autres valeurs de $x \in \mathbb{R}$. On voit que

$$a_n = 2c \int_3^n x^{-1}\,\mathrm{d}x = 2c \times (\log n - \log 3) \to \infty, \quad \text{quand } n \to \infty.$$

$\square$

Remarque. *Par le même raisonnement, on peut montrer que pour tout* $f \in L^2_{\mathrm{comp}}(\mathbb{R}^d) \cap L^\infty(\mathbb{R}^d)$ *et* toute *boule* $\widetilde{B}$ *il existe* $a = a(f, \widetilde{B}) \in \mathbb{C}$ *tel que*

$$\frac{1}{|\widetilde{B}|} \int_{\widetilde{B}} |(Tf)(x) - a|\,\mathrm{d}x \leq C\|f\|_{L^\infty},$$

autrement dit $\|Tf\|_{BMO} \leq C\|f\|_{L^\infty}$.