Introduction à l’analyse harmonique

Jacek Jendrej, CNRS et université Sorbonne Paris Nord

Cours introductif de niveau M2, septembre–octobre 2020

Table des matières

Introduction

Présentation du cours

L'objectif de ce cours est de présenter quelques résultats classiques de l'analyse de Fourier dans l'espace euclidien. Nous insisterons sur les aspects de la théorie qui trouvent des applications dans l'étude des équations aux dérivées partielles (mais ces applications ne seront présentées que de manière rudimentaire).

Après quelques rappels sur la théorie des distributions et sur la transformation de Fourier, nous aborderons la théorie générale des intégrales singulières, c'est-à-dire la théorie des opérateurs de convolution avec un noyau singulier en origine. Puis, nous étudierons la décomposition de Littlewood-Paley et en donnerons quelques applications simples en analyse fonctionnelle. Enfin, nous examinerons des propriétés des restrictions de transformées de Fourier à des hypersurfaces. Nous verrons comment ces idées permettent de décrire le caractère "dispersif" de l'équation de Schrödinger.

La majorité du cours sera consacrée aux estimations dans des espaces de Lebesgue autres que L^2. La principale utilité des estimations dans L^p pour $p \neq 2$, souvent beaucoup plus difficiles que les estimations correspondantes dans L^2, provient des applications en étude de problèmes non linéaires.

Contenu du cours

- Rappels sur la théorie des distributions et sur la transformation de Fourier.
- Principe d'incertitude, théorème de Malgrange-Ehrenpreis.
- Théorie de Calderòn-Zygmund des intégrales singulières.
- Théorie de Littlewood-Paley.
- Intégrales oscillantes, théorème de Tomas-Stein, inégalités de Strichartz.

Horaires

Lundi 8h30-10h30 (cours) et 10h30-12h30 (TD), Sophie Germain – salle 2016
Vendredi 8h45-10h45, Sophie Germain – salle 1012

Examen

Devoir à la maison

Il y a des exercices à la fin de chaque chapitre. Il y aura cinq devoirs écrits, à rendre le vendredi. **Les DM représentent 10% de la note finale.**

Notes de cours

Mises à jour au fur et à mesure de l'avancement du cours. N'hésitez pas à me signaler des erreurs, ainsi que des passages trop obscurs dans les preuves.

Liste des notations

C	constante
$C(a,b,\dots)$	constante qui dépend de $a,b,\dots$
$\alpha=(\alpha_1,\dots,\alpha_d)\in\mathbb{N}^d$	multi-indice
$\lvert\alpha\rvert:=\alpha_1+\dots+\alpha_d\in\mathbb{N}$	longueur d'un multi-indice
$x^\alpha:=\prod_{j=1}^d x_j^{\alpha_j}$	monôme
$\partial^\alpha:=\prod_{j=1}^d \partial_{x_j}^{\alpha_j}$	dérivée partielle
$\lvert x\rvert:=\sqrt{\sum_{j=1}^d (x_j)^2}$	longueur d'un vecteur réel
$\xi\cdot x:=\sum_{j=1}^d \xi_j x_j$	produit euclidien dans $\mathbb{R}^d$
$C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$	ensemble des fonctions lisses à support compact
$\mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$	espace de Schwartz complexe des fonctions test
$p_N(\phi)=p_{N,d}(\phi)$	semi-normes de $\mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$
$L^p(A)$	espace de Lebesgue (complexe) sur $A\subset\mathbb{R}^d$
$C_0(\mathbb{R}^d)$	espace des fonctions continues décroissantes à l'infini
$C_c(\mathbb{R}^d)$	espace des fonctions continues à support compact
$\mathscr{M}(\mathbb{R}^d)$	espace des mesures complexes
$H^s(\mathbb{R}^d)$	espace de Sobolev
$\dot{H}^s(\mathbb{R}^d)$	espace de Sobolev homogène
$C^{0,\alpha}(\mathbb{R}^d)$	espace de Hölder, pour $0<\alpha<1$
τ_{x_0}	translation par x_0
d_λ	dilatation
$\check{\phi}$	reflexion
$\mathscr{T}(\mathbb{R}^d)$	ensemble des fonction lisses à croissance polynômiale
$\widehat{\phi}$	transformée de Fourier
$\mathscr{F}$	transformation de Fourier
$\mathscr{F}^{-1}$	transformation de Fourier inverse
$\mathrm{e}_\xi(x):=\mathrm{e}^{2\pi i x\cdot\xi}$	fonction exponentielle
$\phi*\psi$	convolution
$\mathscr{S}'(\mathbb{R}^d)$	espace des distributions tempérées
δ_{x_0}	masse de Dirac en x_0
$B(x_0,R)$	boule de centre x_0 et de rayon R
B_R	boule de centre 0 et de rayon R
B	boule de centre 0 et de rayon 1
vp	valeur principale

$f(D)\phi := \mathscr{F}^{-1}(f\widehat{\phi})$	multiplicateur de Fourier
$(\phi \otimes \psi)(x,y) := \phi(x)\psi(y)$	produit tensoriel
K_A	noyau de A
$\langle f,g\rangle := \int_{\mathbb{R}^d} \overline{f(x)}g(x)\,\mathrm{d}x$	produit scalaire
$[A,B] := AB - BA$	commutateur de deux opérateurs
$\Omega \subset \mathbb{C}^d$	domaine
$\lvert z\rvert := \sqrt{\sum_{j=1}^d \lvert z_j\rvert^2}$	longueur d'un vecteur complexe
$w \cdot z := \sum_{j=1}^d \overline{w_j} z_j$	produit scalaire dans $\mathbb{C}^d$
$\operatorname{Re} z := (\operatorname{Re} z_1, \dots, \operatorname{Re} z_d)$	partie réelle d'un vecteur complexe
$\operatorname{Im} z := (\operatorname{Im} z_1, \dots, \operatorname{Im} z_d)$	partie imaginaire d'un vecteur complexe
$D(w,r) := \{z \in \mathbb{C}^d : \lvert z_j - w_j\rvert \leq r_j\}$	poly-disque de centre w et “multi-rayon” r
$D_r := \{z \in \mathbb{C}^d : \lvert z_j\rvert \leq r_j\}$	poly-disque de centre 0 et “multi-rayon” r
A^C	complémentaire de l'ensemble A
χ_A	fonction indicatrice de l'ensemble A
$\operatorname{supp}(f)$	support, support essentiel (en fonction du contexte)
$Q(x_0,R)$	cube de centre x_0 et d'arête de longueur R
Q_R	cube de centre 0 et d'arête de longueur R
Q	cube de centre 0 et d'arête de longueur 1
$L^2_{\mathrm{comp}}(\mathbb{R}^d)$	fonctions L^2 dont le support essentiel est borné

Chapitre 1

Transformée de Fourier dans $\mathbb{R}^d$ et distributions tempérées

La source bibliographique principale pour ce chapitre est [3, Chapter 2].

1.1 Transformation de Fourier dans l'espace de Schwartz

Si $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_d) \in \mathbb{N}^d$ est un multi-indice, alors on note sa *longueur* $|\alpha| := \alpha_1 + \ldots + \alpha_d$. Pour $x = (x_1, \ldots, x_d) \in \mathbb{R}^d$ on écrit $x^\alpha := \prod_{j=1}^d x_j^{\alpha_j}$, et $\partial^\alpha \phi := \prod_{j=1}^d \frac{\partial^{\alpha_j}\phi}{\partial x_j^{\alpha_j}}$, en supposant que la dernière expression a un sens.

Définition 1.1. On définit l'espace de Schwartz

$$\mathscr{S}(\mathbb{R}^d) := \{\phi \in C^\infty(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}) : x^\alpha \partial^\beta \phi \in L^\infty(\mathbb{R}^d) \text{ pour tout } \alpha, \beta \in \mathbb{N}^d\}.$$

On munit $\mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$ d'une topologie définie par la famille des semi-normes

$$p_{N,d}(\phi) := \sup_{|\alpha|+|\beta| \leq N} \|x^\alpha \partial^\beta \phi\|_{L^\infty}.$$

Si aucune confusion n'est possible, on écrit p_N au lieu de $p_{N,d}$.

L'espace topologique $\mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$ est métrisable, par exemple par $\delta(\phi, \psi) := \sum_{N=0}^\infty \frac{2^{-N} p_N(\phi - \psi)}{1 + p_N(\phi - \psi)}$, donc la topologie est complètement caractérisée par la convergence des suites. Pour $\phi, \phi_n \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$ on a l'équivalence

$$\lim_{n\to\infty} \phi_n = \phi \text{ au sens } \mathscr{S}(\mathbb{R}^d) \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{n\to\infty} p_N(\phi_n - \phi) = 0 \text{ pour tout } N \in \mathbb{N}.$$

Proposition 1.2. *L'espace $\mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$ est complet (c'est donc un espace de Fréchet complexe) et séparable. L'ensemble $\mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$ est dense dans $L^p(\mathbb{R}^d)$ pour tout $1 \leq p < \infty$, ainsi que dans $C_0(\mathbb{R}^d)$ (l'espace des fonctions continues $\mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$ qui tendent vers 0 quand $|x| \to \infty$).* □

Exemple 1.3. Voici quelques exemples d'opérateurs linéaires continus $\mathscr{S}(\mathbb{R}^d) \to \mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$:

(i) Pour tout $x_0 \in \mathbb{R}^d$ la *translation* τ_{x_0} est définie par $\tau_{x_0}(\phi) := x \mapsto \phi(x - x_0)$.

(ii) Pour tout $\lambda > 0$ la *dilatation* d_λ est définie par $d_\lambda(\phi) := x \mapsto \phi(x/\lambda)$.

(iii) La *réflexion* est définie par $\check{\phi} := x \mapsto \phi(-x)$.

(iv) Plus généralement, si A est une matrice inversible $d \times d$, alors l'application qui à ϕ associe $\phi \circ A$ est un opérateur continu $\mathscr{S}(\mathbb{R}^d) \to \mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$.

(v) Pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^d$ l'opérateur de la *dérivation* ∂^α associe à $\phi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$ la fonction $\partial^\alpha \phi$.

(vi) On note $\mathscr{T}(\mathbb{R}^d)$ l'ensemble des fonctions $h \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$ telles que pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^d$ il existe C_α et k_α vérifiant $|(\partial^\alpha h)(x)| \leq C_\alpha(1+|x|)^{k_\alpha}$ pour tout $x \in \mathbb{R}^d$. Si $h \in \mathscr{T}(\mathbb{R}^d)$, alors l'opérateur de multiplication qui à $\phi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$ associe $h\phi$ est continu $\mathscr{S}(\mathbb{R}^d) \to \mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$.

Définition 1.4. Soit $\phi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$. La *transformée de Fourier* de ϕ, notée $\widehat{\phi} : \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$, est définie par

$$\widehat{\phi}(\xi) := \int_{\mathbb{R}^d} \mathrm{e}^{-2\pi i x\cdot\xi} \phi(x)\,\mathrm{d}x, \qquad \text{pour tout } \xi \in \mathbb{R}^d.$$

On pose $\mathscr{F}\phi := \widehat{\phi}$ et on appelle $\mathscr{F}$ la *transformation de Fourier*.

Notation. Dans ce chapitre, il sera parfois commode d'écrire $\mathrm{e}_\xi(x) := \mathrm{e}^{2\pi i x\cdot\xi}$. Clairement, $\mathrm{e}_\xi \in \mathscr{T}(\mathbb{R}^d)$ pour tout $\xi \in \mathbb{R}^d$.

Proposition 1.5. *La transformation de Fourier sur $\mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$ a les propriétés suivantes :*

(i) $\mathscr{F}(\partial^\alpha\phi) = (2\pi i)^{|\alpha|}\xi^\alpha\widehat{\phi}$, *pour tout* $\phi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$ *et* $\alpha \in \mathbb{N}^d$,

(ii) $\partial^\alpha\widehat{\phi} = (-2\pi i)^{|\alpha|}\mathscr{F}(x^\alpha\phi)$, *pour tout* $\phi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$ *et* $\alpha \in \mathbb{N}^d$,

(iii) $\mathscr{F}(\tau_{x_0}\phi) = \mathrm{e}_{-x_0}\widehat{\phi}$, *pour tout* $\phi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$ *et* $x_0 \in \mathbb{R}^d$,

(iv) $\mathscr{F}(\mathrm{e}_{\xi_0}\phi) = \tau_{\xi_0}\widehat{\phi}$, *pour tout* $\phi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$ *et* $\omega \in \mathbb{R}^d$,

(v) $\mathscr{F}(d_\lambda\phi) = \lambda^d d_{\lambda^{-1}}\widehat{\phi}$, *pour tout* $\phi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$ *et* $\lambda > 0$,

(vi) $\mathscr{F}(\check{\phi}) = (\widehat{\phi})^\vee$, *pour tout* $\phi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$,

(vii) $\mathscr{F}(\phi\circ A) = |\det A|^{-1}\widehat{\phi}\circ(A^{-1})^t$, *pour tout* $\phi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$ *et A une matrice inversible* $d \times d$.

Démonstration. Vérifions par exemple (vii). Pour tout $\xi \in \mathbb{R}^d$ on a, avec le changement de variable $y = Ax$,

$$\mathscr{F}(\phi\circ A)(\xi) = \int_{\mathbb{R}^d} \mathrm{e}^{-2\pi i x\cdot\xi}\phi(A(x))\,\mathrm{d}x = |\det A|^{-1}\int_{\mathbb{R}^d} \mathrm{e}^{-2\pi i y\cdot(A^{-1})^t\xi}\phi(y)\,\mathrm{d}y = |\det A|^{-1}\widehat{\phi}((A^{-1})^t\xi).$$

$\square$

Définition 1.6. Si $\phi, \psi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$, alors leur *convolution* est définie par la formule

$$(\phi * \psi)(y) := \int_{\mathbb{R}^d} \phi(y-x)\psi(x)\,\mathrm{d}x, \qquad \text{pour tout } y \in \mathbb{R}^d.$$

Il est facile de vérifier que $\phi * \psi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$ et qu'on a les relations $\widehat{\phi * \psi} = \widehat{\phi}\widehat{\psi}$, $\widehat{\phi\psi} = \widehat{\phi} * \widehat{\psi}$, $\partial^\alpha(\phi * \psi) = (\partial^\alpha\phi) * \psi$ etc.

Théorème 1.7. *(i) L'application $\mathscr{F}$ est un automorphisme de $\mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$, d'inverse*

$$\mathscr{F}^{-1}\psi(x) = \int_{\mathbb{R}^d} \mathrm{e}^{2\pi i x\cdot\xi}\psi(\xi)\,\mathrm{d}\xi, \qquad \textit{pour tout } x \in \mathbb{R}^d.$$

(ii) Pour tous $\phi, \psi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$ la formule de Plancherel *est vraie :*

$$\int_{\mathbb{R}^d} \overline{\widehat{\phi}(\xi)}\widehat{\psi}(\xi)\,\mathrm{d}\xi = \int_{\mathbb{R}^d} \overline{\phi(x)}\psi(x)\,\mathrm{d}x. \tag{1.1}$$

Démonstration. Voir des textes standard sur la transformation de Fourier ou [2]. Rappelons que la preuve habituelle de (i) repose sur l'identité

$$\widehat{\mathrm{e}^{-\pi|x|^2}}(\xi) = e^{-\pi|\xi|^2} \quad \Rightarrow \quad \widehat{\Gamma_\epsilon}(\xi) = \mathrm{e}^{-\pi\epsilon^2|\xi|^2}, \quad \text{où } \Gamma_\epsilon(x) := \epsilon^{-d}\mathrm{e}^{-\pi\epsilon^{-2}|x|^2}.$$

On trouve $(\Gamma_\epsilon * f)(x) = \int_{\mathbb{R}^d} \mathrm{e}^{2\pi i x\cdot\xi}\mathrm{e}^{-\pi\epsilon^2|\xi|^2}\widehat{f}(\xi)\,\mathrm{d}\xi$ et on passe à la limite $\epsilon \to 0$, en utilisant le fait que Γ_ϵ est une approximation de l'identité. □

Remarque 1.8. Souvent on définit la transformée de Fourier par $(\mathscr{F}\phi)(\xi) = \int_{\mathbb{R}^d} \mathrm{e}^{-ix\cdot\xi}\phi(x)\,\mathrm{d}x$, ce qui conduit à $(\mathscr{F}^{-1}\psi)(x) = (2\pi)^{-d}\int_{\mathbb{R}^d} \mathrm{e}^{ix\cdot\xi}\psi(\xi)\,\mathrm{d}\xi$ et $\int_{\mathbb{R}^d} \overline{\widehat{\phi}(\xi)}\widehat{\psi}(\xi)\,\mathrm{d}\xi = (2\pi)^d\int_{\mathbb{R}^d} \overline{\phi(x)}\psi(x)\,\mathrm{d}x$. Un autre choix fréquent est $(\mathscr{F}\phi)(\xi) = (2\pi)^{-\frac{d}{2}}\int_{\mathbb{R}^d} \mathrm{e}^{-ix\cdot\xi}\phi(x)\,\mathrm{d}x$, auquel cas $(\mathscr{F}^{-1}\psi)(x) = (2\pi)^{-\frac{d}{2}}\int_{\mathbb{R}^d} \mathrm{e}^{ix\cdot\xi}\psi(\xi)\,\mathrm{d}\xi$ et $\int_{\mathbb{R}^d} \overline{\widehat{\phi}(\xi)}\widehat{\psi}(\xi)\,\mathrm{d}\xi = \int_{\mathbb{R}^d} \overline{\phi(x)}\psi(x)\,\mathrm{d}x$.

Remarque 1.9. Souvent on note $\check{\phi}$ la transormée de Fourier inverse de ϕ. Dans ces notes, $\check{\phi}$ est toujours la reflexion et $\mathscr{F}^{-1}\phi$ la transformée de Fourier inverse.

Remarque 1.10. Notons que $\mathscr{F}(\widehat{\phi}) = \check{\phi}$ pour tout $\phi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$. En effet, on voit que pour tout $\psi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$, on a $(\mathscr{F}^{-1}\psi)(-x) = (\mathscr{F}\psi)(x)$, et on pose $\psi = \widehat{\phi}$.

1.2 Distributions tempérées

Définition 1.11. On note $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^d)$ l'espace dual de $\mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$, c'est à dire l'espace des applications $\mathbb{C}$-linéaires continues $u : \mathscr{S}(\mathbb{R}^d) \to \mathbb{C}$. Concernant la topologie, on se servira uniquement de la notion de la convergence de suites :

$$u_n \to u \text{ au sens } \mathscr{S}'(\mathbb{R}^d) \quad \Leftrightarrow \quad u_n(\phi) \to u(\phi) \text{ pour tout } \phi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d).$$

Remarque 1.12. Traditionnellement, on note $\langle u, \phi\rangle := u(\phi)$ pour $u \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^d)$ et $\phi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$. Dans ce chapitre, on privilégie la notation $u(\phi)$, mais plus tard on utilisera souvent la notation traditionnelle.

Proposition 1.13. *Pour tout $u \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^d)$ il existe $N \in \mathbb{N}$ et $C > 0$ tels que $|u(\phi)| \le Cp_N(\phi)$ pour tout $\phi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$.*

Démonstration. Supposons le contraire. Alors pour tout $N \in \mathbb{N}$ il existe $\phi_N \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$ tel que $p_N(\phi_N) \le \frac{1}{N}$ et $|u(\phi_N)| \ge 1$. Cela signifie que $\phi_N \to 0$ dans $\mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$ mais $u(\phi_N) \nrightarrow 0$, donc $u \notin \mathscr{S}'(\mathbb{R}^d)$. □

On a aussi un résultat de type Banach-Steinhaus :

Proposition 1.14. *Si $\mathscr{U} \subset \mathscr{S}'(\mathbb{R}^d)$ une famille de distributions telle que $\sup_{u\in\mathscr{U}} |u(\phi)| < \infty$ pour tout $\phi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$, alors il existe $N \in \mathbb{N}$ et $C > 0$ tels que $|u(\phi)| \le C p_N(\phi)$ pour tout $u \in \mathscr{U}$ et $\phi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$.*

Démonstration. Pour tout $m \in \{1,2,\dots\}$, soit

$$A_m := \{\phi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d) : |u(\phi)| \le m \text{ pour tout } u \in \mathscr{U}\}.$$

Alors $A_m \subset \mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$ est un ensemble fermé. Par l'hypothèse, $\cup_{m=1}^{\infty} A_m = \mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$, donc le théorème de Baire implique qu'il existe m tel que A_m a l'intérieur non vide. Autrement dit, il existe $\phi_0 \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$, $N \in \mathbb{N}$ et $\epsilon > 0$ tels que

$$p_N(\phi - \phi_0) \le \epsilon \quad \Rightarrow \quad \phi \in A_m. \tag{1.2}$$

Comme A_m est un ensemble symétrique par rapport à l'origine,

$$p_N(\phi + \phi_0) \le \epsilon \quad \Rightarrow \quad p_N(-\phi - \phi_0) \le \epsilon \quad \Rightarrow \quad -\phi \in A_m \quad \Rightarrow \quad \phi \in A_m. \tag{1.3}$$

Soit $\psi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$ et $p_N(\psi) \le \epsilon$, et écrivons $\psi = \frac{1}{2}((\psi + \phi_0) + (\psi - \phi_0))$. De (1.2) et (1.3) on déduit que $\psi + \phi_0 \in A_m$ et $\psi - \phi_0 \in A_m$. Comme A_m est un ensemble convexe, il s'ensuit que $\psi \in A_m$, ce qui prouve le résultat avec $C := m\epsilon^{-1}$. □

Corollaire 1.15. *Si $u_n \to u_0$ dans $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^d)$ et $\phi_n \to \phi_0$ dans $\mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$, alors $u_n(\phi_n) \to u_0(\phi_0)$.*

Démonstration. Soit N et C tels que $|u_n(\phi)| \le C p_N(\phi)$ pour tout n et $\phi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$. Observons que

$$u_n(\phi_n) = u_0(\phi_0) + (u_n - u_0)(\phi_0) + u_n(\phi_n - \phi_0).$$

Comme $\lim_{n\to\infty} p_N(\phi_n - \phi_0) = 0$, il est clair que $u_n(\phi_n - \phi_0) \to 0$. Mais aussi $(u_n - u_0)(\phi_0) \to 0$, par la définition de la convergence dans $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^d)$. □

Exemple 1.16. Voici quelques exemples de distributions tempérées qu'on rencontre souvent.

(i) Si $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^d)$ et il existe k tel que $(1+|x|)^{-k} f(x) \in L^1(\mathbb{R}^d)$, alors on définit $T_f \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^d)$ par la formule $T_f(\phi) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x)\phi(x)\,\mathrm{d}x$. Notons l'absence du conjugé complexe. Souvent on écrit f au lieu de T_f. On a en particulier $\mathscr{S}(\mathbb{R}^d) \subset \mathscr{S}'(\mathbb{R}^d)$. On peut montrer que $T_f = 0$ au sens $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^d)$ implique $f = 0$ presque partout.

(ii) La distribution "delta de Dirac" en $x_0 \in \mathbb{R}^d$, notée δ_{x_0}, est définie par $\delta_{x_0}(\phi) = \phi(x_0)$.

(iii) Plus généralement, à toute mesure complexe $\mu \in \mathscr{M}(\mathbb{R}^d)$ on associe la distribution tempérée $T_\mu \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^d)$ définie par la formule $T_\mu(\phi) = \int_{\mathbb{R}^d} \phi(x)\mu(\mathrm{d}x)$. Souvent on écrit μ au lieu de T_μ.

(iv) Aussi, toute mesure de Radon (positive) telle que $\mu(B(0,R)) \le (1+R)^N$ définit une distribution tempérée.

(v) Un exemple d'une distribution tempérée qui n'est pas une mesure est donnée par la *valeur principale* de $\frac{1}{x}$, notée $\mathrm{vp}\big(\frac{1}{x}\big)$ et définie par

$$\Big(\mathrm{vp}\Big(\frac{1}{x}\Big)\Big)(\phi) = \lim_{\epsilon\to 0^+} \int_{|x|>\epsilon} \frac{\phi(x)}{x}\,\mathrm{d}x, \qquad \text{pour tout } \phi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}). \tag{1.4}$$

Remarque 1.17. Dans (iii) et (iv), le théorème de représentation de Riesz-Markov implique que l'application $\mu \mapsto T_\mu$ est une injection, c'est-à-dire deux mesures différentes ne peuvent pas définir la même distribution.

Définition 1.18. Pour tout opérateur continu $T : \mathscr{S}(\mathbb{R}^d) \to \mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$ on définit un opérateur continu $T^t : \mathscr{S}'(\mathbb{R}^d) \to \mathscr{S}'(\mathbb{R}^d)$ par la formule $(T^t u)(\phi) = u(T\phi)$.

Exemple 1.19. En utilisant ce principe, on peut définir plusieurs opérations sur les distributions.

(i) Pour tout $x_0 \in \mathbb{R}^d$ et $u \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^d)$ on pose $(\tau_{x_0} u)(\phi) := u(\tau_{-x_0}\phi)$.

(ii) Pour tout $\lambda > 0$ et $u \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^d)$ on pose $(d_\lambda u)(\phi) := \lambda^d u(d_{\lambda^{-1}}\phi)$.

(iii) La reflexion de $u \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^d)$ est définie par $\check{u}(\phi) := u(\check{\phi})$.

(iv) Si A est une matrice inversible, alors $(u \circ A)(\phi) := |\det A|^{-1}\, u(\phi \circ A^{-1})$.

(v) Pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^d$ on définit $(\partial^\alpha u)(\phi) := (-1)^{|\alpha|} u(\partial^\alpha \phi)$.

(vi) Si $h \in \mathscr{T}(\mathbb{R}^d)$, alors on définit $(hu)(\phi) := u(h\phi)$.

(vii) Pour tout $u \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^d)$, sa transformée de Fourier $\mathscr{F}u = \widehat{u} \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^d)$ est définie par la condition $\widehat{u}(\phi) := u(\widehat{\phi})$.

Il faut comprendre ces définitions de la manière suivante. On sait que τ_{-x_0} est un opérateur continu $\mathscr{S}(\mathbb{R}^d) \to \mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$. On lui associe l'opérateur $(\tau_{-x_0})^t : \mathscr{S}'(\mathbb{R}^d) \to \mathscr{S}'(\mathbb{R}^d)$. Il est facile de vérifier que $(\tau_{-x_0})^t u = \tau_{x_0} u$ si $u \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$. Pour cette raison, on écrit τ_{x_0} au lieu de $(\tau_{-x_0})^t$, et de même pour les autres opérations. Pour la transformée de Fourier par exemple, soit $f, \phi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$, et $g \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$ définie par la condition $\phi(\xi) = \overline{\widehat{g}(\xi)}$. Alors $\overline{\phi(\xi)} = \widehat{g}(\xi)$, donc $g(x) = \int_{\mathbb{R}^d} \mathrm{e}^{2\pi i\xi\cdot x}\overline{\phi(\xi)}\,\mathrm{d}\xi$ et $\overline{g(x)} = \int_{\mathbb{R}^d} \mathrm{e}^{-2\pi i \xi\cdot x}\phi(\xi)\,\mathrm{d}\xi = \widehat{\phi}(x)$, et on obtient

$$\widehat{f}(\phi) = \int_{\mathbb{R}^d} \widehat{f}(\xi)\phi(\xi)\,\mathrm{d}\xi = \int_{\mathbb{R}^d} \overline{\widehat{g}(\xi)}\widehat{f}(\xi)\,\mathrm{d}\xi = \int_{\mathbb{R}^d} \overline{g(x)}f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^d} \widehat{\phi}(x)f(x)\,\mathrm{d}x = f(\widehat{\phi}).$$

Proposition 1.20. *La transformation de Fourier $\mathscr{F}$ est un automorphisme de $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^d)$.*

Démonstration. C'est une conséquence du Théorème 1.7. On a $(\mathscr{F}^{-1}v)(\psi) = v(\mathscr{F}^{-1}\psi)$. □

Proposition 1.21. *La transformation de Fourier sur $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^d)$ a les propriétés suivantes :*

(i) $\mathscr{F}(\partial^\alpha u) = (2\pi i)^{|\alpha|}\xi^\alpha \widehat{u}$, *pour tout* $u \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^d)$ *et* $\alpha \in \mathbb{N}^d$,

(ii) $\partial^\alpha \widehat{u} = (-2\pi i)^{|\alpha|}\mathscr{F}(x^\alpha u)$, *pour tout* $u \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^d)$ *et* $\alpha \in \mathbb{N}^d$,

(iii) $\mathscr{F}(\tau_{x_0} u) = \mathrm{e}_{-x_0}\widehat{u}$, *pour tout* $u \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^d)$ *et* $x_0 \in \mathbb{R}^d$,

(iv) $\mathscr{F}(\mathrm{e}_{\xi_0} u) = \tau_{\xi_0}\widehat{u}$, *pour tout* $u \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^d)$ *et* $\omega \in \mathbb{R}^d$,

(v) $\mathscr{F}(d_\lambda u) = \lambda^d d_{\lambda^{-1}}\widehat{u}$, *pour tout* $u \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^d)$ *et* $\lambda > 0$,

(vi) $\mathscr{F}(\check{u}) = (\widehat{u})^\vee$, *pour tout* $u \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^d)$,

(vii) $\mathscr{F}(u \circ A) = |\det A|^{-1}\widehat{u} \circ (A^{-1})^t$, *pour tout* $u \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^d)$ *et A une matrice inversible* $d \times d$.

Démonstration. Toutes les propriétés sont obtenues facilement à partir des propriétés correspondantes pour les fonctions test. Par exemple pour (vii), on a pour tout $\phi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$

$$\begin{aligned}(\mathscr{F}(u \circ A))(\phi) &= (u \circ A)(\widehat{\phi}) = |\det A|^{-1} u(\widehat{\phi} \circ A^{-1}) = u(|\det A|^{-1}\widehat{\phi} \circ A^{-1}) = u(\mathscr{F}(\phi \circ A^t)) \\ &= \widehat{u}(\phi \circ A^t) = |\det A|^{-1}(\widehat{u} \circ (A^{-1})^t)(\phi).\end{aligned}$$

□

Remarque 1.22. Si $u \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^d)$ et $\phi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$, alors $(\mathscr{F}\widehat{u})(\phi) = (\widehat{u})(\widehat{\phi}) = u(\mathscr{F}(\widehat{\phi})) = u(\check{\phi}) = \check{u}(\phi)$.

Proposition 1.23. *Si $u \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^d)$ est une mesure complexe, c'est-à-dire il existe $\mu \in \mathscr{M}(\mathbb{R}^d)$ telle que, pour tout $\phi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$, $u(\phi) = \int_{\mathbb{R}^d} \phi(x)\mu(\,\mathrm{d}x)$, alors sa transformée de Fourier est une fonction continue donnée par*

$$\widehat{\mu}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^d} \mathrm{e}^{-2\pi i x\cdot\xi}\mu(\mathrm{d}x), \qquad \textit{pour tout } \xi \in \mathbb{R}^d.$$

Démonstration. Il faut vérifier que pour tout $\psi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$ on a $\widehat{u}(\psi) = \int_{\mathbb{R}^d} \widehat{\mu}(\xi)\psi(\xi)\,\mathrm{d}\xi$. Par Fubini,

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^d} \widehat{\mu}(\xi)\psi(\xi)\,\mathrm{d}\xi &= \int_{\mathbb{R}^d}\Big(\int_{\mathbb{R}^d} \mathrm{e}^{-2\pi i x\cdot\xi}\mu(\mathrm{d}x)\Big)\psi(\xi)\,\mathrm{d}\xi = \int_{\mathbb{R}^d}\Big(\int_{\mathbb{R}^d} \mathrm{e}^{-2\pi i x\cdot\xi}\psi(\xi)\,\mathrm{d}\xi\Big)\mu(\mathrm{d}x) \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} \widehat{\psi}(x)\mu(\mathrm{d}x) = u(\widehat{\psi}) = \widehat{u}(\psi).\end{aligned}$$

□

Définition 1.24. (i) Pour tout $s \in \mathbb{R}$ on définit *l'espace de Sobolev* $H^s(\mathbb{R}^d) := \{u \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^d) : \|u\|_{H^s} < \infty\}$, où $\|u\|_{H^s} := \|(1+|\xi|^2)^{\frac{s}{2}}\widehat{u}(\xi)\|_{L^2}$.

(ii) Pour tout $s < \frac{d}{2}$ on définit *l'espace de Sobolev homogène* $\dot{H}^s(\mathbb{R}^d) := \{u \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^d) : \|u\|_{\dot{H}^s} < \infty\}$, où $\|u\|_{\dot{H}^s} := \||\xi|^s\widehat{u}(\xi)\|_{L^2}$.

Ce sont des espaces complets (pour $H^s(\mathbb{R}^d)$, voir l'Exercice 1.6 ; pour $\dot{H}^s(\mathbb{R}^d)$, on y reviendra).

1.3 Convolutions de distributions tempérées

On aura besoin de savoir que les sommes de Riemann de l'intégrale définissant $\phi * \psi$ convergent dans $\mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$. Pour être plus précis, pour tout $m \in \mathbb{N}$ posons

$$D_m := \{(z_1, \ldots, z_d) : 2^m z_j \in \mathbb{Z} \text{ et } -2^m \leq z_j < 2^m\}.$$

Lemme 1.25. *Soit $\phi, \psi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$. Pour tout $m \in \mathbb{N}$, soit*

$$\zeta_m(y) := 2^{-md}\sum_{x\in D_m}\phi(y-z)\psi(z).$$

Alors $\lim_{m\to\infty}\zeta_m = \phi * \psi$ *au sens* $\mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$.

Démonstration. Il suffit de montrer que pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^d$ on a $\lim_{m\to\infty}\|y^\alpha(\zeta_m - \phi * \psi)\|_{L^\infty} = 0$. En effet, $\partial^\beta\zeta_m$ est obtenu par la même formule que ζ_m, avec ϕ remplacé par $\partial^\beta\phi$.

On écrit $0 \leq \gamma \leq \alpha$ si $0 \leq \gamma_j \leq \alpha_j$ pour tout j. On a la formule de Newton $y^\alpha = \sum_{0\leq\gamma\leq\alpha} c_\gamma(y-x)^\gamma x^{\alpha-\gamma}$, donc il suffit de montrer que pour tout $0 \leq \gamma \leq \alpha$

$$\lim_{m\to\infty}\Big\|2^{-md}\sum_{z\in D_m}(y-z)^\gamma\phi(y-z)z^{\alpha-\gamma}\psi(z) - \int_{\mathbb{R}^d}(y-x)^\gamma\phi(y-x)x^{\alpha-\gamma}\psi(x)\,\mathrm{d}x\Big\|_{L^\infty} = 0.$$

En remplaçant $x^\gamma\phi(x)$ par $\phi(x)$ et $x^{\alpha-\gamma}\psi(x)$ par $\psi(x)$, qui sont tout aussi bien des fonctions de classe $\mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$, on se ramène au cas $\gamma=\alpha=0$. Il faut donc montrer que pour tout $\phi,\psi\in\mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$ on a la convergence

$$\lim_{m\to\infty}\Big\|2^{-md}\sum_{z\in D_m}\phi(y-z)\psi(z)-\int_{\mathbb{R}^d}\phi(y-x)\psi(x)\,\mathrm{d}x\Big\|_{L^\infty}=0,$$

ce qu'on laisse au Lecteur. □

Définition 1.26. Soit $u\in\mathscr{S}'(\mathbb{R}^d)$ et $\phi\in\mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$. On définit la *convolution* $u*\phi$ par la formule

$$(\phi*u)(x)=(u*\phi)(x):=u(y\mapsto\phi(x-y))=u(\tau_x\check{\phi}).$$

Proposition 1.27. *Si $u\in\mathscr{S}'(\mathbb{R}^d)$ et $\phi\in\mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$, alors $u*\phi\in\mathscr{T}(\mathbb{R}^d)$ (pour rappel, cela signifie que c'est une fonction à croissance polynômiale, ainsi que toutes ses dérivées). De plus, $\widehat{u*\phi}=\widehat{u}\widehat{\phi}$ et $\widehat{u}*\widehat{\phi}=\widehat{u\phi}$ au sens $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^d)$.*

Démonstration. Notons d'abord que l'application $x\mapsto\tau_x\check{\phi}$ est continue $\mathbb{R}^d\to\mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$, donc $u*\phi$ est une fonction continue. On va montrer que $\partial_{x_j}(u*\phi)(x)=(u*(\partial_{x_j}\phi))(x)$ pour tout $x\in\mathbb{R}^d$ et $j\in\{1,\dots,d\}$. Par récurrence, cela prouvera que $u*\phi\in C^\infty(\mathbb{R}^d)$ et $\partial^\alpha(u*\phi)(x)=(u*(\partial^\alpha\phi))(x)$ pour tout $x\in\mathbb{R}^d$ et $\alpha\in\mathbb{N}^d$. Fixons x et j. Pour tout $h\neq0$ on a

$$\frac{(u*\phi)(x+he_j)-(u*\phi)(x)}{h}=u\Big(y\mapsto\frac{1}{h}\big(\phi(x+he_j-y)-\phi(x-y)\big)\Big). \tag{1.5}$$

Quand $h\to0$, $y\mapsto\frac{1}{h}\big(\phi(x+he_j-y)-\phi(x-y)\big)$ converge dans $\mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$ vers $y\mapsto\partial_{x_j}\phi(x-y)$, donc le membre de gauche de (1.5) converge vers $(u*\partial_{x_j}\phi)(x)$ quand $h\to0$.

Soit $N\in\mathbb{N}$ donné par la Proposition 1.13. Par la définition de la norme p_N et en utilisant l'inégalité $|y|^N\lesssim|x|^N+|y-x|^N$, il existe $C\geq0$ tel que $p_N(\tau_x\check{\phi})\leq C(1+|x|)^N$ pour tout $x\in\mathbb{R}^d$. Cela montre que $u*\phi$ est à croissance polynômiale.

On va enfin montrer que $\widehat{u*\phi}=\widehat{u}*\widehat{\phi}$, la formule $\widehat{u}*\widehat{\phi}=\widehat{u\phi}$ étant la même chose pour la transformation de Fourier inverse. Soit $\psi\in\mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$. Par les définitions,

$$\widehat{u*\phi}(\psi)=(u*\phi)(\widehat{\psi})=\int_{\mathbb{R}^d}u(\tau_x\check{\phi})\widehat{\psi}(x)\,\mathrm{d}x.$$

La fonction $x\mapsto u(\tau_x\check{\phi})$ est continue, à croissance polynômiale, et $\widehat{\psi}\in\mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$, donc $u(\tau_x\check{\phi})\widehat{\psi}(x)$ est une fonction continue à décroissance rapide, ce qui implique que

$$\int_{\mathbb{R}^d}u(\tau_x\check{\phi})\widehat{\psi}(x)\,\mathrm{d}x=\lim_{m\to\infty}2^{-md}\sum_{x\in D_m}u(\tau_x\check{\phi})\widehat{\psi}(x)=\lim_{m\to\infty}u\Big(2^{-md}\sum_{x\in D_m}(\tau_x\check{\phi})\widehat{\psi}(x)\Big).$$

Par le Lemme 1.25, cette limite est égale à

$$u(\check{\phi}*\widehat{\psi})=u(\mathscr{F}(\widehat{\phi}\psi))=\widehat{u}(\widehat{\phi}\psi)=(\widehat{u}\widehat{\phi})(\psi).$$

□

Corollaire 1.28. *Si $v\in\mathscr{S}'(\mathbb{R}^d)$ est une distribution telle que $\widehat{v}\in\mathscr{T}(\mathbb{R}^d)$, alors l'application qui à $\phi\in\mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$ associe $v*\phi\in\mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$ est un opérateur continu de $\mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$ dans lui-même.*

Démonstration. C'est une conséquence du Théorème 1.7 (i) combiné avec l'Exemple 1.3 (vi). $\square$

Définition 1.29. Soit $v \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^d)$ une distribution telle que $\widehat{v} \in \mathscr{T}(\mathbb{R}^d)$ et $u \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^d)$. On définit $u * v = v * u \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^d)$ par la condition $(u * v)(\phi) = u(\check{v} * \phi)$ pour tout $\phi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$.

Remarque 1.30. La dernière condition définit bien un élément de $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^d)$, car $\phi \mapsto \check{v} * \phi$ est continu $\mathscr{S}(\mathbb{R}^d) \to \mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$, donc $\phi \mapsto u(\check{v} * \phi)$ est continu $\mathscr{S}(\mathbb{R}^d) \to \mathbb{C}$.

Proposition 1.31. *Si $u, v \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^d)$ et $\widehat{v} \in \mathscr{T}(\mathbb{R}^d)$, alors $\widehat{u * v} = \widehat{u}\widehat{v}$ au sens $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^d)$. Si $u \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^d)$ et $v \in \mathscr{T}(\mathbb{R}^d)$, alors $\widehat{uv} = \widehat{u} * \widehat{v}$.*

Démonstration. On montre la première affirmation, la deuxième étant la même que la première, mais pour $\mathscr{F}^{-1}$ au lieu de $\mathscr{F}$. On a

$$\begin{aligned}\widehat{u * v}(\phi) &= (u * v)(\widehat{\phi}) = u(\check{v} * \widehat{\phi}),\\ (\widehat{u}\widehat{v})(\phi) &= \widehat{u}(\widehat{v}\phi) = u(\mathscr{F}(\widehat{v}\phi)) = u(\mathscr{F}(\widehat{v}) * \widehat{\phi}),\end{aligned}$$

où la dernière égalité résulte de la Proposition 1.27. La Remarque 1.22 termine la preuve. $\square$

Corollaire 1.32. *Si $v \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$, alors la Définition 1.29 coincide avec la Définition 1.26.*

Démonstration. La transformée de Fourier de $u * v$ dans les deux cas est la même. $\square$

Définition 1.33. Soit $f \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^d)$. On définit l'opérateur $f(D) : \mathscr{S}(\mathbb{R}^d) \to \mathscr{S}'(\mathbb{R}^d)$ par la formule

$$f(D)\phi := \mathscr{F}^{-1}(f\widehat{\phi}) = (\mathscr{F}^{-1}f) * \phi.$$

Si $f \in \mathscr{T}(\mathbb{R}^d)$, alors cet opérateur se prolonge un opérateur continu $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^d) \to \mathscr{S}'(\mathbb{R}^d)$, qu'on note également $f(D)$.

On appelle ces opérateurs les *multiplicateurs de Fourier*.

Remarque 1.34. Comme on le sait déjà, si $f \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^d)$ et $\phi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$, alors $f(D)\phi \in \mathscr{T}(\mathbb{R}^d)$.

Exemple 1.35. Si $f(\xi) = \xi_j$, on note $f(D) = D_j$. On voit que $2\pi i D_j = \partial_{x_j}$.

1.4 Transformées de Fourier des distributions à support compact

Soit $u \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^d)$ à support dans $B_R := \{x \in \mathbb{R}^d : |x| \leq R\}$. Par définition, cela signifie que $\phi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$ et $\phi(x) = 0$ pour tout $x \in B_R$ implique $u(\phi) = 0$. Soit $\chi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$ telle que $\chi(x) = 1$ pour tout $x \in B_R$. On a alors $\chi v = v$ au sens $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^d)$, donc par la Proposition 1.27

$$\widehat{u} = \widehat{\chi u} = \widehat{\chi} * \widehat{u} \in \mathscr{T}(\mathbb{R}^d).$$

En particulier, la convolution d'une distribution tempérée avec une distribution à support compact est une distribution tempérée bien définie.

Soit $\xi \in \mathbb{R}^d$. En invoquant la Définition 1.26 et les propriétés de $\mathscr{F}$ qu'on connait déjà, on peut écrire

$$\widehat{u}(\xi) = \widehat{u}(\tau_\xi(\widehat{\chi})^\vee) = u(\mathscr{F}(\tau_\xi(\widehat{\chi})^\vee)) = u(\mathrm{e}_{-\xi}\mathscr{F}((\widehat{\chi})^\vee)) = u(\mathrm{e}_{-\xi}(\mathscr{F}(\widehat{\chi}))^\vee) = u(\mathrm{e}_{-\xi}\chi), \tag{1.6}$$

un résultat qui ne devrait pas surprendre (comparons au cas où u est une fonction lisse, voir aussi Proposition 1.23).

Le reste de la Section 1.4 est facultatif et ne sera pas présenté en cours. La dernière formule permet de définir $\widehat{u}(\xi)$ pour tout $\xi \in \mathbb{C}^d$.

Proposition 1.36. *Si $u \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^d)$ est à support dans B_R, alors $\widehat{u}$ est une fonction entière, et il existe $C \geq 0$ et $N \in \mathbb{N}$ tels que*

$$|\widehat{u}(\xi)| \leq C(1+|\xi|^N)\mathrm{e}^{2\pi R|\mathrm{Im}\,\xi|}, \qquad \textit{pour tout } \xi \in \mathbb{C}^d. \tag{1.7}$$

Démonstration. En utilisant le développement de la fonction exponentielle en série, pour tout $\xi \in \mathbb{C}^d$ et $x \in \mathbb{R}^d$ on écrit

$$\mathrm{e}_{-\xi}(x)\chi(x) = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^d} \frac{(-2\pi i)^{|\alpha|} x^\alpha \chi(x)}{\alpha!} \xi^\alpha.$$

On vérifie facilement que la série converge dans $\mathscr{S}(\mathbb{R}^d_x)$, donc on obtient le développement en une série absolument convergente

$$\widehat{u}(\xi) = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^d} a_\alpha \xi^\alpha, \qquad a_\alpha := u\left(\frac{(-2\pi i)^{|\alpha|} x^\alpha \chi}{\alpha!}\right),$$

ce qui prouve que $\widehat{u}$ est une fonction entière, voir le chapitre suivant.

L'estimation (1.7) sera démontrée dans l'Exercice 1.17. □

Un résulat classique d'analyse harmonique affirme que le réciproque de la Proposition 1.36 est également vrai.

Théorème 1.37 (Paley-Wiener-Schwartz)**.** *Si $F : \mathbb{C}^d \to \mathbb{C}$ est une fonction entière vérifiant* (1.7)*, alors il existe $u \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^d)$ à support dans B_R tel que $F = \widehat{u}$.* □

1.5 Théorème des noyaux

Dans ce cours, on s'intéressera aux propriétés de certaines applications linéaires entre deux espaces fonctionnels. Il est important de savoir que de telles applications peuvent être représentées par leur *noyaux*. On introduit d'abord la notation suivante.

Définition 1.38. Pour $\phi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$ et $\psi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^l)$, la fonction $\phi \otimes \psi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^{d+l})$ est définie par

$$(\phi \otimes \psi)(x, y) := \phi(x)\psi(y), \qquad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}^d \text{ et } y \in \mathbb{R}^l.$$

Proposition 1.39. *L'ensemble des* fonctions tensorielles*, c'est à dire de fonctions $\zeta \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^{d+l})$ de la forme*

$$\zeta = \sum_{j=1}^m \phi_j \otimes \psi_j, \qquad \phi_j \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d),\ \psi_j \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^l),$$

est dense dans $\mathscr{S}(\mathbb{R}^{d+l})$.

Démonstration. Voir Exercice 1.16 plus bas. □

Théorème 1.40 (Théorème des noyaux de Schwartz)**.** *Si $T : \mathscr{S}(\mathbb{R}^d) \to \mathscr{S}'(\mathbb{R}^l)$ une application linéaire continue, alors il existe l'unique distribution $K_T \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^{d+l})$, appelée le* noyau *de l'application T, telle que*

$$(T\phi)(\psi) = K_T(\phi \otimes \psi), \qquad \textit{pour tout } \phi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d) \textit{ et } \psi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^l). \tag{1.8}$$

Inversement, pour tout $K_T \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^{d+l})$, la relation (1.8) *définit une application linéaire continue $T : \mathscr{S}(\mathbb{R}^d) \to \mathscr{S}'(\mathbb{R}^l)$.*

Remarque 1.41. La continuité de T signifie, par définition, que $\phi_n \to 0$ dans la topologie $\mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$ implique $T\phi_n \to 0$ au sens $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^l)$.

Démonstration. (d'après les notes de cours de R. Melrose [5], **facultatif**)
Étape 0. L'unicité est une conséquence de la Proposition 1.39. La dernière affirmation est également facile à démontrer.
Étape 1. Supposons d'abord que T se prolonge en une application continue $T : H^{-d}(\mathbb{R}^d) \to H^l(\mathbb{R}^l)$. En particulier, $x \mapsto T\delta_x$ est une fonction bornée continue $\mathbb{R}^d \to H^l(\mathbb{R}^l)$, donc on peut définir

$$K_T(x,y) := (T\delta_x)(y), \qquad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}^d,\ y \in \mathbb{R}^l,$$

qui est une fonction bornée continue sur $\mathbb{R}^{d+l}$.

Soit $\phi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$ et $\psi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^l)$. Pour $m \in \mathbb{N}$, posons

$$\phi_m := 2^{-dm} \sum_{z \in D_m} \phi(z)\delta_z.$$

Pour tout $y \in \mathbb{R}^l$, on calcule

$$(T\phi_m)(y) = 2^{-dm} \sum_{z \in D_m} \phi(z)(T\delta_z)(y) = 2^{-dm} \sum_{z \in D_m} \phi(z) K_T(z,y).$$

Dans l'Exercice 1.11, on montre que $\phi_m \to \phi$ dans $H^{-d}(\mathbb{R}^d)$. Par conséquent, quand $m \to \infty$, le membre de gauche converge vers $(T\phi)(y)$, et on voit assez facilement que le membre de droite converge vers $\int_{\mathbb{R}^d} K_T(x,y)\phi(x)\,\mathrm{d}x$. On en déduit que

$$(T\phi)(y) = \int_{\mathbb{R}^d} K_T(x,y)\phi(x)\,\mathrm{d}x, \qquad \text{pour tout } y \in \mathbb{R}^l,$$

ce qui prouve (1.8).
Étape 2. Soit $T : \mathscr{S}(\mathbb{R}^d) \to \mathscr{S}'(\mathbb{R}^l)$ une application linéaire continue. On va montrer qu'il existe N et C tels que

$$|(T\phi)(\psi)| \leq C p_{N,d}(\phi) p_{N,l}(\psi), \qquad \text{pour tout } \phi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d) \text{ et } \psi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^l).$$

En supposant le contraire, soit (ϕ_n, ψ_n) une suite telle que $p_n(\phi_n) \leq n^{-1}$, $p_n(\psi_n) \leq n^{-1}$ et $|(T\phi_n)(\psi_n)| \geq 1$. Mais $\phi_n \to 0$ dans $\mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$ et la continuité de T impliquent $T\phi_n \to 0$ dans $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^l)$. Comme $\psi_n \to 0$ dans $\mathscr{S}(\mathbb{R}^l)$, le Corollaire 1.15 donne $(T\phi_n)(\psi_n) \to 0$, donc une contradiction.
Étape 3. Soit $B := (1+|D_y|^2)^{-\frac{M}{2}}(1+|y|^2)^{-\frac{M}{2}} T (1+|x|^2)^{-\frac{M}{2}}(1+|D_x|^2)^{-\frac{M}{2}}$, où $M \in \mathbb{N}$ est un nombre à choisir, pour que B se prolonge en une application continue $H^{-d}(\mathbb{R}^d) \to H^l(\mathbb{R}^l)$. L'existence de M est une conséquence de l'étape 2, voir l'Exercice 1.8. On obtient donc, d'après l'étape 1, l'existence d'une distribution $K_B \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^{d+l})$ telle que, pour tout $\phi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$ et $\psi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^l)$

$$\big((1+|D_y|^2)^{-\frac{M}{2}}(1+|y|^2)^{-\frac{M}{2}} T (1+|x|^2)^{-\frac{M}{2}}(1+|D_x|^2)^{-\frac{M}{2}}\phi\big)(\psi) = K_B(\phi \otimes \psi).$$

D'après l'Exercice 1.4, on réécrit cela de manière suivante :

$$\big(T(1+|x|^2)^{-\frac{M}{2}}(1+|D_x|^2)^{-\frac{M}{2}}\phi\big)((1+|y|^2)^{-\frac{M}{2}}(1+|D_y|^2)^{-\frac{M}{2}}\psi) = K_B(\phi \otimes \psi),$$

autrement dit

$$(T\phi)(\psi) = K_B\big(((1+|D_x|^2)^{\frac{M}{2}}(1+|x|^2)^{\frac{M}{2}}\phi)\otimes((1+|D_y|^2)^{\frac{M}{2}}(1+|y|^2)^{\frac{M}{2}}\psi)\big),$$

donc il suffit de définir

$$K_T(\zeta) := K_B\big((1+|D_x|^2)^{\frac{M}{2}}(1+|x|^2)^{\frac{M}{2}}(1+|D_y|^2)^{\frac{M}{2}}(1+|y|^2)^{\frac{M}{2}}\zeta\big).$$

□

Les opérateurs invariants par translation ont une importance particulière.

Définition 1.42. On dit qu'une application linéaire continue $T : \mathscr{S}(\mathbb{R}^d) \to \mathscr{S}'(\mathbb{R}^d)$ est un *opérateur invariant par translations* si

$$T(\tau_{x_0}\phi) = \tau_{x_0}(T\phi), \qquad \text{pour tout } \phi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d) \text{ et } x_0 \in \mathbb{R}^d.$$

Théorème 1.43. *Si $T : \mathscr{S}(\mathbb{R}^d) \to \mathscr{S}'(\mathbb{R}^d)$ un opérateur invariant par translations, alors il existe une distribution $v \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^d)$ telle que*

$$T\phi = v * \phi, \qquad \textit{pour tout } \phi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d). \tag{1.9}$$

*Démonstration (esquisse, **facultatif**).* Soit $K = K_T \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^{2d})$ le noyau de l'opérateur T. Pour tout $\phi, \psi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$ et $x_0 \in \mathbb{R}^d$, la condition (1.9) implique

$$\begin{aligned} K(\tau_{(x_0,x_0)}(\phi\otimes\psi)) &= K((\tau_{x_0}\phi)\otimes(\tau_{x_0}\psi)) = (T(\tau_{x_0}\phi))(\tau_{x_0}\psi) = ((\tau_{x_0}T)(\phi))(\tau_{x_0}\psi) \\ &= (T(\tau_{-x_0}\tau_{x_0}\phi))(\psi) = (T\phi)(\psi) = K(\phi\otimes\psi). \end{aligned}$$

La Proposition 1.39 donne alors

$$K(\tau_{(x_0,x_0)}\zeta) = K(\zeta), \qquad \text{pour tout } x_0 \in \mathbb{R}^d \text{ et } \zeta \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^{2d}).$$

Considérons $L := K \circ A$, où $A(x,y) = (x+y, y)$. On obtient

$$L(\tau_{(0,x_0)}\zeta) = L(\zeta), \qquad \text{pour tout } x_0 \in \mathbb{R}^d \text{ et } \zeta \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^{2d}).$$

D'après l'Exercice 1.14, en procédant par récurrence, il existe $v \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^d)$ tel que $L(\zeta) = v\big(\int \zeta(x,y)\,\mathrm{d}y\big)$. En manipulant bien les définitions, on peut vérifier que v est la distribution qui convient. □

En conclusion, les opérateurs invariants par translations sont précisément les multiplicateurs de Fourier $\widehat{v}(D)$. On les étudiera dans deux semaines.

1.6 Exercices

Exercice 1.1. Soit $(c_k)_{k\in\mathbb{Z}^d}$ une suite telle que $|c_k| \le A(1+|k|)^N$. Montrer que $\sum_{k\in\mathbb{Z}^d} c_k\delta_k \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^d)$ et calculer sa transformée de Fourier.

Exercice 1.2. (Grafakos, ex. 2.3.9) On dit qu'une distribution $u \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^d)$ est *homogène de degré* $\gamma \in \mathbb{C}$ si

$$d_\lambda u = \lambda^{-\gamma} u, \qquad \text{pour tout } \lambda > 0.$$

— Se convaincre que la définition est raisonnable.

— Montrer que δ_0 est homogène de degré $-d$.

— Montrer que, si u est homogène de degré γ et $\alpha \in \mathbb{N}^d$, alors $\partial^\alpha u$ est homogène de degré $\gamma - |\alpha|$.

Exercice 1.3. Montrer que la valeur principale de $\frac{1}{x}$, définie par la relation (1.4), est une distribution tempérée sur $\mathbb{R}$ et calculer sa transformée de Fourier.

Exercice 1.4. Soit $f \in \mathscr{T}(\mathbb{R}^d)$ une fonction symétrique, c'est-à-dire $f(\xi) = f(-\xi)$ pour tout $\xi \in \mathbb{R}^d$. Montrer que $(f(D)u)(\phi) = u(f(D)\phi)$ pour tout $u \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^d)$ et $\phi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$.

Exercice 1.5. Montrer que $\mathscr{F}$ est une isométrie $L^2(\mathbb{R}^d) \to L^2(\mathbb{R}^d)$.

Exercice 1.6. Montrer que si $s_1, s_2 \in \mathbb{R}$, alors $(1+|D|^2)^{\frac{s_1-s_2}{2}}$ est une isométrie $H^{s_1}(\mathbb{R}^d) \to H^{s_2}(\mathbb{R}^d)$. Montrer aussi que, pour toute distribution tempérée u,

$$\|u\|_{H^{-s}} = \sup_{\|\phi\|_{H^s}\le 1} |u(\phi)|.$$

Exercice 1.7. Soit $s > d/2$. Montrer que $H^s(\mathbb{R}^d) \subset C_0(\mathbb{R}^d)$. Montrer que $x \mapsto \delta_x$ est une application continue $\mathbb{R}^d \to H^{-s}(\mathbb{R}^d)$.

Exercice 1.8. Montrer que pour tous N, s il existe C et M tels que pour tout $\phi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$

$$p_N\big((1+|x|^2)^{-\frac{M}{2}}(1+|D|^2)^{-\frac{M}{2}}\phi\big) \le C\|\phi\|_{H^{-s}}.$$

Exercice 1.9. Soit $u \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^d)$. Montrer qu'il existe $M \in \mathbb{N}$ tel que $(1+|D|^2)^{-\frac{M}{2}}(1+|x|^2)^{-\frac{M}{2}} u \in C_0(\mathbb{R}^d)$.

Exercice 1.10. Soit $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$ à support dans B_R. Montrer que

$$\|\partial^\alpha \widehat{f}\|_{L^2} \le (2\pi R)^{|\alpha|}\|f\|_{L^2}, \qquad \text{pour tout } \alpha \in \mathbb{N}^d.$$

Exercice 1.11. Soit $\phi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$. Montrer que

$$\lim_{m\to\infty} 2^{-dm} \sum_{z\in D_m} \phi(z)\delta_z = \phi, \qquad \text{au sens } H^{-d}(\mathbb{R}^d).$$

Exercice 1.12. (pas facile) Soit $u \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^d)$ et $\operatorname{supp} u \subset \{0\}$. Montrer qu'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$u = \sum_{|\alpha|\le N} a_\alpha \partial^\alpha \delta_0, \qquad a_\alpha \in \mathbb{C}.$$

Exercice 1.13. (M-S, ex. 4.5) (pas facile) Soit $0 < \alpha < d$. Montrer que la transformée de Fourier de la fonction $|x|^{-\alpha}$ est égale à $C(\alpha, d)|\xi|^{\alpha-d}$.

Exercice 1.14. (pas facile) Soit $u \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^d)$ une distribution telle que $\partial_{x_d} u = 0$. Montrer qu'il existe $v \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^{d-1})$ telle que

$$u(\phi) = v\bigg(\int \phi(\cdot, x_d)\,\mathrm{d}x_d\bigg), \qquad \text{pour tout } \phi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d).$$

Dans les exercices suivants, on s'intéresse aux *séries de Fourier*.

Exercice 1.15. Démontrer la *formule de sommation de Poisson* :

$$\sum_{m\in\mathbb{Z}^d} f(m) = \sum_{n\in\mathbb{Z}^d} \widehat{f}(n), \qquad \text{pour tout } f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d).$$

Indication : Considérer la fonction $g \in C^\infty(\mathbb{T}^d)$ définie par $g(x) := \sum_{m\in\mathbb{Z}^d} f(x+m)$.

Exercice 1.16. Démontrer la Proposition 1.39. Commencer par montrer que les fonctions tensorielles sont denses dans $C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$.

Le dernier exercice est facultatif.

Exercice 1.17. Terminer la démonstration de la Proposition 1.36.

*Indication :*Utiliser une fonction cut-off χ telle que $\chi(x) = 1$ pour $|x| \leq R$ et $\chi(x) = 0$ pour $|x| \geq R + |\xi|^{-1}$.

1.7 Solutions de certains exercices

Exercice 1.5

La preuve repose sur la formule de Plancherel (1.1). Notons qu'on sait pour l'instant que (1.1) est vrai *pour les fonctions de la classe de Schwartz*.

Soit $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$. En particulier, $f \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^d)$, donc $\widehat{f}$ est une distribution tempérée bien définie. On va montrer que $\widehat{f} \in L^2(\mathbb{R}^d)$ et $\|\widehat{f}\|_{L^2} = \|f\|_{L^2}$. Soit $f_n \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$ et $\lim_{n\to\infty} \|f - f_n\|_{L^2} = 0$. Par la formule de Plancherel (1.1) appliquée à la fonction de Schwartz $f_m - f_n$,

$$\|\widehat{f_m} - \widehat{f_n}\|_{L^2} = \|\mathscr{F}(f_m - f_n)\|_{L^2} = \|f_m - f_n\|_{L^2}.$$

Comme (f_n) est une suite de Cauchy dans $L^2(\mathbb{R}^d)$, on en déduit que $(\widehat{f_n})$ est une suite de Cauchy dans $L^2(\mathbb{R}^d)$, ce qui implique qu'il existe $g \in L^2(\mathbb{R}^d)$ tel que $\lim_{n\to\infty} \|\widehat{f_n} - g\|_{L^2} = 0$. En particulier, $\|g\|_{L^2} = \lim_{n\to\infty} \|\widehat{f_n}\|_{L^2} = \lim_{n\to\infty} \|f_n\|_{L^2} = \|f\|_{L^2}$. On a également $\widehat{f} \to g$ dans $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^d)$. Mais la continuité de $\mathscr{F}$ dans $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^d)$ implique que $\widehat{f_n} \to \widehat{f}$ dans $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^d)$, donc $\widehat{f} = g \in L^2(\mathbb{R}^d)$.

Il faut encore montrer que $\mathscr{F}$ est une surjection $L^2 \to L^2$, mais c'est évident car pour tout $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$ on a $\mathscr{F}(\mathscr{F}^{-1}(f)) = f$, et la preuve ci-dessus montre que $\mathscr{F}^{-1}f \in L^2$.

Exercice 1.7

D'abord, on montre que $s > d/2$ et $f \in H^s(\mathbb{R}^d)$ implique $\widehat{f} \in L^1(\mathbb{R}^d)$ et $\|\widehat{f}\|_{L^1} \leq C(d,s)\|f\|_{H^s}$. En effet, il suffit d'appliquer l'inégalité de Cauchy-Schwarz comme suit :

$$\int_{\mathbb{R}^d} |\widehat{f}(\xi)|\,\mathrm{d}\xi = \int_{\mathbb{R}^d} (1+|\xi|^2)^{-\frac{s}{2}}(1+|\xi|^2)^{\frac{s}{2}}|\widehat{f}(\xi)|\,\mathrm{d}\xi \leq \|(1+|\xi|^2)^{-\frac{s}{2}}\|_{L^2}\|f\|_{H^s},$$

et on trouve par un calcul élémentaire que $\|(1+|\xi|^2)^{-\frac{s}{2}}\|_{L^2} < \infty$ si $s > \frac{d}{2}$.

On a donc $\widehat{f} \in L^1(\mathbb{R}^d)$ et $f = \mathscr{F}^{-1}(\widehat{f})$. On en déduit (voir Proposition 1.23) que f est une fonction continue et

$$f(x) = \int_{\mathbb{R}^d} \mathrm{e}^{2\pi i x\cdot\xi}\widehat{f}(\xi)\,\mathrm{d}\xi, \qquad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}^d.$$

Cette relation implique en particulier $\|f\|_{L^\infty} \leq \|\widehat{f}\|_{L^1} \leq C(d,s)\|f\|_{H^s}$. Par le Lemme de Riemann-Lebesgue, $\lim_{|x|\to\infty} f(x) = 0$. On a donc démontré que $H^s(\mathbb{R}^d) \subset C_0(\mathbb{R}^d)$.

On passe à la deuxième partie de l'exercice. D'abord, pour tout $x \in \mathbb{R}^d$ la transformée de Fourier de δ_x est donnée par $\widehat{\delta_x}(\xi) = \mathrm{e}^{-2\pi i x\xi}$, qui est une fonction bornée. Comme $(1+|\xi|^2)^{-\frac{s}{2}} \in L^2$, on obtient $\delta_x \in H^{-s}(\mathbb{R}^d)$.

Il suffit de montrer que l'application $x \mapsto \delta_x$ est continue en $x = 0$, parce que $\delta_x - \delta_{x_0} = \tau_{x_0}(\delta_{x-x_0} - \delta_0)$, et τ_{x_0} est une isométrie de $H^{-s}(\mathbb{R}^d)$ (pourquoi ?).

On calcule

$$\begin{aligned}\|\delta_x - \delta_0\|_{H^{-s}}^2 &= \|(1+|\xi|^2)^{-\frac{s}{2}}\mathscr{F}(\delta_x - \delta_0)\|_{L^2}^2 = \int_{\mathbb{R}^d} |(1+|\xi|^2)^{-\frac{s}{2}}\mathscr{F}(\delta_x - \delta_0)|^2\,\mathrm{d}\xi \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} (1+|\xi|^2)^{-s}|\mathrm{e}^{-2\pi i\xi\cdot x} - 1|^2\,\mathrm{d}\xi.\end{aligned}$$

Par le théorème de convergence dominée, $\lim_{x\to 0} \|\delta_x - \delta_0\|_{H^{-s}} = 0$.

Exercice 1.10

$$\|\partial^\alpha \widehat{f}\|_{L^2} = \|\mathscr{F}(\partial^\alpha \widehat{f})\|_{L^2} = (2\pi)^{|\alpha|}\|x^\alpha f\|_{L^2} \le (2\pi R)^{|\alpha|}\|f\|_{L^2},$$

où la dernière inégalité vient du fait que $\operatorname{supp} f \subset B(0,R)$.

Exercice 1.12

Soit $u \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^d)$ et $\operatorname{supp}(u) \subset \{0\}$. Pour rappel, cela signifie que $u(\phi) = 0$ pour tout $\phi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$ qui s'annule sur un voisinage de $x = 0$.

Étape 1. On montre qu'il existe $M \in \mathbb{N}$ tel que $\partial^\alpha \phi(0) = 0$ pour tout $|\alpha| \le M$ implique $u(\phi) = 0$. Comme u est une distribution tempérée, il existe $C > 0$ et $N \in \mathbb{N}$ tels que

$$|u(\phi)| \le C p_N(\phi), \qquad \text{pour tout } \phi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d).$$

En particulier, pour tout $\phi \in C^\infty$, à support dans la boule unité B,

$$|u(\phi)| \le C \sup_{|\beta|\le N} \|\partial^\beta \phi\|_{L^\infty}. \tag{1.10}$$

Soit maintenant $M := N + 1$ et $\phi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$ vérifiant $\partial^\alpha \phi(0) = 0$ pour tout $|\alpha| \le M$. Soit ψ une fonction sphériquement symétrique (c'est-à-dire ne dépendant que de $|x|$), vérifiant $\psi \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$, $\operatorname{supp}(\psi) \subset B$ et $\psi(x) = 1$ si $|x| \le \frac{1}{2}$. Considérons la suite $\phi_n \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ définie par

$$\phi_n(x) := \phi(x)\psi(nx).$$

D'abord, on observe que $u(\phi_n) = u(\phi)$. En effet, $\phi_n - \phi$ est une fonction de la classe de Schwartz qui s'annule sur un voisinage de 0. Par conséquent, pour montrer que $u(\phi) = 0$, il suffit de vérifier que $\lim_{n\to\infty} u(\phi_n) = 0$. Pour cela, il suffit de vérifier que $\lim_{n\to\infty} \|\partial^\beta \phi_n\|_{L^\infty} = 0$ pour tout $|\beta| \le N$, et invoquer (1.10) (parce qu'évidemment $\operatorname{supp}(\phi_n) \subset B$ pour tout $n \ge 1$). Par la formule de Leibniz :

$$\partial^\beta \phi_n(x) = \sum_{0\le\gamma\le\beta} \frac{\beta!}{\gamma!(\beta-\gamma)!} \partial^\gamma \phi(x) n^{|\beta|-|\gamma|} \partial^{\beta-\gamma}\psi(nx).$$

Si $|x| \ge n^{-1}$, alors l'expression ci-dessus vaut 0. Si $|x| \le n^{-1}$, alors la formule de Taylor donne, si n est assez grand, $|\partial^\gamma \phi(x)| \le |x|^{M-|\gamma|} \le n^{|\gamma|-M}$. Dans tous les cas $|\partial^\beta \phi_n(x)| \le C n^{|\beta|-M} \le C n^{N-M} \le C n^{-1}$ pour tout $x \in \mathbb{R}^d$, ce qui implique $\|\partial^\beta \phi_n\|_{L^\infty} \to 0$ quand $n \to \infty$. On a terminé l'Étape 1.

Étape 2. Soit $\phi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$, et posons

$$\widetilde{\phi}(x) := \phi(x) - \psi(x) \sum_{|\alpha|\le M} \frac{\partial^\alpha \phi(0)}{\alpha!} x^\alpha.$$

On voit que $\partial^\alpha \widetilde{\phi}(0) = 0$ pour tout $|\alpha| \le M$ donc, d'après la première étape, $u(\widetilde{\phi}) = 0$, ce qui prouve que

$$u(\phi) = u(\widetilde{\phi}) + \sum_{|\alpha|\le M} \frac{\partial^\alpha \phi(0)}{\alpha!} u(\psi(x)x^\alpha) = \sum_{|\alpha|\le M} (-1)^{|\alpha|} c_\alpha \partial^\alpha \phi(0),$$

où $c_\alpha := (-1)^{|\alpha|} u(\psi x^\alpha)$ sont des nombres complexes. De manière équivalente, $u = \sum_{|\alpha|\le M} c_\alpha \partial^\alpha \delta_0$, cqfd.

Exercice 1.13 (facultatif)

Étape 1. Notons s'abord que $|x|^{-\alpha}$ est une fonction localement intégrable à croissance polynômiale, donc elle définit une distribution tempérée. Soit $u := \mathscr{F}(|x|^{-\alpha}) \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^d)$. On montre d'abord que u est une fonction lisse en dehors de l'origine, c'est-à-dire si $\phi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$ est une fonction qui s'annule au voisinage de $\xi = 0$, alors $\phi u \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$. Pour cela, écrivons

$$|x|^{-\alpha} = \psi(x)|x|^{-\alpha} + (1-\psi(x))|x|^{-\alpha},$$

où ψ est la fonction cut-off de l'exercice précédent. Il est clair que $\mathscr{F}(\psi(x)|x|^{-\alpha})$ est une fonction lisse (car $\psi(x)|x|^{-\alpha}$ est à support compact).

Par un calcul explicite, pour $x \neq 0$ on a $\Delta|x|^{-\alpha} = \alpha(\alpha+2-d)|x|^{-\alpha-2}$. On voit donc que $\Delta^k((1-\psi)|x|^{-\alpha})$ est une fonction lisse qui décroit au moins comme $|x|^{-\alpha-2k}$ quand $|x| \to \infty$. On en déduit (je vous laisse les détails) que pour tout $m \in \mathbb{N}$ il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $\mathscr{F}(\Delta^k((1-\psi)|x|^{-\alpha})) \in C^m(\mathbb{R}^d)$. Mais cela implique que $\mathscr{F}((1-\psi)|x|^{-\alpha})$ est une fonction C^m au voisinage de tout $\xi \neq 0$. Comme m est arbitraire, on obtient que $\mathscr{F}((1-\psi)|x|^{-\alpha})$ est une fonction lisse sauf en $\xi = 0$. (En réalité, pour la suite il suffirait de savoir que c'est une fonction continue en dehors de 0.)

Étape 2. u est une distribution sphériquement symétrique et homogène de degré $d-\alpha$, voir l'Exercice 1.2. On peut en déduire que la fonction lisse qu'on a trouvé dans l'étape précédente est $C|\xi|^{d-\alpha}$ pour une constante $C = C(\alpha, d)$. En utilisant le résultat de l'Exercice 1.12, on obtient

$$u = C|\xi|^{d-\alpha} + \sum c_\beta \partial^\beta \delta_0,$$

où la dernière somme est finie. Je vous laisse le soin de vérifier, en choisissant judicieusement les fonctions test, que $c_\beta = 0$ pour tout β.

Chapitre 2

Le principe d'incertitude

Le *Principe d'incertitude* peut être formulé ainsi :

> Il est impossible qu'une fonction (ou distribution) et sa transformée de Fourier soient toutes les deux concentrées dans une petite région de l'espace.

Dans ce chapitre, nous verrons quelques résulats classiques, étant des manifestations de ce principe. D'autres exemples apparaitront tout au long de ce cours.

La principale source bibliographique pour ce chapitre est [6, Chapter 10]. Pour les fonction holomorphes à plusieurs variables, on pourra consulter [4, Chapter 2].

Notation. À partir de maintenant et toujours par la suite, pour deux fonctions complexes $f, g \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$, on notera

$$\langle f, g \rangle := \int_{\mathbb{R}^d} \overline{f(x)} g(x)\,\mathrm{d}x,$$

avec le conjugué complexe sur le premier élément de la paire. On étend cette opération par densité sur $H^{-s}(\mathbb{R}^d) \times H^s(\mathbb{R}^d)$, $\dot{H}^{-s}(\mathbb{R}^d) \times \dot{H}^s(\mathbb{R}^d)$, $L^{p'}(\mathbb{R}^d) \times L^p(\mathbb{R}^d)$ etc.

2.1 Inégalité de Heisenberg

Commençons par l'exemple le plus célèbre d'un résultat quantifiant ce principe.

Théorème 2.1. *Pour tout $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$, $x_0, \xi_0 \in \mathbb{R}^d$, l'inégalité suivante est vraie :*

$$\|(x - x_0) f\|_{L^2} \|(\xi - \xi_0)\widehat{f}\|_{L^2} \geq \frac{d}{4\pi} \|f\|_{L^2}^2.$$

Démonstration. Sans perdre la généralité, supposons que $x_0 = 0$ et $\xi_0 = 0$. Par l'identité de Plancherel, $\|\xi \widehat{f}\|_{L^2} = \|Df\|_{L^2}$. L'idée clé de la preuve est d'utiliser la *relation canonique de commutation*

$$[x, D]f := (xD - Dx)f = \sum_{j=1}^{d} (x_j D_j - D_j x_j) f = (2\pi i)^{-1} \sum_{j=1}^{d} (x_j \partial_{x_j} - \partial_{x_j} x_j) f = -\frac{d}{2\pi i} f.$$

On obtient

$$2\mathrm{Im}\langle xf, Df \rangle = \frac{1}{i}\big(\langle xf, Df \rangle - \langle Df, xf \rangle\big) = \frac{1}{i}\langle f, [x, D]f \rangle = -\frac{d}{2\pi} \|f\|_{L^2}^2.$$

Il suffit maintenant d'utiliser l'inégalité de Cauchy-Schwarz. □

Remarque 2.2. Pour $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$ donné, l'expression $\|(x-x_0)f\|_{L^2}$ est une fonction quadratique de x_0, qui atteint son minimum pour

$$x_0 = \frac{\int_{\mathbb{R}^d} x|f(x)|^2 \, \mathrm{d}x}{\int_{\mathbb{R}^d} |f(x)|^2 \, \mathrm{d}x}.$$

De même pour ξ_0.

2.2 Fonctions holomorphes de plusieurs variables

Définition 2.3. Soit $\Omega \subset \mathbb{C}^d$ un *domaine*, c'est-à-dire un ensemble ouvert et connexe. On dit qu'une fonction $f : \Omega \to \mathbb{C}$ est *holomorphe* si elle est continue et holomorphe par rapport à chacune des variables.

On va montrer qu'une fonction holomorphe est analytique, c'est-à-dire donnée localement par une série entière.

Lemme 2.4. *Soit $r_j > 0$ pour $1 \leq j \leq d$ et $D = D_r := \{z \in \mathbb{C}^d : |z_j| \leq r_j\}$ (on appelle D un* poly-disque*). Soit $f : D \to \mathbb{C}$ une fonction continue, holomorphe sur* $\mathrm{int}(D)$. *Alors pour tout $z \in \mathrm{int}(D)$ la* formule de Cauchy *est vrai :*

$$f(z) = \int_{[0,1]^d} f(r_1 \mathrm{e}^{2\pi i\theta_1}, \ldots, r_d \mathrm{e}^{2\pi i\theta_d})(1 - r_1^{-1}\mathrm{e}^{-2\pi i\theta_1} z_1)^{-1} \ldots (1 - r_d^{-1}\mathrm{e}^{-2\pi i\theta_d} z_d)^{-1} \, \mathrm{d}\theta. \tag{2.1}$$

Démonstration. Il suffit d'appliquer d fois la formule de Cauchy habituelle. □

Corollaire 2.5. *Soit $r \in (0,\infty)^d$, $w \in \mathbb{C}^d$, $D(w,r)$ le poly-disque de centre w et poly-rayon r, $f : D(w,r) \to \mathbb{C}$ une fonction continue, holomorphe sur* $\mathrm{int}(D(w,r))$. *Alors*

$$f(z) = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^d} \frac{\partial^\alpha f(w)}{\alpha!}(z-w)^\alpha, \qquad \textit{pour tout } z \in \mathrm{int}(D(w,r)),$$

avec la somme qui converge absolument.

Démonstration. Sans restreindre la généralité, on peut supposer que $w = 0$.

L'idée est simplement de dévolopper en une série entière tous les facteurs dans la formule de Cauchy :

$$\frac{1}{1 - r_j^{-1}\mathrm{e}^{-2\pi i\theta_j} z_j} = \sum_{n=0}^{\infty} r_j^{-n} \mathrm{e}^{-2n\pi i\theta_j} z_j^n.$$

Pour $\alpha \in \mathbb{N}^d$, soit

$$a_\alpha := \int_{[0,1]^d} f(r_1 \mathrm{e}^{2\pi i\theta_1}, \ldots, r_d \mathrm{e}^{2\pi i\theta_d}) r^{-\alpha} \mathrm{e}^{-2\pi i\alpha\cdot\theta} \, \mathrm{d}\theta. \tag{2.2}$$

On obtient

$$f(z) = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^d} a_\alpha z^\alpha, \qquad \text{pour tout } z \in \mathrm{int}(D), \tag{2.3}$$

avec une convergence absolue, voir Exercice 2.1.

Par différentiation sous le signe d'intégrale dans (2.1), on a

$$\partial^\alpha f(z) = \int_{[0,1]^d} f(r_1 e^{2\pi i\theta_1}, \ldots, r_d e^{2\pi i\theta_d}) \prod_{j=1}^d \frac{\alpha_j! r_j^{-\alpha_j} e^{-2\pi i\alpha_j\theta_j}}{(1 - r_j^{-1} e^{-2\pi i\theta_j} z_j)^{\alpha_j+1}} \, d\theta,$$

en particulier $a_\alpha = \partial^\alpha f(0)/\alpha!$. □

Lemme 2.6. *Soit $r_j > 0$, f holomorphe sur $\mathrm{int}(D)$ et $|f(z)| \le M$ pour tout $z \in \mathrm{int}(D)$, alors pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^d$ l'inégalité suivante est vraie :*

$$|\partial^\alpha f(0)| \le M\alpha! r^{-\alpha}.$$

Démonstration. Soit $\rho < r$. Les hypothèses du corollaire précédent sont vérifées sur le poly-disque D_ρ, et (2.2) implique $|a_\alpha| \le M\rho^{-\alpha}$, donc $|\partial^\alpha f(0)| \le M\alpha!\rho^{-\alpha}$. En faisant tendre ρ vers r, on obtient la conclusion. □

Corollaire 2.7. *Si $\Omega \subset \mathbb{C}^d$ et $f_n : \Omega \to \mathbb{C}$ une suite de fonctions holomorphes qui converge uniformément sur tout ensemble compact vers une fonction $f : \Omega \to \mathbb{C}$, alors f est holomorphe.*

Démonstration. Le dernier lemme implique que les dérivées des fonctions f_n convergent uniformément, donc on peut passer à la limite dans les équations de Cauchy-Riemann. □

En particulier, une série entière absolument convergente définit une fonction holomorphe.

Remarque 2.8. L'ensemble où une série entière à plusieurs variables converge peut être compliqué, ce n'est pas nécessairement un poly-disque !

Corollaire 2.9. *(Théorème de Montel) Soit $\Omega \subset \mathbb{C}^d$ et $f_n : \Omega \to \mathbb{C}$ une suite de fonctions holomorphes telle que $\sup_n \|f_n\|_{L^\infty(K)} < \infty$ pour tout ensemble compact $K \subset \Omega$. Alors la suite f_n a une sous-suite qui converge uniformément sur tout ensemble compact.*

Démonstration. Par le dernier lemme, la suite est équicontinue sur tout ensemble compact, donc il suffit d'appliquer le Théorème d'Arzela-Ascoli. □

On sait qu'une fonction holomorphe d'une variable dont l'ensemble des zéros a un point d'accumulation doit être identiquement nulle. Notre but est de démontrer une propriété analogue pour les fonctions holomorphes de plusieurs variables. L'exemple $f(z_1, z_2) = z_1$ montre qu'il ne suffira plus de supposer que l'ensemble des zéros ait un point d'adhérence.

Théorème 2.10. *Soit $f : \mathbb{C}^d \supset \Omega \to \mathbb{C}$ une fonction holomorphe. Supposons qu'il existe un ensemble $A \subset \Omega \cap \mathbb{R}^d$ tel que $f(z) = 0$ pour tout $z \in A$ et $|A| > 0$. Alors $f(z) = 0$ pour tout $z \in \Omega$.*

Avant de démontrer le théorème, on a besoin du résultat suivant sur les polynômes réels. (Ce n'est pas exactement le résultat vu en cours le 14 septembre – voir plus bas la Proposition 2.12, qui est plus forte.)

Proposition 2.11. *Pour tout $N \in \mathbb{N}$ il existe $0 < \beta < 1$ ayant la propriété suivante. Soit $p : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ un polynôme non nul, de degré N. Il existe $\epsilon_0 > 0$, qui dépend de p, tel que pour tout $x_0 \in \mathbb{R}^d$*

$$|\{x \in B(x_0, 1) : |p(x)| \le \epsilon_0\}| \le \beta|B|.$$

Démonstration du Théorème 2.10 en admettant Proposition 2.11. Soit $B \subset \Omega$ le plus grand ensemble ouvert sur lequel f s'annule, c'est-à-dire la réunion de toutes les ouverts ayant cette propriété. Il faut montrer que $B = \Omega$.
Étape 1. On montre que $B \neq \emptyset$. Sans restreindre la généralité, supposons que $0 \in A$ est un point de densité de l'ensemble A. Pour rappel, cela signifie que

$$\lim_{r \to 0^+} \frac{|A \cap B_r|}{|B_r|} = 1.$$

Par le Corollaire 2.5, il existe $r_0 > 0$ tel que la fonction f se développe en série (2.3) dans le poly-disque $|z_j| \leq r_0$. On va montrer que $a_\alpha = 0$ pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^d$, donc $f(z) = 0$ pour tout $|z| < r_0$, en particulier $0 \in B$.

Supposons le contraire, et soit $N := \min\{|\alpha| : a_\alpha \neq 0\}$. Posons $p(z) := \sum_{|\alpha|=N} a_\alpha z^\alpha$ et $g(z) := f(z) - p(z)$. On voit que $g(z) = \sum_{|\alpha|=N+1} z^\alpha g_\alpha(z)$, où g_α sont des fonctions holomorphes sur le poly-disque, en particulier il existe C tel que

$$|f(z) - p(z)| \leq C r^{N+1}, \qquad \text{pour tout } z \text{ tel que } |z_j| \leq r. \tag{2.4}$$

Par la Proposition 2.11, il existe $\epsilon_0 > 0$ et $\beta > 0$ tels que

$$|\{x \in \mathbb{R}^d : |x_j| \leq r \text{ et } |p(x)| \geq 2\epsilon_0 r^N\}| \geq \beta r^N.$$

En prenant en compte l'estimation (2.4), on obtient, pour tout r assez petit,

$$|\{x \in \mathbb{R}^d : |x_j| \leq r \text{ et } |f(x)| \geq \epsilon_0 r^N\}| \geq \beta r^N,$$

en contradiction avec le fait que 0 est un point de densité de A.
Étape 2. Supposons que $B \neq \Omega$. Comme Ω est connexe, le bord ∂B de B dans Ω est non vide. Soit $w \in \partial B$, et soit $r_0 > 0$ tel que f est holomorphe dans le poly-disque $|z_j - w_j| < 3r_0$. Il existe $u \in B$ tel que $|w_j - u_j| < r_0$. Mais alors f est holomorphe dans le poly-disque $|z_j - u_j| < 2r_0$, donc se développe en série entière dans ce poly-disque. Comme $f = 0$ au voisinage de u, cette série entière est nulle, ce qui prouve que $f(z) = 0$ si $|z_j - u_j| < 2r_0$. En particulier, f s'annule sur un voisinage de w, ce qui contredit l'hypothèse $w \notin B$. □

Démonstration de la Proposition 2.11. **Étape 1.** On démontre l'existence de $0 < \beta < 1$ tel que pour tout polynôme de degre (au plus) N

$$\Big|\{x \in B : 2|p(x)| \leq \max_{y \in B} |p(y)|\}\Big| \leq \beta |B|. \tag{2.5}$$

L'espace vectoriel des polynômes de degré au plus N est de dimension finie. L'expression $\max_{y \in B} |p(y)|$ définit une norme sur cette espace, tout comme l'expression $\max_{y \in B}(|p(y)| + |\nabla p(y)|)$. Il existe donc une constante $C = C(N)$ telle que

$$\max_{y \in B}(|p(y)| + |\nabla p(y)|) \leq C(N) \max_{y \in B} |p(y)|, \qquad \text{pour tout } p \text{ de degré } \leq N.$$

Soit $|p(y_0)| = \max_{y \in B} |p(y)|$ et $|y_1 - y_0| < (2C(N))^{-1}$. Par le théorème des accroissements finis,

$$|p(y_1)| > |p(y_0)| - (2C(N))^{-1} C(N) |p(y_1)| \geq \frac{1}{2} |p(y_0)|.$$

Mais la mesure de l'ensemble $y_1 \in B : |y_1 - y_0| < (2C(N))^{-1}$ est $\geq \frac{1}{2}(2C(N))^{-d}|B|$, ce qui montre (2.5) avec $\beta = 1 - \frac{1}{2}(2C(N))^{-d}$.

Étape 2. Soit $p(x) = \sum_{|\alpha| \leq N} a_\alpha x^\alpha$ et $\sum_{|\alpha|=N} |a_\alpha| > 0$. Pour finir la démostration, il suffit de montrer l'existence de ϵ_0 tel que

$$\max_{y \in B(x_0,1)} |p(y)| \geq \epsilon_0, \qquad \text{pour tout } x_0 \in \mathbb{R}^d.$$

Par l'argument de l'équivalence de normes, il existe $C = C(N)$ tel que pour tout polynôme de degré N, $q(x) = \sum_{|\alpha| \leq N} b_\alpha x^\alpha$

$$\max_{y \in B} |q(y)| \geq C(N)^{-1} \sum_\alpha |b_\alpha|.$$

Posons $\epsilon_0 := C(N)^{-1} \sum_{|\alpha|=N} |a_\alpha|$. Soit $x_0 \in \mathbb{R}^d$ et $q(x) := p(x - x_0) = \sum_{|\alpha| \leq N} b_\alpha x^\alpha$. L'observation cruciale est que $b_\alpha = a_\alpha$ si $|\alpha| = N$. Par conséquent,

$$\max_{y \in B(x_0,1)} |p(y)| = \max_{y \in B} |q(y)| \geq C(N)^{-1} \sum_{|\alpha|=N} |b_\alpha| = \epsilon_0.$$

$\square$

Une version alternative, qui est celle vue en cours le 14 septembre :

Proposition 2.12. *Soit $p : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ un polynôme non nul. Pour tout $\epsilon > 0$ il existe $\delta > 0$, qui dépend de p et ϵ, tel que pour tout $x_0 \in \mathbb{R}^d$*

$$|\{x \in B(x_0, 1) : |p(x)| \leq \delta\}| \leq \epsilon.$$

Démonstration. **Étape 1.** Soit $N \in \mathbb{N}$ le degré de p. On montre que pour tout $\epsilon > 0$ il existe $c > 0$ tel que pour tout polynôme de degré $\leq N$, $q(x) = \sum_{|\alpha| \leq N} b_\alpha x^\alpha$, on a l'inégalité

$$\left| \left\{ x \in B : |q(x)| \leq c \sum_{|\alpha| \leq N} |b_\alpha| \right\} \right| \leq \epsilon.$$

Supposons le contraire. Il existe alors une suite de polynômes $q_n(x) = \sum_{|\alpha| \leq N} b_{n,\alpha} x^\alpha$ telle que $\sum_{|\alpha| \leq N} |b_{n,\alpha}| = 1$ pour tout n et

$$|X_n := \{x \in B : |q_n(x)| \leq n^{-1}\}| \geq \epsilon.$$

Il existe une sous-suite n_k telle que $b_{n_k,\alpha} \to b_\alpha$ pour tout $|\alpha| \leq N$. Soit $q(x) := \sum_{|\alpha| \leq N} b_\alpha x^\alpha$ et $X := \limsup X_{n_k} = \cap_{m \geq 1} \cup_{k \geq m} X_{n_k}$. Soit $x \in X$. Par la définition de X, il existe k arbitrairement grand tel que $x \in X_{n_k}$. En passant à la limite dans l'inégalité $|q_{n_k}(x)| \leq {n_k}^{-1}$, on obtient $q(x) = 0$. L'ensemble X, étant l'intersection d'une suite décroissante d'ensembles de mesure finie $\geq \epsilon$, est un ensemble de mesure $\geq \epsilon$.

Par récurrence par rapport au nombre des variables, on démontre qu'un polynôme non nul ne peut pas s'annuler sur un ensemble de mesure positive (utiliser Fubini...). Alors, $q = 0$, en contradiction avec le fait que $\sum_{|\alpha| \leq N} |b_\alpha| = 1$.

Étape 2. Posons $\delta := c \sum_{|\alpha|=N} |a_\alpha|$. Soit $x_0 \in \mathbb{R}^d$ et $q(x) := p(x - x_0) = \sum_{|\alpha| \leq N} b_\alpha x^\alpha$. Observons que $b_\alpha = a_\alpha$ si $|\alpha| = N$. Il suffit d'appliquer l'estimation obtenue dans l'Étape 1. $\square$

Preuve alternative du Théorème 2.10. Par récurrence par rapport au nombre des variables.

Soit D_r, $r = (r, r, \dots, r) \subset \Omega$ un poly-disque sur lequel une fonction holomorphe f s'annule sur un sous-ensemble de $D_r \cap \mathbb{R}^d$ de mesure strictement positive. Alors f s'écrit de la manière suivante :

$$f(z_1, \dots, z) = \sum_{m=0}^{\infty} f_m(z_1, \dots, z_{n_1}) z^m,$$

où les fonctions f_m sont holomorphes dans le poly-disque $D_r \subset \mathbb{C}^{n-1}$. La fonction f_m est définie par sa série entière

$$f_m(z_1, \dots, z_{d-1}) = \sum_{\beta \in \mathbb{N}^{d-1}} a_{(\beta,m)}(z_1, \dots, z_{d-1})^{\beta}.$$

Tout converge absolument : on effectue juste des réarrangement de sommes absolument convergentes.

Par le théorème de Fubini, il existe un ensemble $X \subset D_r \cap \mathbb{R}^{d-1} \subset \mathbb{C}^{n-1}$ de mesure strictement positive, tel que pour tout $(z_1, \dots, z_{n-1}) \in X$, la fonction $z \mapsto f(z_1, \dots, z_{n-1}, z)$ s'annule sur un sous-ensemble de mesure $\mathbb{R}$ de mesure > 0, donc est identiquement nulle. Par l'hypothèse de récurrence, $f_m = 0$ pour tout m. □

Pour nous, la principale utilité de la théorie développée ci-dessus réside dans le fait que les transformées de Fourier de fonctions à support compact sont holomorphes. Rappelons d'abord la définition du support essentiel d'une fonction.

Définition 2.13. — Soit $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$ une fonction mesurable et E un ensemble mesurable. On dit que f est *à support dans E* si $\chi_{E^C} f = 0$ presque partout.

— On définit le *support essentiel*

$$\operatorname{ess\,supp}(f) := \bigcap \{E \text{ fermé} : f \text{ à support dans } E\}.$$

Souvent, on écrit $\operatorname{supp}(f)$ au lieu de $\operatorname{ess\,supp}(f)$.

Proposition 2.14. *Soit $R \geq 0$ et $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$ vérifiant $\operatorname{supp} f \subset B_R$. La fonction $\widehat{f}$ s'étend comme une fonction entière sur $\mathbb{C}^d$ et vérifie*

$$|\widehat{f}(\xi)| \leq C R^{\frac{d}{2}} \mathrm{e}^{2\pi R |\operatorname{Im} \xi|} \|f\|_{L^2}, \tag{2.6}$$

où $C = C(d)$.

De même, si $\widehat{f} \in L^2(\mathbb{R}^d)$ et $\operatorname{supp} \widehat{f} \subset B_R$, alors f s'étend comme une fonction entière sur $\mathbb{C}^d$ et vérifie

$$|f(x)| \leq C R^{\frac{d}{2}} \mathrm{e}^{2\pi R |\operatorname{Im} x|} \|\widehat{f}\|_{L^2}.$$

Démonstration. La fonction $\widehat{f}$ est donnée, comme on l'a vu dans la Section 1.4, voir (1.6), par

$$\widehat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^d} \mathrm{e}^{-2\pi i \xi \cdot x} f(x) \, \mathrm{d}x. \tag{2.7}$$

(on peut aussi utiliser le fait qu'une fonction L^2 à support compact est intégrable et utiliser la Proposition 1.23). La formule (2.7) a un sens pour tout $\xi \in \mathbb{C}^d$. En dérivant sous le signe de l'intégrale, ou bien en développant l'exponentielle en série, on voit que la fonction $\widehat{f} : \mathbb{C}^d \to \mathbb{C}$ ainsi définie est une fonction holomorphe.

Pour $\xi \in \mathbb{C}^d$ donné, $|\mathrm{e}^{-2\pi i\xi\cdot x}| \le \mathrm{e}^{2\pi|\mathrm{Im}\xi||x|}$ (on a utilisé l'inégalité de Cauchy-Schwarz dans $\mathbb{R}^d$), donc

$$\|\mathrm{e}^{-2\pi i\xi\cdot x}\|^2_{L^2(B_R)} \le \int_{|x|\le R} \mathrm{e}^{4\pi|\mathrm{Im}\xi||x|}\,\mathrm{d}x \le \int_{|x|\le R} \mathrm{e}^{4\pi R|\mathrm{Im}\xi|}\,\mathrm{d}x \le CR^d\mathrm{e}^{4\pi R|\mathrm{Im}\xi|}.$$

L'inégalité de Cauchy-Schwarz implique (2.6).

La deuxième affirmation résulte directement de la première, puisque $\mathscr{F}(\widehat{f}) = \check{f}$. □

Corollaire 2.15. *Si $\widehat{f} \in L^2(\mathbb{R}^d)$ est à support compact, alors l'ensemble $\{x : f(x) = 0\} \subset \mathbb{R}^d$ est de mesure de Lebesgue nulle.*

Remarque 2.16. Il faut voir le dernier corollaire dans le contexte du principe d'incertitude : si l'impulsion est de manière *sûre* dans une boule, alors pour tout ensemble de mesure positive il y a une probabilité non nulle d'y trouver la particule. En particulier, une fonction L^2 et sa transformée de Fourier ne peuvent pas être toutes les deux à support compact. C'est vrai aussi pour les distributions, pour la même raison, voir Section 1.4.

Aussi, ce qui est peut-être plus intéressant, il suffit de supposer que $\widehat{f}$ est à décroissance exponentielle, pour obtenir la même conclusion (pourquoi ?).

2.3 Solvabilité locale des EDP à coefficients constants

On a vu au début de la séance le 14 septembre la raison principale pour laquelle les opérateurs invariants par translations sont les convolutions. Cela peut être rendu rigoureux. On peut montrer ainsi que tout opérateur continu $\mathscr{S}(\mathbb{R}^d) \to \mathscr{S}'(\mathbb{R}^d)$ est donné par une convolution avec une distribution tempérée, voir Théorme 1.43 dans la section facultative du premier chapitre.

Ainsi, tout opérateur linéaire continu $T : \mathscr{S}(\mathbb{R}^d) \to \mathscr{S}'(\mathbb{R}^d)$ est donné par $\phi \mapsto T_u\phi = u*\phi$ pour une certaine distribution tempérée u. Quelles sont les distributions qui donnent lieu à des opérateurs *locaux* ? Comme on l'a vu au premier chapitre, pour tout $\phi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$, la distribution $u*\phi$ est en fait une fonction lisse. On dit que T est un opérateur local si $(T\phi)(0)$ ne dépend que d'un voisinage arbitrairement petit de $x = 0$. Autrement dit, si $\phi_1(x) = \phi_2(x)$ sur un voisinage de $x = 0$ implique que $(T\phi_1)(0) = (T\phi_2)(0)$. Mais on sait que $(u*\phi)(0) = u(\check{\phi})$, donc T_u est un opérateur local si et seulement si u est à support dans $\{0\}$. Dans l'Exercice 1.12, on a obtenu que dans ce cas u est une combinaison linéaire finie de dérivées de δ_0. On en déduit facilement que l'opérateur T doit avoir la forme suivante :

$$(T\phi)(x) = \sum c_\alpha \partial^\alpha \phi(x),$$

autrement dit c'est un opérateur différentiel à coefficient constants.

Souvent on écrit un opérateur différentiel à coefficients constants comme $T = p(D)$, où p est un polynôme à coefficients complexes.

Ces opérateurs sont inversibles localement (c'est-à-dire, dans des boules). Voici le résultat.

Théorème 2.17 (Malgrange-Ehrenpreis). *Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ un domaine borné et p un polynôme non nul. Il existe un opérateur borné $R : L^2(\mathbb{R}^d) \to L^2(\mathbb{R}^d)$ tel que*

$$p(D)(Rf) = f, \qquad \textit{pour tout } f \in L^2(\mathbb{R}^d)$$

dans Ω au sens des distributions, c'est-à-dire

$$\langle f, \phi\rangle = \langle Rf, \overline{p}(D)\phi\rangle, \qquad \textit{pour tout } \phi \in C_0^\infty(\Omega).$$

L'outil principal pour démontrer ce théorème sera le lemma suivant, qu'il faut voir comme une manifestation du principe d'incertitude.

Lemme 2.18. *Il existe une constante $C = C(d)$ ayant la propriété suivante. Pour tout ensemble mesurable $S \subset \mathbb{R}^d$ tel que $|S \cap B(x_0, 1)| \leq \epsilon$ pour tout $x_0 \in \mathbb{R}^d$, et toute fonction $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$ telle que* $\operatorname{supp}(\widehat{f}) \subset B$

$$\|f\|_{L^2(S)} \leq C\sqrt{\epsilon}\|f\|_{L^2}. \tag{2.8}$$

Démonstration. On note $Q(x_0; R)$ le cube de centre x_0 et de l'arête de longueur R (on dit aussi de taille R), c'est-à-dire

$$Q(x_0; R) := \{x \in \mathbb{R}^d : |(x - x_0)_j| \leq R/2 \text{ pour tout } j \in \{1, \dots, d\}\}.$$

On écrit $Q_R := Q(0; R)$ et $Q := Q_1$. On utilisera cette notation aussi plus tard dans ce chapitre et le suivant.

Soit ψ une fonction lisse telle que $\psi(x) = 1$ si $x \in Q$ et $\psi(x) = 0$ si $x \notin Q_3$. Soit $N > \frac{d}{4}$. En utilisant l'Exercice 1.7, on peut écrire

$$\|\psi f\|_{L^\infty} \leq C\|(1-\Delta)^N(\psi f)\|_{L^2},$$

ce qui implique

$$\|f\|_{L^2(S\cap Q)}^2 \leq C\epsilon\|(1-\Delta)^N(\psi f)\|_{L^2}^2.$$

Par la Chain Rule, on obtient

$$\|(1-\Delta)^N(\psi f)\|_{L^2}^2 \leq C\sum_{|\beta|\leq 2N}\|\partial^\beta f\|_{L^2(Q_3)}^2,$$

donc

$$\|f\|_{L^2(S\cap Q)}^2 \leq C\epsilon\sum_{|\beta|\leq 2N}\|\partial^\beta f\|_{L^2(Q_3)}^2.$$

De la même manière, pour tout point entier $x_0 \in \mathbb{Z}^d$, on a

$$\|f\|_{L^2(S\cap Q(x_0,1))}^2 \leq C\epsilon\sum_{|\beta|\leq 2N}\|\partial^\beta f\|_{L^2(Q(x_0,3))}^2.$$

En sommant par rapport à $x_0 \in \mathbb{Z}^d$, on obtient

$$\|f\|_{L^2(S)}^2 \leq C\epsilon\sum_{|\beta|\leq 2N}\|\partial^\beta f\|_{L^2}^2,$$

et l'Exercice 1.10 permet de conclure. □

Remarque 2.19. On peut réécrire (2.8) comme suit :

$$\|f\|_{L^2(S^c)}^2 \geq (1 - C^2\epsilon)\|f\|_{L^2}^2.$$

Si $\epsilon < C^{-2}$, on obtient l'inégalité

$$\|f\|_{L^2} \leq (1 - C^2\epsilon)^{-1/2}\|f\|_{L^2(S^c)}, \tag{2.9}$$

qui a la forme d'une *inégalité d'observabilité* : si on sait que la transformée de Fourier de f a le support dans B, alors pour "connaître" f sur tout $\mathbb{R}^d$, il suffit de "l'observer" seulement sur la partie S de $\mathbb{R}^d$.

Démonstration du Théorème 2.17. Sans perdre la généralité, supposons que $\Omega = B$. On a la cruciale *estimation a priori* :

$$\|\overline{p}(D)\phi\|_{L^2} \geq c\|\phi\|_{L^2}, \qquad \text{pour tout } \phi \in C_0^\infty(B). \tag{2.10}$$

Pour la démontrer, prenons $\epsilon < (2C)^{-2}$, où C est la constante dans (2.8). Soit $\delta > 0$ le nombre fourni par la Proposition 2.12, et soit $S := \{\xi \in \mathbb{R}^d : |p(\xi)| \leq \delta\}$. L'ensemble S vérifie donc les hypothèses du Lemme 2.18.

Par Plancherel, (2.10) est équivalent à

$$\|\overline{p}(\xi)\widehat{\phi}\|_{L^2} \geq c\|\phi\|_{L^2}, \qquad \text{pour tout } \phi \in C_0^\infty(B).$$

Il suffit maintenant d'écrire

$$\|\overline{p}(\xi)\widehat{\phi}\|_{L^2} \geq \|\overline{p}(\xi)\widehat{\phi}\|_{L^2(S^C)} \geq \delta\|\widehat{\phi}\|_{L^2(S^C)} \geq \frac{\delta}{2}\|\widehat{\phi}\|_{L^2},$$

où pour la dernière inégalité on utilise (2.9).

Soit $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$. On va définir Rf. Pour le faire, soit $X \subset L^2(\mathbb{R}^d)$ l'espace fermé engendré par $\{\overline{p}(D)\phi : \phi \in C_0^\infty(B)\}$. On définit $Rf \in X$ par la condition

$$\langle Rf, \overline{p}(D)\phi\rangle = \langle f, \phi\rangle, \qquad \text{pour tout } \phi \in C_0^\infty(B).$$

Il existe l'unique $Rf \in X$ qui le vérifie, car $\overline{p}(D)\phi \mapsto \langle f, \phi\rangle$ est une fonctionnelle linéaire continue $X \to \mathbb{C}$ grâce à l'estimation a priori (2.10). De plus $\|Rf\|_{L^2} \leq c^{-1}\|f\|_{L^2}$, et on voit que R est linéaire. □

2.4 Exercices

Exercice 2.1. — Soit $R > 0$ et b_α une suite de nombres complexes telle que $\sup_{\alpha\in\mathbb{N}^d} R^{-|\alpha|}|b_\alpha| < \infty$. Montrer que la somme $\sum_{\alpha\in\mathbb{N}^d} \beta_\alpha \rho^{|\alpha|}$ converge absolument pour tout $0 < \rho < R$.

— Montrer que la somme (2.3) converge absolument.

Exercice 2.2. Montrer que pour tout $s > 0$ l'opérateur $f \mapsto (1+|x|^2)^{-\frac{s}{2}}(1+|D|^2)^{-\frac{s}{2}} f$ est compact $L^2(\mathbb{R}^d) \to L^2(\mathbb{R}^d)$. Autrement dit, si f_n est une suite bornée dans $L^2(\mathbb{R}^d)$, alors $(1+|x|^2)^{-\frac{s}{2}}(1+|D|^2)^{-\frac{s}{2}} f_n$ a une sous-suite qui converge dans $L^2(\mathbb{R}^d)$.

Montrer que ni $f \mapsto (1+|x|^2)^{-\frac{s}{2}} f$, ni $f \mapsto (1+|D|^2)^{-\frac{s}{2}} f$ n'est compact $L^2(\mathbb{R}^d) \to L^2(\mathbb{R}^d)$.

Exercice 2.3. Montrer le théorème de Paley-Wiener en dimension 1.

Exercice 2.4. (facultatif) Rappelons la notion d'un *opérateur de Hilbert-Schmidt*. Soit H, H' deux espaces de Hilbert séparables. Soit ϕ_n, ϕ'_n leur bases orthonormées. On dit que $T : H \to H'$ est un opérateur de Hilbert-Schmidt si

$$\|T\|_{HS}^2 := \sum_{n,n'=0}^{\infty} |\langle \phi'_n, T\phi_n\rangle|^2 < \infty.$$

Soit $X \subset \mathbb{R}^d$, $Y \subset \mathbb{R}^l$ deux ensembles mesurables. Pour tout $K_T \in L^2(X \times Y)$, on définit l'opérateur $T : L^2(X) \to L^2(Y)$ par la formule

$$(Tf)(y) = \int_X K_T(x, y) f(x)\, \mathrm{d}x.$$

Montrer que l'application $K_T \mapsto T$ définit une isométrie entre $L^2(X \times Y)$ et l'espace des opérateurs de Hilbert-Schmidt $L^2(X) \to L^2(Y)$.

Chapitre 3

Théorie de Calderón-Zygmund des intégrales singulières

On a vu que les opérateurs de convolution apparaissent naturellement comme les opérateurs invariants par translations. En analyse mathématique, il est important de pouvoir démontrer la continuité des opérateurs qui nous intéressent entre différents espaces. Dans ce chapitre, nous verrons des résultats permettant d'établir la continuité de certains opérateurs de convolution entre des espaces de Lebesgue et de Hölder.

3.1 Critères classiques

Pour une distribution $u \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^d)$, on considère l'opérateur $T_u : \mathscr{S}(\mathbb{R}^d) \to \mathscr{S}'(\mathbb{R}^d)$ donné par $T_u\phi = u * \phi$. On donne quelques critères classiques de continuité.

Rappelons le résultat général suivant.

Lemme 3.1 (Inégalité de Minkowski)**.** *Soit (X,μ) et (Y,ν) des espaces mesurables σ-finis, $F : X \times Y \to \mathbb{R}_+$ une fonction mesurable et soit $1 \le p \le q < \infty$. Alors*

$$\left(\int_Y \left(\int_X F(x,y)^p \mu(\mathrm{d}x) \right)^{\frac{q}{p}} \nu(\mathrm{d}y) \right)^{\frac{1}{q}} \le \left(\int_X \left(\int_Y F(x,y)^q \nu(\mathrm{d}y) \right)^{\frac{p}{q}} \mu(\mathrm{d}x) \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Démonstration. En remplaçant F par $F^{\frac{1}{p}}$ et en prenant la puissance p à droite et à gauche on se ramène au cas $p = 1$, autrement dit il faut montrer que pour tout $q \ge 1$

$$\left(\int_Y \left(\int_X F(x,y)\mu(\mathrm{d}x) \right)^{q} \nu(\mathrm{d}y) \right)^{\frac{1}{q}} \le \int_X \left(\int_Y F(x,y)^q \nu(\mathrm{d}y) \right)^{\frac{1}{q}} \mu(\mathrm{d}x).$$

Soit $\phi(y) := \int_X F(x,y)\mu(\mathrm{d}x) \in [0,\infty]$, ce qui est bien défini pour ν-presque tout y, et $\psi : Y \to \mathbb{R}_+$ telle que $\|\psi\|_{L^{q'}(\nu)} \le 1$, où q' est l'exposant dual de q défini par $q^{-1} + (q')^{-1} = 1$. Par Fubini,

$$\int_Y \psi(y)\phi(y)\nu(\mathrm{d}y) = \int_Y \left(\int_X F(x,y)\psi(y)\mu(\mathrm{d}x) \right)\nu(\mathrm{d}y) = \int_X \left(\int_Y F(x,y)\psi(y)\nu(\mathrm{d}y) \right)\mu(\mathrm{d}x),$$

et on conclut en appliquant Hölder à l'intégrale intérieure. $\square$

Proposition 3.2. *Le produit de convolution a les propriétés suivantes :*

(i) $\|f*\phi\|_{L^p} \le \|\phi\|_{L^p}\|f\|_{L^1}$, *pour* $1\le p\le\infty$, $\phi\in\mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$ *et* $f\in L^1(\mathbb{R}^d)$,

(ii) $\|f*\phi\|_{C^{0,\alpha}} \le \|\phi\|_{C^{0,\alpha}}\|f\|_{L^1}$, *pour* $0\le\alpha<1$, $\phi\in\mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$ *et* $f\in L^1(\mathbb{R}^d)$,

(iii) *si* $1\le p\le\infty$, $\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=1$, $\phi\in\mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$ *et* $f\in L^{p'}(\mathbb{R}^d)$, *alors* $\|\phi*f\|_{L^\infty}\le\|\phi\|_{L^p}\|f\|_{L^{p'}}$,

(iv) *si* $1+\frac{1}{r}=\frac{1}{p}+\frac{1}{q}$, $\phi\in\mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$ *et* $f\in L^q(\mathbb{R}^d)$, *alors* $\|\phi*f\|_{L^r}\le\|\phi\|_{L^p}\|f\|_{L^q}$ *(l'inégalité de Young).*

Remarque 3.3. En reformulant le résultat, on peut dire que la convolution par une mesure finie est un opérateur continu de L^p dans lui-même, et de $C^{0,\alpha}$ dans lui-même. La convolution par une fonction dans $L^{p'}$ est un opérateur continu de L^p dans C_0. La convolution par une fonction dans L^q est un opérateur continu de L^p dans L^r. Dans tous les cas, on étend l'opérateur en question par densité. Le résultat coincide avec la définition de la convolution par la formule

$$(f*g)(x) := \int_{\mathbb{R}^d} f(x-y)g(y)\,\mathrm{d}y, \qquad \text{pour presque tout } x\in\mathbb{R}^d.$$

Démonstration de la Proposition 3.2. Pour montrer (i), on peut supposer sans perdre la généralité que $\phi, f\ge 0$, car $|(\phi*f)(x)|\le\int_{\mathbb{R}^d}|\phi(x-y)||f(x)|\,\mathrm{d}x$. Si $p<\infty$, on peut appliquer l'inégalité de Minkowski. Si $p=\infty$, le résultat est immédiat.

On procède à la preuve de (ii). Dans le contexte des espaces de Hölder, on notera

$$[\phi]_\alpha := \sup_{x\neq y}\frac{|\phi(x)-\phi(y)|}{|x-y|^\alpha},$$

donc $\|\phi\|_{C^{0,\alpha}} = \|\phi\|_{L^\infty}+[\phi]_\alpha$.

On sait déjà que $\|\phi*f\|_{L^\infty}\le\|\phi\|_{L^\infty}\|f\|_{L^1}$. On a aussi, pour tout $z\in\mathbb{R}^d$,

$$\|\tau_z(\phi*f)-\phi*f\|_{L^\infty} = \|(\tau_z\phi-\phi)*f\|_{L^\infty}\le\|\tau_z\phi-\phi\|_{L^\infty}\|f\|_{L^1}\le|z|^\alpha[\phi]_\alpha\|f\|_{L^1}.$$

L'inégalité (iii) est une conséquence directe de l'inégalité de Hölder.

Pour montrer (iv), il suffit de vérifier que pour tous $\phi\in\mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$, $f\in L^q(\mathbb{R}^d)$ et $\psi\in\mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$

$$\int_{\mathbb{R}^{2d}}\phi(x-y)f(y)\psi(x)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\le\|\phi\|_{L^p}\|f\|_{L^q}\|\psi\|_{L^{r'}}.$$

Sans perdre la généralité supposons que $\phi, f, \psi\ge 0$. Soit $\alpha,\beta,\gamma\in[0,1]$ et $a,b,c\in[1,\infty]$ tels que $a^{-1}+b^{-1}+c^{-1}=1$. Posons $F(x,y):=f(y)^\beta\psi(x)^{1-\gamma}$, $G(x,y):=\psi(x)^\gamma\phi(x-y)^{1-\alpha}$ et $H(x,y):=\phi(x-y)^\alpha f(y)^{1-\beta}$. L'inégalité de Hölder implique

$$\int_{\mathbb{R}^{2d}}\phi(x-y)f(y)\psi(x)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_{\mathbb{R}^{2d}}FGH\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\le\|F\|_{L^a}\|G\|_{L^b}\|H\|_{L^c}.$$

Par Fubini,

$$\|F\|_{L^a} = \|f\|_{L^{a\beta}}^{\beta}\|\psi\|_{L^{a(1-\gamma)}}^{1-\gamma},$$
$$\|G\|_{L^b} = \|\psi\|_{L^{b\gamma}}^{\beta}\|\phi\|_{L^{b(1-\alpha)}}^{1-\gamma},$$
$$\|H\|_{L^c} = \|\phi\|_{L^{c\alpha}}^{\beta}\|f\|_{L^{c(1-\beta)}}^{1-\gamma},$$

donc la preuve sera finie si on choisit $a,b,c,\alpha,\beta,\gamma$ de sorte que

$$c\alpha = b(1-\alpha) = p, \qquad a\beta = c(1-\beta) = q, \qquad b\gamma = a(1-\gamma) = r',$$

ce qui a la solution $a=p', b=q', c=r, \alpha=\frac{p}{r}, \beta=\frac{q}{p'}$ et $\gamma=\frac{r'}{q'}$. □

Définition 3.4. La suite $(\Phi_N)_{N=1}^{\infty} \subset L^1(\mathbb{R}^d)$ est une *approximation de l'identité* si

(H1) $\int_{\mathbb{R}^d} \Phi_N(x)\,\mathrm{d}x = 1$ pour tout N,

(H2) $\sup_N \int_{\mathbb{R}^d} |\Phi_N(x)|(\,\mathrm{d}x) < \infty$,

(H3) pour tout $\delta > 0$, $\lim_{N\to\infty} \int_{|x|\geq\delta} |\Phi_N(x)|(\,\mathrm{d}x) = 0$.

Proposition 3.5. *Soit (Φ_N) une approximation de l'identité. Si $1 \leq p < \infty$ et $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$, alors $\lim_{N\to\infty} \|\Phi_N * f - f\|_{L^p} = 0$. Si $f \in C_0(\mathbb{R}^d)$, alors $\lim_{N\to\infty} \|\Phi_N * f - f\|_{L^\infty} = 0$.*

Remarque 3.6. Il n'est pas vrai que $f \in C^\alpha(\mathbb{R}^d)$ implique $\lim_{N\to\infty} \|\Phi_N * f - f\|_{C^\alpha} = 0$.

3.2 Fonction maximale de Hardy-Littlewood

Les fonctions maximales sont indispensable lorsqu'on étudie des problèmes liés à la convergence presque partout.

Définition 3.7. Pour tout $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^d)$ on définit

$$(Mf)(x) := \sup_{B\ni x} \frac{1}{|B|} \int_B |f(y)|\,\mathrm{d}y,$$

où le supremum est pris sur l'ensemble des boules qui contiennent x.

Sans changer la valeur de $(Mf)(x)$, il suffit de se restreindre aux boules de centre et rayon rationnels, donc on voit que Mf est une fonction mesurable (en fait semi-continue inférieurement). Plus précisément, pour chaque boule B de centre et rayon rationnels on pose

$$(M_B f)(x) := \begin{cases} 0 & \text{si } x \notin B, \\ \frac{|\mu|(B)}{|B|} & \text{si } x \in B. \end{cases}$$

C'est une fonction semi-continue inférieurement, donc $Mf = \sup_B M_B f$ aussi.

Bien évidemment, l'application $f \mapsto Mf$ n'est pas un opérateur linéaire, mais un opérateur dit *sous-linéaire*, c'est à dire

$$M(f+g) \leq Mf + Mg \quad \text{ponctuellement, pour tous } f, g \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^d).$$

Remarque 3.8. Si $f \notin L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^d)$, alors $(Mf)(x) = \infty$ pour tout $x \in \mathbb{R}^d$. Il peut arriver que $(Mf)(x) = \infty$ pour tout $x \in \mathbb{R}^d$, même si $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^d)$.

Remarque 3.9. Dans la définition de la fonction maximale, certains auteurs préfèrent considérer uniquement les boules de centre x, au lieu des boules contenant x. Cela n'altérerait qu'assez peu la théorie qui suivra.

On aura besoin du concept général suivant.

Définition 3.10. Soit (X,μ) un espace mesurable et $1 \le p < \infty$. On dit qu'une fonction mesurable $g : X \to \mathbb{C}$ appartient à l'espace L^p-faible si

$$\|g\|_{L^{p,\infty}}^p := \sup_{\lambda>0} \big(\lambda^p \mu(\{x \in X : |g(x)| > \lambda\})\big) < \infty.$$

Par convention, on pose aussi $\|g\|_{L^{\infty,\infty}} := \|g\|_{L^\infty}$. On introduit la notation

$$m_g(\lambda) := \mu\{x : |g(x)| > \lambda\}.$$

C'est une fonction décroissante, continue à droite.

Remarque 3.11. Pour tout $\lambda > 0$ on a l'inégalité de Markov

$$\int_X |g|^p \mu(\mathrm{d}x) \ge \int_{\{|g|>\lambda\}} |g|^p \mu(\mathrm{d}x) \ge \lambda^p m_g(\lambda),$$

donc $\|g\|_{L^{p,\infty}} \le \|g\|_{L^p}$ pour tout $1 \le p \le \infty$ et $g \in L^p(X)$.

Le lemme suivant relie les normes L^p aux mesures des ensembles de niveau.

Lemme 3.12. *Pour toute fonction positive mesurable* $g : X \to \mathbb{R}_+$

$$\int_X g(\theta)^p \,\mathrm{d}\theta = \int_0^\infty p\lambda^{p-1} m_g(\lambda)\,\mathrm{d}\lambda. \tag{3.1}$$

Démonstration. Considérons l'ensemble mesurable

$$X \times \mathbb{R}_+ \supset A := \{(x,\lambda) : g(x) > \lambda\}.$$

Soit χ_A sa fonction caractéristique. Par le théorème de Fubini,

$$\begin{aligned}\int_{X\times\mathbb{R}_+} p\lambda^{p-1}\chi_A(x,\lambda)\,\mathrm{d}\lambda\,\mu(\mathrm{d}x) &= \int_X \Big(\int_0^\infty p\lambda^{p-1}\chi_A(x,\lambda)\,\mathrm{d}\lambda\Big)\mu(\mathrm{d}x) \\ &= \int_X \Big(\int_0^{g(x)} p\lambda^{p-1}\,\mathrm{d}\lambda\Big)\mu(\mathrm{d}x) = \int_X g(x)^p \mu(\mathrm{d}x).\end{aligned}$$

D'un autre côté,

$$\int_{X\times\mathbb{R}_+} p\lambda^{p-1}\chi_A(x,\lambda)\,\mathrm{d}\lambda\mu(\mathrm{d}x) = \int_0^\infty p\lambda^{p-1}\Big(\int_X \chi_A(x,\lambda)\mu(\mathrm{d}x)\Big)\mathrm{d}\lambda,$$

ce qui est égal au membre de droite de (3.1). □

Théorème 3.13. *La fonction maximale de Hardy-Littlewood a les propriétés suivantes :*

(i) $\|Mf\|_{L^{1,\infty}} \le 3^d \|f\|_{L^1}$, *pour tout* $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$,

(ii) pour tout $1 < p \le \infty$ *il existe une constante* $C = C(p,d) < \infty$ *telle que* $\|Mf\|_{L^p} \le C\|f\|_{L^p}$ *pour tout* $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$.

□

Démonstration. Soit $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ et $0 < \lambda < \infty$. Il faut montrer que $|\{x : (Mf)(x) > \lambda\}| \leq 3^d \lambda^{-1} \|f\|_{L^1}$. Par la régularité de la mesure de Lebesgue, il suffit de vérifier que pour tout ensemble compact $K \subset \mathbb{R}^d$ tel que $(Mf)(x) > \lambda$ pour tout $x \in K$, on a $|K| \leq 3^d \lambda^{-1} \|f\|_{L^1}$. Par la définition de M, pour tout $y \in K$ il existe une boule ouverte $B_y \subset \mathbb{R}^d$ telle que

$$\int_{B_y} |f(x)| \, \mathrm{d}x > \lambda |B_y|.$$

On en extrait une famille finie $B_{y_1}, \ldots, B_{y_M}$. On va montrer qu'il existe une sous-famille

$$\{\widetilde{B}_1, \ldots, \widetilde{B}_L\} = \{B(x_1, r_1), \ldots, B(x_L, r_L)\} \subset \{B_{y_1}, \ldots, B_{y_M}\}$$

de boules disjointes telles que $K \subset \cup_{j=1}^L B(x_j, 3r_j)$ (c'est la version “finie” du lemme de recouvrement de Vitali). Pour cela, on définit $B(x_1, r_1)$ comme la boule la plus grande parmi $B_{y_1}, \ldots, B_{y_M}$. Ensuite, on enlève toutes les boules contenues dans $B(x_1, 3r_1)$, et on continue par récurrence.

D'un côté, $|K| \leq 3^d \sum_{j=1}^L |B(x_j, r_j)|$. D'un autre côté,

$$\sum_{j=1}^L |B(x_j, r_j)| \lambda \leq \sum_{j=1}^L \int_{B(x_j, r_j)} |f(x)| \, \mathrm{d}x \leq \|f\|_{L^1}.$$

Pour montrer (ii), observons d'abord que

$$\|Mf\|_{L^\infty} \leq \|f\|_{L^\infty}$$

pour toute fonction bornée f. Soit $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$ et $A := \{(x, \lambda) : \lambda < 2|f(x)|\}$. On va démontrer que pour tout $\lambda > 0$

$$m_{Mf}(\lambda) \leq \frac{2 \times 3^d}{\lambda} \int_{\mathbb{R}^d} \chi_A(x, \lambda) |f(x)| \, \mathrm{d}x. \tag{3.2}$$

En effet, soit $f_1 := \chi_A(x, \lambda) f(x)$ et $f_2(x) := (1 - \chi_A(x, \lambda)) f(x)$. On a alors $\|f_2\|_{L^\infty} \leq \lambda/2$, donc $\|Mf_2\|_{L^\infty} \leq \lambda/2$, donc

$$\begin{aligned}
|\{Mf > \lambda\}| &= |\{M(f_1 + f_2) > \lambda\}| \leq |\{Mf_1 + Mf_2 > \lambda\}| \leq |\{Mf_1 > \lambda/2\}| + |\{Mf_2 > \lambda/2\}| \\
&\leq \frac{2}{\lambda} \|Mf_1\|_{L^{1,\infty}} + 0 \leq \frac{2 \times 3^d}{\lambda} \|f_1\|_{L^1} = \frac{2 \times 3^d}{\lambda} \int_{\mathbb{R}^d} \chi_A(x, \lambda) |f(x)| \, \mathrm{d}x,
\end{aligned}$$

ce qui prouve (3.2).

Si $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$, alors le Lemme 3.12 nous permet de conclure que

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^d} (Mf)(x)^p \, \mathrm{d}x &= \int_0^\infty p \lambda^{p-1} m_{Mf}(\lambda) \, \mathrm{d}\lambda \leq \int_0^\infty p \lambda^{p-1} \frac{2 \times 3^d}{\lambda} \int_{\mathbb{R}^d} \chi_A(x, \lambda) |f(x)| \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}\lambda \\
&= \frac{2 \times 3^d p}{p-1} \int_{\mathbb{R}^d} |f(x)| \int_0^\infty (p-1) \lambda^{p-2} \chi_A(x, \lambda) \, \mathrm{d}\lambda \, \mathrm{d}x \\
&= \frac{2 \times 3^d p}{p-1} \int_{\mathbb{R}^d} |f(x)| \int_0^{2|f(x)|} (p-1) \lambda^{p-2} \, \mathrm{d}\lambda \, \mathrm{d}x \\
&= \frac{2 \times 3^d p}{p-1} \int_{\mathbb{R}^d} |f(x)| (2|f(x)|)^{p-1} \, \mathrm{d}x = \frac{2 \times 3^d p \times 2^{p-1}}{p-1} \int_{\mathbb{R}^d} |f(x)|^p \, \mathrm{d}x,
\end{aligned}$$

ce qui est l'inégalité désirée avec $C_p = 2\big(3^d p/(p-1)\big)^{\frac{1}{p}}$. $\square$

La méthode de démonstration de (ii) présentée ici s'appelle *interpolation réelle*, et on a démontré en fait un cas particulier du *théorème d'interpolation de Marcinkiewicz*.

3.3 Noyaux de Calderón-Zygmund

On va étudier des opérateurs de convolution dont le noyau a une singularité (non intégrable) en origine, d'où le nom "intégrales singulières". Les critères, basés sur l'inégalité de Hölder, de la Proposition 3.2 sont trop faibles dans des cas intéressants.

Définition 3.14. On dit qu'une fonction mesurable $K : \mathbb{R}^d \setminus \{0\} \to \mathbb{C}$ est un *noyau de Calderón-Zygmund* s'il existe une constante $B > 0$ telle que

(H1) $|K(x)| \leq B|x|^{-d}$, pour tout $x \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$,

(H2) $\int_{|x|>2|y|} |K(x) - K(x-y)| \, \mathrm{d}x \leq B$, pour tout $y \in \mathbb{R}^d$,

(H3) $\int_{r<|x|<s} K(x) \, \mathrm{d}x = 0$, pour tout $0 < r < s < \infty$.

La condition (H2) s'appelle la *condition de Hörmander*. Il peut ne pas être évident comment la vérifier dans la pratique, c'est pourquoi il est utile de disposer de conditions suffisantes garantissant (H2).

Lemme 3.15. *Si $K : \mathbb{R}^d \setminus \{0\} \to \mathbb{C}$ une fonction dérivable qui vérifie*

(H2') $|\nabla K(x)| \leq B|x|^{-d-1}$, pour tout $x \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$,

alors $\int_{|x|>2|y|} |K(x) - K(x-y)| \, \mathrm{d}x \leq CB$ pour tout $y \in \mathbb{R}^d$, où $C = C(d)$.

Démonstration. Si (H2') est vrai, alors pour tous $x, y \in \mathbb{R}^d$ tels que $2|y| < |x|$ on a, par le théorème des accroissements finis, $|K(x) - K(x-y)| \leq B2^{d+1}|x|^{-d-1}|y|$. On conclut en intégrant par rapport à x. □

Définition 3.16. La *valeur principale* d'un noyau de Calderón-Zygmund K est une distribution tempérée définie par

$$(\mathrm{vp}\, K)(f) := \lim_{\epsilon \to 0^+} \int_{|x|>\epsilon} K(x) f(x) \, \mathrm{d}x, \qquad \text{pour tout } f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d).$$

Pour montrer que cette formule définit effectivement un élément de $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^d)$, pour $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$ écrivons $f(x) = \chi_{\{|x|<1\}}(x) f(0) + |x| g(x) + \chi_{\{|x|\geq 1\}}(x) f(x)$, donc $\|g\|_{L^\infty} \leq \|f\|_{L^\infty} + \|\nabla f\|_{L^\infty}$ et $g(x) = 0$ pour $|x| \geq 1$. Alors

$$\lim_{\epsilon \to 0^+} \int_{|x|>\epsilon} K(x) f(0) \chi_{\{|x|<1\}}(x) \, \mathrm{d}x = \lim_{\epsilon \to 0^+} f(0) \int_{\epsilon<|x|<1} K(x) \, \mathrm{d}x = 0,$$

d'après (H3),

$$\lim_{\epsilon \to 0^+} \int_{|x|>\epsilon} K(x)|x| g(x) \, \mathrm{d}x = \int_{|x|<1} K(x)|x| g(x) \, \mathrm{d}x,$$

et

$$\lim_{\epsilon \to 0^+} \int_{|x|>\epsilon} K(x) \chi_{\{|x|\geq 1\}}(x) f(x) \, \mathrm{d}x = \int_{|x|\geq 1} K(x) f(x) \, \mathrm{d}x.$$

On a donc

$$\lim_{\epsilon \to 0^+} \int_{|x|>\epsilon} K(x) f(x) \, \mathrm{d}x = \int_{|x|<1} K(x)|x| g(x) \, \mathrm{d}x + \int_{|x|\geq 1} K(x) f(x) \, \mathrm{d}x,$$

et on voit que

$$\left|\lim_{\epsilon\to 0^+}\int_{|x|>\epsilon} K(x)f(x)\,\mathrm{d}x\right| \leq CB(\|f\|_{L^\infty}+\|\nabla f\|_{L^\infty}+\|f\|_{L^1}).$$

Lemme 3.17. *Si K est un noyau de Calderón-Zygmund, alors $\|\widehat{\mathrm{vp}\,K}\|_{L^\infty} \leq CB$, où $C = C(d)$.*

Démonstration. Pour $0 < r < s < \infty$, soit

$$m_{r,s}(\xi) := \int_{r<|x|<s} \mathrm{e}^{-2\pi i x\cdot\xi} K(x)\,\mathrm{d}x.$$

On va montrer que

$$\sup_{0<r<s<\infty} \|m_{r,s}\|_{L^\infty} \leq CB, \tag{3.3}$$

où B est la constante dans (H1) et (H2), et C dépend uniquement de la dimension d.

On fixe $0 < r < s < \infty$ et $\xi \in \mathbb{R}^d$. Il faut vérifier que $|m_{r,s}(\xi)| \leq CB$. Supposons d'abord que $r < |\xi| < s$ (on va commenter plus tard les cas $|\xi| \leq r$ et $|\xi| \geq s$). On estime séparément l'intégrale sur $\{r < |x| < |\xi|^{-1}\}$ et l'intégrale sur $\{|\xi|^{-1} < |x| < s\}$. Dans la région $|x| < |\xi|^{-1}$ la phase "ne varie pas beaucoup", donc on peut s'attendre à ce que la condition d'annulation joue un rôle, ce qui est effectivement le cas :

$$\begin{aligned}\left|\int_{r<|x|<|\xi|^{-1}} \mathrm{e}^{-2\pi i x\cdot\xi} K(x)\,\mathrm{d}x\right| &= \left|\int_{r<|x|<|\xi|^{-1}} (\mathrm{e}^{-2\pi i x\cdot\xi}-1)K(x)\,\mathrm{d}x\right| \\ &\leq 2\pi|\xi|\int_{r<|x|<|\xi|^{-1}} |x||K(x)|\,\mathrm{d}x \leq CB|\xi|\int_{|x|<|\xi|^{-1}} |x|^{-d+1}\,\mathrm{d}x \leq CB.\end{aligned}$$

Dans la région $|\xi|^{-1} < |x| < s$, la condition (H2) joue les premiers violons. L'observation cruciale est que

$$\begin{aligned}\int_{|\xi|^{-1}<\left|x-\frac{\xi}{2|\xi|^2}\right|<s} \mathrm{e}^{-2\pi i x\cdot\xi} K(x)\,\mathrm{d}x &= \int_{|\xi|^{-1}<|x|<s} \mathrm{e}^{-2\pi i\left(x+\frac{\xi}{2|\xi|^2}\right)\cdot\xi} K\Big(x+\frac{\xi}{2|\xi|^2}\Big)\,\mathrm{d}x \\ &= -\int_{|\xi|^{-1}<|x|<s} \mathrm{e}^{-2\pi i x\cdot\xi} K\Big(x+\frac{\xi}{2|\xi|^2}\Big)\,\mathrm{d}x,\end{aligned}$$

ce qui donne, après une transformation élémentaire,

$$\begin{aligned}2\int_{|\xi|^{-1}<|x|<s} \mathrm{e}^{-2\pi i x\cdot\xi} K\Big(x+\frac{\xi}{2|\xi|^2}\Big)\,\mathrm{d}x &= \int_{|\xi|^{-1}<|x|<s} \mathrm{e}^{-2\pi i x\cdot\xi}\Big(K(x)-K\Big(x+\frac{\xi}{2|\xi|^2}\Big)\Big)\,\mathrm{d}x \\ &\quad + \Big(\int_{|\xi|^{-1}<|x|<s} - \int_{|\xi|^{-1}<\left|x-\frac{\xi}{2|\xi|^2}\right|<s}\Big)\mathrm{e}^{-2\pi i x\cdot\xi} K(x)\,\mathrm{d}x.\end{aligned} \tag{3.4}$$

Avertissement : les formules qui suivent sont difficiles à comprendre si on ne fait pas de dessins. Affrontons d'abord la deuxième ligne, qui requiert juste (H1). En effet,

$$\begin{gathered}B\Big(0,s-\frac{1}{2}|\xi|^{-1}\Big)\setminus B\Big(0,\frac{3}{2}|\xi|^{-1}\Big) \subset \Big\{|\xi|^{-1} < \Big|x-\frac{\xi}{2|\xi|^2}\Big| < s\Big\} \subset B\Big(0,s+\frac{1}{2}|\xi|^{-1}\Big)\setminus B\Big(0,\frac{1}{2}|\xi|^{-1}\Big), \\ B\Big(0,s-\frac{1}{2}|\xi|^{-1}\Big)\setminus B\Big(0,\frac{3}{2}|\xi|^{-1}\Big) \subset \big\{|\xi|^{-1} < |x| < s\big\} \subset B\Big(0,s+\frac{1}{2}|\xi|^{-1}\Big)\setminus B\Big(0,\frac{1}{2}|\xi|^{-1}\Big).\end{gathered}$$

De la relation de la théorie des ensembles (facile à vérifier) $(A\setminus B)\setminus(C\setminus D)\subset(A\setminus C)\cup(D\setminus B)$ on a

$$\Big(B\Big(0,s+\frac{1}{2}|\xi|^{-1}\Big)\setminus B\Big(0,\frac{1}{2}|\xi|^{-1}\Big)\Big)\setminus\Big(B\Big(0,s-\frac{1}{2}|\xi|^{-1}\Big)\setminus B\Big(0,\frac{3}{2}|\xi|^{-1}\Big)\Big)\subset$$
$$\Big(B\Big(0,s+\frac{1}{2}|\xi|^{-1}\Big)\setminus B\Big(0,s-\frac{1}{2}|\xi|^{-1}\Big)\Big)\cup\Big(B\Big(0,\frac{3}{2}|\xi|^{-1}\Big)\setminus B\Big(0,\frac{1}{2}|\xi|^{-1}\Big)\Big).$$

On vérifie facilement en utilisant (H1) que l'intégrale de $|K(x)|$ sur chacun de ces deux régions s'estime par CB.

Il reste la première ligne de (3.4). Ici, (H2) s'applique.

Dans le cas où par exemple $|\xi|^{-1}\le r$, on peut écrire $\int_{r<|x|<s}=\int_{|\xi|^{-1}<|x|<s}-\int_{|\xi|^{-1}<|x|<r}$ et appliquer le raisonnement ci-dessus. Cela termine la preuve de (3.3).

Soit $\phi\in\mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$. On va montrer que $|\widehat{(\mathrm{vp}\,K)}(\phi)|=|(\mathrm{vp}\,K)(\widehat{\phi})|\le CB\|\phi\|_{L^1}$. Par le théorème de représentation $(L^1)^*=L^\infty$, cela signifiera que $\widehat{\mathrm{vp}\,K}\in L^\infty(\mathbb{R}^d)$ et donnera la borne voulue sur $\widehat{\mathrm{vp}\,K}$. Par la définition de vp K on a

$$\begin{aligned}
|(\mathrm{vp}\,K)(\widehat{\phi})|&=\left|\lim_{\epsilon\to0^+}\int_{|x|>\epsilon}K(x)\widehat{\phi}(x)\,\mathrm{d}x\right|\le\sup_{0<r<s<\infty}\left|\int_{r<|x|<s}K(x)\widehat{\phi}(x)\,\mathrm{d}x\right|\\
&\le\sup_{0<r<s<\infty}\left|\int_{r<|x|<s}K(x)\int_{\mathbb{R}^d}\mathrm{e}^{-2\pi ix\cdot\xi}\phi(\xi)\,\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}x\right|\\
&=\sup_{0<r<s<\infty}\left|\int_{\mathbb{R}^d}\phi(\xi)\int_{r<|x|<s}K(x)\mathrm{e}^{-2\pi ix\cdot\xi}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}\xi\right|\\
&\le\sup_{0<r<s<\infty}\|\phi\|_{L^1}\|m_{r,s}\|_{L^\infty}\le CB\|\phi\|_{L^1}.
\end{aligned}$$

□

Définition 3.18. L'opérateur de Calderón-Zygmund associé à K est défini par $Tf:=(\mathrm{vp}\,K)*f$ pour tout $f\in\mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$, autrement dit

$$(Tf)(x):=\lim_{\epsilon\to0^+}\int_{|y|>\epsilon}K(y)f(x-y)\,\mathrm{d}y=\lim_{\epsilon\to0^+}\int_{|x-y|>\epsilon}K(x-y)f(y)\,\mathrm{d}y,\qquad\text{pour } f\in\mathscr{S}(\mathbb{R}^d).$$

Exemple 3.19. Voici quelques opérateurs de Calderón-Zygmund.

(i) Soit $K:\mathbb{R}\setminus\{0\}\to\mathbb{C}$ donné par $K(x)=\frac{1}{\pi x}$. Il est clair que K vérifie les conditions (H1), (H2') et (H3). L'opérateur de Calderón-Zygmund correspondant est la *transformation de Hilbert* sur $\mathbb{R}$.

(ii) Soit $d\ge1$. On définit $K_i(x):=x_i/|x|^{d+1}$. Les opérateurs de Calderón-Zygmund associés, notés R_i, sont appelés les *transformations de Riesz*.

(iii) Pour $d\ge3$ on définit

$$K_{ij}(x)=\begin{cases}\frac{x_ix_j}{|x|^{d+2}} & \text{si } i\ne j,\\ \frac{x_i^2-d^{-1}|x|^2}{|x|^{d+2}} & \text{si } i=j.\end{cases}$$

Les opérateurs de Calderón-Zygmund assocés R_{ij} sont les *transformations de Riesz doubles*. Leur importance vient du fait que

$$C_dR_{ij}(\Delta\phi)=\partial_{x_i}\partial_{x_j}\phi-\frac{1}{d}\delta_{ij}\Delta\phi,\qquad\text{pour tout } \phi\in\mathscr{S}(\mathbb{R}^d)\text{ et } 1\le i,j\le d.$$

On le vérifiera dans l'Exercice 3.4.

Proposition 3.20. *Si K est un noyau de Calderón-Zygmund, alors $\|Tf\|_{L^2} \leq CB\|f\|_{L^2}$ pour tout $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$, où $C = C(d) > 0$.*

Démonstration. Par la Proposition 1.27, pour tout $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$ on a

$$|\widehat{Tf}(\xi)| = |\widehat{\mathrm{vp}\, K}(\xi)\widehat{f}(\xi)| \leq CB|\widehat{f}(\xi)|, \qquad \text{pour tout } \xi \in \mathbb{R}^d,$$

où la dernière inégalité vient du Lemme 3.17. Par Plancherel, on obtient $\|Tf\|_{L^2} \leq CB\|f\|_{L^2}$. □

Définition 3.21. On définit l'opérateur de Calderón-Zygmund $T : L^2(\mathbb{R}^d) \to L^2(\mathbb{R}^d)$ comme l'unique extension continue de l'opérateur $T : \mathscr{S}(\mathbb{R}^d) \to L^2(\mathbb{R}^d)$.

Lemme 3.22. *Si $f \in L^2_{\mathrm{comp}}(\mathbb{R}^d)$ (c'est-à-dire f est une fonction dans $L^2(\mathbb{R}^d)$ dont le support est borné) et $x_0 \notin \mathrm{supp}(f)$, alors Tf est une fonction continue au voisinage de x_0 et*

$$(Tf)(x_0) = \int_{\mathbb{R}^d} K(x_0 - y)f(y)\,\mathrm{d}y.$$

Démonstration. Soit $R > 0$ tel que $\mathrm{supp}(f) \subset B(0,R)$ et $r > 0$ tel que $B(x_0, 2r) \cap \mathrm{supp}(f) = \emptyset$. Posons $\widetilde{K} := K\chi_{\{r<|x|<|x_0|+R+r\}}$. Alors $\widetilde{K} \in L^2(\mathbb{R}^d)$, donc

$$(\widetilde{T}f)(x) := \int_{\mathbb{R}^d} \widetilde{K}(x-y)f(y)\,\mathrm{d}y$$

est une fonction continue bornée $\mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$. Si $f_n \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$ avec $\mathrm{supp}(f) \subset B(0,R) \setminus B(x_0, 2r)$, alors on voit que $(Tf_n)(x) = (\widetilde{T}f_n)(x)$ pour tout x tel que $|x_0 - x| < r$. En prenant $f_n \to f$ dans $L^2(\mathbb{R}^d)$ on obtient $(Tf)(x) = (\widetilde{T}f)(x)$ pour presque tout $|x - x_0| < r$, ce qui montre la continuité de Tf au voisinage de x_0 et que

$$(Tf)(x_0) = (\widetilde{T}f)(x_0) = \int_{\mathbb{R}^d} \widetilde{K}(x_0 - y)f(y)\,\mathrm{d}y = \int_{\mathbb{R}^d} K(x_0 - y)f(y)\,\mathrm{d}y.$$

□

3.4 Estimations L^1-faible et continuité dans L^p

Le but principal de cette section est de montrer ce qui suit.

Proposition 3.23. *Soit $T : L^2(\mathbb{R}^d) \to L^2(\mathbb{R}^d)$ un opérateur linéaire borné, $\|T\|_{\mathscr{L}(L^2)} \leq B$, tel que pour toute fonction $f \in L^2_{\mathrm{comp}}(\mathbb{R}^d)$, c'est-à-dire une fonction dans $L^2(\mathbb{R}^d)$ dont le support est borné,*

$$(Tf)(x) = \int_{\mathbb{R}^d} K(x-y)f(y)\,\mathrm{d}y, \qquad \textit{pour tout } x \notin \mathrm{supp}(f),$$

où $K : \mathbb{R}^d \setminus \{0\} \to \mathbb{C}$ est une fonction mesurable localement bornée qui vérifie (H2). Alors $\|Tf\|_{L^{1,\infty}} \leq CB\|f\|_{L^1}$ pour tout $f \in L^1(\mathbb{R}^d) \cap L^2(\mathbb{R}^d)$, où $C = C(d)$.

Avant d'aborder la démonstration, on introduit un outil appelé la *décomposition de Calderón-Zygmund*. On dit que $Q \subset \mathbb{R}^d$ est un *cube de taille l* si $\left|Q \triangle \prod_{j=1}^d [x_j, x_j + l]\right| = 0$ pour un certain $x = (x_1, \ldots, x_d) \in \mathbb{R}^d$.

Lemme 3.24. *Si $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$, alors pour presque tout $x \in \mathbb{R}^d$*

$$\lim_{l\to 0^+} \sup_{Q\ni x} \frac{1}{l^d} \int_Q |f(y)-f(x)|\,\mathrm{d}y = 0,$$

où le supremum est pris sur l'ensemble des cubes ouverts de taille l qui contiennent x.

Démonstration. Il est bien de comparer ce lemme avec l'Exercice 3.3. Il suffit de montrer que pour tout $\epsilon > 0$ l'ensemble $\{x \in \mathbb{R}^d : \limsup_{l\to 0^+} \sup_{Q\ni x} \frac{1}{l^d} \int_Q |f(y)-f(x)|\,\mathrm{d}y \geq \epsilon\}$ est de mesure de Lebesgue nulle. Soit $f = g + h$, où $g \in C_0(\mathbb{R}^d)$. Alors

$$\begin{aligned}
&\limsup_{l\to 0^+} \sup_{Q\ni x} \frac{1}{l^d} \int_Q |f(y)-f(x)|\,\mathrm{d}y \\
&\leq \limsup_{l\to 0^+} \sup_{Q\ni x} \frac{1}{l^d} \int_Q |g(y)-g(x)|\,\mathrm{d}y + \sup_{l>0} \sup_{Q\ni x} \frac{1}{l^d} \int_Q |h(y)-h(x)|\,\mathrm{d}y \\
&\leq 0 + |h(x)| + \sup_{l>0, Q\ni x} \frac{1}{l^d} \int_Q |h(y)|\,\mathrm{d}y.
\end{aligned}$$

On observe que pour tout cube ouvert Q de taille l qui contient x on a $\frac{1}{l^d} \int_Q |h(y)|\,\mathrm{d}y \leq C(Mh)(x)$, où $C = C(d)$. En effet, soit B la boule du même centre que Q et du rayon $\frac{l\sqrt{d}}{2}$, de sorte que $x \in Q \subset B$ et

$$\frac{1}{l^d} \int_Q |h(y)|\,\mathrm{d}y \leq \frac{1}{l^d} \int_B |h(y)|\,\mathrm{d}y \leq \frac{C(d)}{|B|} \int_B |h(y)|\,\mathrm{d}y \leq C(Mh)(x).$$

On a donc

$$\limsup_{l\to 0^+} \sup_{Q\ni x} \frac{1}{l^d} \int_Q |f(y)-f(x)|\,\mathrm{d}y \leq |h(x)| + C(Mh)(x).$$

Comme $\|h\|_{L^1}$ peut être rendu arbitrairement petit, le Théorème 3.13 (i) permet de conclure. □

Corollaire 3.25. *Si $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$, alors pour presque tout $x \in \mathbb{R}^d$*

$$\liminf_{l\to 0^+} \inf_{Q\ni x} \frac{1}{l^d} \int_Q |f(y)|\,\mathrm{d}y \geq |f(x)|, \tag{3.5}$$

où l'infimum est pris pour tous les cubes ouverts de taille l qui contiennent x.

Démonstration. Pour tout $x, y \in \mathbb{R}^d$ il y a $|f(x)| - |f(y)| \leq |f(x) - f(y)|$, donc par le lemme précédent

$$|f(x)| - \liminf_{l\to 0^+} \inf_{Q\ni x} \frac{1}{l^d} \int_Q |f(y)|\,\mathrm{d}y = \limsup_{l\to 0^+} \sup_{Q\ni x} \frac{1}{l^d} \int_Q (|f(x)| - |f(y)|)\,\mathrm{d}y \leq 0.$$

□

Lemme 3.26. *Soit $f \in L^1(\mathbb{T}^d)$ et $\lambda > 0$. Il existe une famille (dénombrable) de cubes disjoints $\mathscr{B} = \{Q\}$ ayant les propriétés suivantes :*

(i) $\lambda < \frac{1}{|Q|} \int_Q |f(x)|\,\mathrm{d}x \leq 2^d \lambda$ *pour tout $Q \in \mathscr{B}$,*

(ii) $\left|\bigcup_{Q\in\mathscr{B}} Q\right| < \frac{1}{\lambda}\|f\|_{L^1}$ *si* $f \neq 0$,

(iii) *si* $b := \sum_{Q\in\mathscr{B}} \chi_Q f$ *et* $g := f - b$, *alors* $\|g\|_{L^\infty} \leq \lambda$.

Démonstration. Pour tout $m \in \mathbb{Z}$ on définit une collection $\mathscr{D}_m$ de cubes "dyadiques" de taille 2^m :

$$\mathscr{D}_m := \Big\{\prod_{j=1}^{d}]2^m x_j, 2^m(x_j+1)[: x_j \in \mathbb{Z}\Big\}.$$

Pour tout $Q_1 \in \mathscr{D}_{m_1}$ et $Q_2 \in \mathscr{D}_{m_2}$ on a $Q_1 \subset Q_2$, $Q_2 \subset Q_1$ ou $Q_1 \cap Q_2 = \emptyset$.

Prenons $m_0 \in \mathbb{Z}$ tel que $\|f\|_{L^1} \leq \lambda 2^{m_0}$, donc

$$\frac{1}{|Q|}\int_Q |f(x)|\,\mathrm{d}x \leq \lambda, \qquad \text{pour tout } Q \in \mathscr{D}_{m_0}. \tag{3.6}$$

Pour $m = m_0, m_0-1, m_0-2, \ldots$, on construit par récurrence des familles $\mathscr{B}_m \subset \mathscr{D}_m$ de manière suivante.

- On pose $\mathscr{B}_{m_0} := \emptyset$.
- Supposons que $\mathscr{B}_m$ est construit. Pour chaque cube $Q \in \mathscr{D}_m \setminus \mathscr{B}_m$, on considère les cubes $Q_1, \ldots, Q_{2^d} \in \mathscr{D}_{m-1}$ tels que $Q_k \subset Q$. On décrète que $Q_k \in \mathscr{B}_{m-1}$ si, et seulement si, $\frac{1}{|Q_k|}\int_{Q_k} |f(x)|\,\mathrm{d}x > \lambda$.

On définit $\mathscr{B} := \bigcup_{m\leq m_0} \mathscr{B}_m$. On va montrer par récurrence que, pour tout $m \leq m_0$,

$$\lambda < \frac{1}{|Q|}\int_Q |f(x)|\,\mathrm{d}x \leq 2^d\lambda \quad \text{si } Q \in \mathscr{B}_m, \qquad \frac{1}{|Q|}\int_Q |f(x)|\,\mathrm{d}x \leq \lambda \quad \text{si } Q \in \mathscr{D}_m \setminus \mathscr{B}_m.$$

Pour $m = m_0$ c'est vrai, par (3.6). Pour montrer l'hérédité, on observe que, par la construction, $Q \in \mathscr{B}_{m-1}$ implique qu'il existe $\widetilde{Q} \in \mathscr{D} \setminus \mathscr{B}_m$ tel que $Q \subset \widetilde{Q}$. Par l'hypothèse de récurrence on a $\frac{1}{|\widetilde{Q}|}\int_{\widetilde{Q}} |f(x)|\,\mathrm{d}x \leq \lambda$, donc, comme $|Q| = 2^{-d}|\widetilde{Q}|$, $\frac{1}{|Q|}\int_Q |f(x)|\,\mathrm{d}x \leq 2^d\lambda$. Cela montre (i), et (ii) s'obtient facilement en multipliant par $|Q|$ l'inégalité de gauche dans (i) et en sommant pour tout $Q \in \mathscr{B}$.

Pour montrer (iii), prenons $x = (x_1, \ldots, x_d) \in \mathbb{R}^d \setminus \bigcup_{Q\in\mathscr{B}} \overline{Q}$ tel que (3.5) est vrai, et tel que, pour tout $1 \leq j \leq d$ et tout $m \in \mathbb{Z}$, $2^{-m}x_j \notin \mathbb{Z}$ (la dernière condition signifie que x n'appartient au bord d'aucun cube dans $\mathscr{D}$). Pour tout $m \leq m_0$ il existe un cube ouvert $Q \in \mathscr{D}_m \setminus \mathscr{B}_m$ tel que $x \in Q$. En particulier $\frac{1}{|Q|}\int_Q |f(y)|\,\mathrm{d}y \leq \lambda$, et la taille de Q tend vers 0 quand $m \to -\infty$. Alors (3.5) donne $|f(x)| \leq \lambda$, ce qui termine la preuve. $\square$

Démonstration de la Proposition 3.23. En remplaçant T par $\frac{1}{B}T$ on peut supposer, sans perdre la généralité, que $B = 1$.

Soit $\lambda > 0$. Il faut montrer que

$$|\{x : |(Tf)(x)| > \lambda\}| \leq \frac{CB}{\lambda}\|f\|_{L^1}.$$

Soit $\mathscr{B}$ la famille de cubes donnée par le Lemme 3.26 pour cette valeur de λ. Pour tout $Q \in \mathscr{B}$ soit $f_Q := \chi_Q\Big(f - \frac{1}{|Q|}\int_Q f(x)\,\mathrm{d}x\Big)$. On pose

$$f_2 := \sum_{Q\in\mathscr{B}} f_Q = b - \sum_{Q\in\mathscr{B}} \chi_Q \frac{1}{|Q|}\int_Q f(x)\,\mathrm{d}x, \qquad f_1 := f - f_2 = g + \sum_{Q\in\mathscr{B}} \chi_Q \frac{1}{|Q|}\int_Q f(x)\,\mathrm{d}x.$$

En utilisant la linéarité de T, on écrit

$$|\{x : |(Tf)(x)| > \lambda\}| \leq |\{x : |(Tf_1)(x)| > \lambda/2\}| + |\{x : |(Tf_2)(x)| > \lambda/2\}|.$$

Le premier terme est facile :

$$|\{x : |(Tf_1)(x)| > \lambda/2\}| \leq \frac{4}{\lambda^2}\|Tf_1\|_{L^2}^2 \leq \frac{4}{\lambda^2}\|f_1\|_{L^2}^2 \leq \frac{4}{\lambda^2}\|f_1\|_{L^1}\|f_1\|_{L^\infty},$$

et on observe que $\|f_1\|_{L^1} \leq \|f\|_{L^1}$ et $\|f_1\|_{L^\infty} \leq 2^d\lambda$ (en effet, $\|g\|_{L^\infty} \leq \lambda \leq 2^d\lambda$ et pour tout $Q \in \mathscr{B}$ on a $\left|\frac{1}{|Q|}\int_Q f(x)\,\mathrm{d}x\right| \leq 2^d\lambda$).

C'est dans l'estimation de $|\{x : |(Tf_2)(x)| > \lambda/2\}|$ que la condition de Hörmander (H2) joue un rôle. Pour tout $Q \in \mathscr{B}$, soit Q^* le cube du même centre, et de taille $2\sqrt{d} \times$ (taille de Q). Alors

$$|\{x : |(Tf_2)(x)| > \lambda/2\}| \leq \left|\bigcup_{Q\in\mathscr{B}} Q^*\right| + \left|\{x \in \mathbb{R}^d \setminus \bigcup_{Q\in\mathscr{B}} Q^* : |(Tf_2)(x)| > \lambda/2\right|.$$

Le premier terme est $\leq \frac{C}{\lambda}\|f\|_{L^1}$ par le Lemme 3.26 (ii). On applique l'inégalité de Markov au deuxième terme :

$$\left|\{x \in \mathbb{R}^d \setminus \bigcup_{Q\in\mathscr{B}} Q^* : |(Tf_2)(x)| > \lambda/2\right| \leq \frac{2}{\lambda}\int_{\mathbb{R}^d\setminus\bigcup_{Q\in\mathscr{B}} Q^*} |(Tf_2)(x)|\,\mathrm{d}x \leq \frac{2}{\lambda}\sum_{Q\in\mathscr{B}}\int_{\mathbb{R}^d\setminus Q^*} |(Tf_Q)(x)|\,\mathrm{d}x.$$

Fixons $Q \in \mathscr{B}$. Pour tout $x \in \mathbb{R}^d \setminus Q^*$ on a

$$(Tf_Q)(x) = \int_{\mathbb{R}^d} K(x-y)f_Q(y)\,\mathrm{d}y = \int_{\mathbb{R}^d} (K(x-y) - K(x-y_Q))f_Q(y)\,\mathrm{d}y,$$

où y_Q est le centre du cube Q. La dernière inégalité est une conséquence du fait que $\int_{\mathbb{R}^d} f_Q(y)\,\mathrm{d}y = 0$. Par Fubini, on a

$$\int_{\mathbb{R}^d\setminus Q^*} |(Tf_Q)(x)|\,\mathrm{d}x \leq \int_{\mathbb{R}^d} |f_Q(y)| \int_{\mathbb{R}^d\setminus Q^*} |K(x-y) - K(x-y_Q)|\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \leq C\|f_Q\|_{L^1},$$

où la dernière inégalité vient de l'hypothèse (H2). En effet, soit l la taille de Q. Si $y \in Q$, alors $|y-y_Q| < \frac{l\sqrt{d}}{2}$. Si $x \in \mathbb{R}^d \setminus Q^*$, alors $|x-y_Q| \geq 2\sqrt{d} \times \frac{l}{2} > 2|y-y_Q|$. □

Remarque 3.27. Soulignons que seulement l'hypothèse (H2) a été utilisée dans la preuve de la Proposition 3.23.

Théorème 3.28. *Soit $T : L^2(\mathbb{R}^d) \to L^2(\mathbb{R}^d)$ un opérateur linéaire borné tel que pour toute fonction $f \in L^2_{\mathrm{comp}}(\mathbb{R}^d)$, c'est-à-dire une fonction dans $L^2(\mathbb{R}^d)$ dont le support est borné,*

$$(Tf)(x) = \int_{\mathbb{R}^d} K(x-y)f(y)\,\mathrm{d}y, \qquad \text{pour tout } x \notin \operatorname{supp}(f), \tag{3.7}$$

où $K : \mathbb{R}^d \setminus \{0\} \to \mathbb{C}$ est une fonction mesurable localement bornée qui vérifie (H2). Alors $\|Tf\|_{L^p} \leq CB\|f\|_{L^p}$ pour tout $f \in L^2(\mathbb{R}^d) \cap L^p(\mathbb{R}^d)$, où $C = C(d,p)$.

Démonstration. Soit d'abord $1 < p \leq 2$. La Proposition 3.23 et l'Exercice 3.2 donnent $\|Tf\|_{L^p} \leq CB\|f\|_{L^p}$ pour tout $f \in L^1(\mathbb{R}^d) \cap L^2(\mathbb{R}^d)$.

Si $f \in L^p(\mathbb{R}^d) \cap L^2(\mathbb{R}^d)$, alors on utilise un argument d'approximation standard. Soit $f_n \in L^1(\mathbb{R}^d) \cap L^2(\mathbb{R}^d)$ et $\|f_n - f\|_{L^p \cap L^2} \to 0$. Alors $g := \lim_{n\to\infty} Tf_n$ existe dans $L^p(\mathbb{R}^d) \cap L^2(\mathbb{R}^d)$. En particulier $g = \lim_{n\to\infty} Tf_n = Tf$, avec la limite prise au sens $L^2(\mathbb{R}^d)$, donc

$$\|Tf\|_{L^p} = \|g\|_{L^p} \leq \lim_{n\to\infty} \|Tf_n\|_{L^p} \leq CB \lim_{n\to\infty} \|f_n\|_{L^p} = CB\|f\|_{L^p}.$$

Soit maintenant $2 \leq p < \infty$. On va montrer que pour tout $g \in L^2_{\mathrm{comp}}(\mathbb{R}^2)$ on a

$$(T^*g)(x) = \int_{\mathbb{R}^d} \overline{K(-x+y)}g(y)\,\mathrm{d}y, \qquad \text{pour tout } x \notin \mathrm{supp}(g). \tag{3.8}$$

Supposons que c'est vrai et finissons la démonstration. Comme $T^* : L^2(\mathbb{R}^d) \to L^2(\mathbb{R}^d)$ est un opérateur borné et $\check{\overline{K}}$ vérifie (H2), la première partie de la preuve impliquera que $\|T^*g\|_{L^{p'}} \leq CB\|g\|_{L^{p'}}$ pour tout $g \in L^2(\mathbb{R}^d) \cap L^{p'}(\mathbb{R}^d)$, où p' est l'exposant dual de p, c'est-à-dire $(p')^{-1} + p^{-1} = 1$. Si $f \in L^2(\mathbb{R}^d) \cap L^p(\mathbb{R}^d)$, alors pour tout $g \in L^2(\mathbb{R}^d) \cap L^{p'}(\mathbb{R}^d)$

$$\left|\int_{\mathbb{R}^d} \overline{g(x)}(Tf)(x)\,\mathrm{d}x\right| = \left|\int_{\mathbb{R}^d} \overline{(T^*g)(x)}f(x)\,\mathrm{d}x\right| \leq \|T^*g\|_{L^{p'}}\|f\|_{L^p} \leq CB\|g\|_{L^{p'}}\|f\|_{L^p},$$

donc par le théorème de représentation $(L^{p'})^* = L^p$ on déduit $Tf \in L^p(\mathbb{R}^d)$ et $\|Tf\|_{L^p} \leq CB\|f\|_{L^p}$.

Il ne reste qu'à vérifier (3.8). Soit $g \in L^2_{\mathrm{comp}}(\mathbb{R}^d)$, $x_0 \in \mathbb{R}^d \setminus \mathrm{supp}(g)$, $R > 0$ tel que $\mathrm{supp}(g) \subset B(0,R)$ et $r > 0$ tel que $B(x_0, 2r) \cap \mathrm{supp}(g) = \emptyset$. Soit $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$ avec $\mathrm{supp}(f) \subset B(x_0, r)$. La formule (3.7) et la preuve du Lemme 3.22 montrent que Tf est une fonction continue sur $\mathrm{supp}(g)$. Soit $\widetilde{K} := \chi_{\{r \leq |x| \leq R + r + |x_0|\}}K$. On a

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^d} \overline{g(x)}(Tf)(x)\,\mathrm{d}x &= \int_{\mathbb{R}^d} \overline{g(x)} \int_{\mathbb{R}^d} K(x-y)f(y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^d} \overline{g(x)} \int_{\mathbb{R}^d} \widetilde{K}(x-y)f(y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} f(y) \int_{\mathbb{R}^d} \widetilde{K}(-y+x))\overline{g(x)}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_{\mathbb{R}^d} f(y) \overline{\int_{\mathbb{R}^d} \overline{K(-y+x)}g(x)\,\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}y,\end{aligned}$$

autrement dit

$$\int_{\mathbb{R}^d} \overline{(T^*g)(x)}f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^d} \overline{h(x)}f(x)\,\mathrm{d}x,$$

pour tout $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$ telle que $\mathrm{supp}(f) \subset B(x_0, r)$, où h est une fonction continue sur $B(x_0, r)$ définie par $h(x) := \int_{\mathbb{R}^d} \overline{K(-x+y)}g(y)\,\mathrm{d}y$ pour tout $x \in B(x_0, r)$. Mais cela implique $(T^*g)(x) = h(x)$ pour tout $x \in B(x_0, r)$, en particulier (3.8) pour $x = x_0$. □

3.5 Continuité dans les espaces de Hölder

Théorème 3.29. *Soit K un noyau de Calderón-Zygmund fort, c'est-à-dire qui vérifie (H1), (H2') et (H3), et soit $0 < \alpha < 1$. Pour toute fonction $f \in C^{0,\alpha}(\mathbb{R}^d)$ telle que $\mathrm{supp}(f) \subset B(0,1) \subset \mathbb{R}^d$, posons*

$$(Tf)(x) := \lim_{\epsilon\to 0^+} \int_{|y|>\epsilon} K(y)f(x-y)\,\mathrm{d}y = \lim_{\epsilon\to 0^+} \int_{|x-y|>\epsilon} K(x-y)f(y)\,\mathrm{d}y, \quad \textit{pour tout } x \in \mathbb{R}^d. \tag{3.9}$$

Il existe $C = C(d,\alpha)$ tel que $\|Tf\|_{C^{0,\alpha}} \leq CB\|f\|_{C^{0,\alpha}}$ pour tout $f \in C^{0,\alpha}(\mathbb{R}^d)$.

Remarque 3.30. Il fait partie de la démonstration de montrer que (3.9) a un sens pour tout $x \in \mathbb{R}^d$ et définit une fonction disons continue (a posteriori hölderienne).

Remarque 3.31. L'hypothèse $\operatorname{supp}(f) \subset B(0,1)$ pourrait être affaiblie, mais on a besoin de supposer une sorte de décroissance de $|f(x)|$ quand $|x| \to \infty$.

Démonstration. Sans restreindre la généralité, on peut supposer $B = 1$. Si $|x| \le 2$, alors

$$\int_{|y|>\epsilon} K(y) f(x-y)\, \mathrm{d}y = \int_{3\ge|y|>\epsilon} K(y) f(x-y)\, \mathrm{d}y = \int_{3\ge|y|>\epsilon} K(y)(f(x-y)-f(x))\, \mathrm{d}y.$$

De l'estimation

$$\int_{3\ge|y|>\epsilon} |K(y)||f(x-y)-f(x)|\, \mathrm{d}y \le [f]_\alpha \int_{|y|\le 3} |y|^{-d}|y|^\alpha\, \mathrm{d}y \le C(d,\alpha)[f]_\alpha.$$

on déduit que la limite $\epsilon \to 0$ existe et $|(Tf)(x)| \le C[f]_\alpha$ pour tout $|x| \le 2$. Si $|x| > 2$, alors

$$\int_{|y|>\epsilon} K(y) f(x-y)\, \mathrm{d}y = \int_{|y|>1} K(y) f(x-y)\, \mathrm{d}y,$$

et en vue du fait que $|K(y)| \le 1$ pour $|y| \ge 1$ on a $|(Tf)(x)| \le \|f\|_{L^1} \le C\|f\|_{L^\infty}$.

Soit maintenant $x, x' \in \mathbb{R}^d$ et $|x - x'| = \delta < \frac{1}{100}$. On estime $|(Tf)(x) - (Tf)(x')|$ en divisant l'intégration en deux régions :

$$\int_{|y|>\epsilon} K(y)(f(x-y)-f(x'-y))\, \mathrm{d}y = \left(\int_{|y|>3\delta} + \int_{3\delta\ge|y|>\epsilon} \right) K(y)(f(x-y)-f(x'-y))\, \mathrm{d}y.$$

En utilisant la condition (H3), la deuxième intégrale s'estime par

$$\left| \int_{3\delta\ge|y|>\epsilon} K(y)(f(x-y)-f(x)-f(x'-y)+f(x'))\, \mathrm{d}y \right| \le C[f]_\alpha \int_{3\delta\ge|y|>\epsilon} |y|^{-d}|y|^\alpha\, \mathrm{d}y \le C[f]_\alpha \delta^\alpha.$$

Pour la première intégrale, introduisons $\widetilde{K} := \chi_{|y|>3\delta} K$, de sorte que

$$\begin{aligned} &\int_{|y|>3\delta} K(y)(f(x-y)-f(x'-y))\, \mathrm{d}y = \int_{\mathbb{R}^d} \widetilde{K}(y)(f(x-y)-f(x'-y))\, \mathrm{d}y \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} (\widetilde{K}(x-y)-\widetilde{K}(x'-y)) f(y)\, \mathrm{d}y = \int_{\mathbb{R}^d} (\widetilde{K}(x-y)-\widetilde{K}(x'-y))(f(y)-f(x))\, \mathrm{d}y. \end{aligned}$$

Si $|x-y| < 2\delta$ ou $|x'-y| < 2\delta$, alors $\widetilde{K}(x-y) = \widetilde{K}(x'-y) = 0$. Mais $|x-y| \ge 2\delta$ et $|x'-y| \ge 2\delta$ implique en particulier $|x'-y| \ge \frac{1}{2}|x-y|$. Par le théorème des accroissements finis, on a donc $|\widetilde{K}(x-y)-\widetilde{K}(x'-y)| \le \frac{C\delta}{|x-y|^{d+1}}$, ce qui permet de conclure car

$$C[f]_\alpha \delta \int_{|x-y|\ge 2\delta} |x-y|^{\alpha-d-1}\, \mathrm{d}y \le C[f]_\alpha \delta^\alpha.$$

$\square$

Corollaire 3.32. *(i) Pour tout $1 < p < \infty$ il existe $C = C(d,p)$ tel que*

$$\sup_{1\le i,j\le d} \|\partial_{x_i x_j} u\|_{L^p} \le C_{p,d} \|\Delta u\|_{L^p}, \qquad \text{pour tout } u \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d).$$

(ii) Pour tout $0 < \alpha < 1$ il existe $C = C(d,\alpha)$ tel que

$$\sup_{1\le i,j\le d} [\partial_{x_i x_j} u]_\alpha \le C_{p,d} [\Delta u]_\alpha, \qquad \text{pour tout } u \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d).$$

Démonstration. Cela résulte directement du fait que les transformations de Riesz doubles sont des opérateurs de Calderón-Zygmund forts. Dans le cas hölderien, on n'utilise pas vraiment le Théorème 3.29, mais plutôt la deuxième partie de la démonstration. Si $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$ et $x, x' \in \mathbb{R}^d$ avec $|x - x'| = \delta$, alors l'intégrale $\int_{\epsilon<|x|\le 3\delta}$ s'estime exactement comme dans la preuve du Théorème. Concernant l'autre intégrale, on a, grâce à la décroissance rapide de f,

$$\int_{|y|>3\delta} K(y)(f(x-y) - f(x'-y))\,\mathrm{d}y = \lim_{R\to\infty} \int_{R\ge|y|>3\delta} K(y)(f(x-y) - f(x'-y))\,\mathrm{d}y.$$

Pour R fixe, on pose $\widetilde{K} := \chi_{\{R\ge|y|>3\delta\}} K$, et le calcul dans la preuve du Théorème montre que

$$\left| \int_{R\ge|y|>3\delta} K(y)(f(x-y) - f(x'-y))\,\mathrm{d}y \right| = \left| \int_{\mathbb{R}^d} \widetilde{K}(y)(f(x-y) - f(x'-y))\,\mathrm{d}y \right| \le C[f]_\alpha \delta^\alpha.$$

Maintenant on passe à la limite $R \to \infty$. □

3.6 Théorème de Marcinkiewicz, intégration fractionnaire

Théorème 3.33. *(Marcinkiewicz, ca 1939) Soit (X,μ) et (Y,ν) deux espaces mesurables, $1 \le p_1 < p_2 \le \infty$, $q_1 \ge p_1$, $q_2 \ge p_2$, $q_1 \ne q_2$ et T une application définie sur $L^{p_1}(X) \cap L^{p_2}(X)$, à valeurs dans l'ensemble des fonctions mesurables sur Y. Supposons qu'il existe une constante $K > 0$ telle que*

$$|T(f+g)| \le K(|T(f)| + |T(g)|) \qquad \text{presque partout, pour tout } f, g \in L^{p_1}(X) \cap L^{p_2}(X),$$

et qu'il existe des constantes $0 < A_1, A_2 < \infty$ telles que

$$\|T(f)\|_{L^{q_j,\infty}(Y)} \le A_j \|f\|_{L^{p_j}(X)}, \qquad \text{pour tout } j \in \{1,2\} \text{ et } f \in L^{p_1}(X) \cap L^{p_2}(X).$$

Alors pour tout $0 < \theta < 1$,

$$\frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{p_1} + \frac{\theta}{p_2}, \qquad \frac{1}{q} = \frac{1-\theta}{q_1} + \frac{\theta}{q_2} \tag{3.10}$$

il existe $0 < A < \infty$ tel que

$$\|T(f)\|_{L^q(Y)} \le A \|f\|_{L^p(X)}, \qquad \text{pour tout } f \in L^{p_1}(X) \cap L^{p_2}(X).$$

□

On a démontré un cas particulier, le Théorème 3.36. Le cas général peut être traité par des méthodes similaires, mais il est un peu plus compliqué et on préférera omettre la preuve, voir [3, Chapitre 1.4].

On donne une application importante.

Théorème 3.34. *Soit* $0 < \alpha < d$ *et posons*

$$(I_\alpha f)(x) := \int_{\mathbb{R}^d} |x-y|^{\alpha-d} f(y)\,\mathrm{d}y, \qquad \textit{pour tout } f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d).$$

Pour tous $1 < p < q < \infty$ *tels que*

$$\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{\alpha}{d}$$

il existe $C = C(p,q,d)$ *tel que*

$$\|I_\alpha f\|_{L^q} \le C\|f\|_{L^p}, \qquad \textit{pour tout } f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d).$$

Démonstration. Il suffit de montrer que

$$\|I_\alpha f\|_{L^{q,\infty}} \le C\|f\|_{L^p}, \qquad \text{pour tout } f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d).$$

En effet, on peut trouver $1 < p_1 < p < p_2 < \infty$, $q_j > p_j$ vérifiant (3.10) et $\frac{1}{q_j} = \frac{1}{p_j} - \frac{\alpha}{d}$. Si on savait que $\|I_\alpha f\|_{L^{q_j}} \le C\|f\|_{L^{p_j}}$, alors le Théorème de Marcinkiewicz impliquerait le résultat.

Il faut donc montrer que, pour tout $\lambda > 0$,

$$|\{x \in \mathbb{R}^d : (I_\alpha f)(x) > \lambda\}| \le C\lambda^{-q}\|f\|_{L^p}^q.$$

Soit $R > 0$. On décompose

$$(I_\alpha f)(x) = \int_{|x-y|\le R} |x-y|^{\alpha-d} f(y)\,\mathrm{d}y + \int_{|x-y|\ge R} |x-y|^{\alpha-d} f(y)\,\mathrm{d}y.$$

On choisit R de sorte que l'inégalité de Hölder garantisse que le 2ème terme soit $\le \lambda/2$. Ensuite, on applique l'inégalité de Markov au premier terme. On laisse les détails en exercice. □

Il faut comparer le Théorème 3.33 avec le Théorème de Riesz-Thorin suivant, qu'on admettra aussi sans en donner une preuve, voir [3, Chapitre 1.3].

Théorème 3.35. *(Riesz-Thorin, ca 1924) Soit* (X,μ) *et* (Y,ν) *deux espaces mesurables,* $1 \le p_1, p_2 \le \infty$, $0 \le \theta \le 1$, q_1, q_2 *donnés* (3.10)*, et* T *une application linéaire définie sur* $L^{p_1}(X) \cap L^{p_2}(X)$*, à valeurs dans l'ensemble des fonctions mesurables sur* Y *telle qu'il existe des constantes* $0 < A_1, A_2 < \infty$ *telles que*

$$\|Tf\|_{L^{q_j}(Y)} \le A_j\|f\|_{L^{p_j}(X)}, \qquad \textit{pour tout } j \in \{1,2\} \textit{ et } f \in L^{p_1}(X) \cap L^{p_2}(X).$$

Alors

$$\|Tf\|_{L^q(Y)} \le A_1^{1-\theta} A_2^{\theta}\|f\|_{L^p(X)}, \qquad \textit{pour tout } f \in L^{p_1}(X) \cap L^{p_2}(X).$$

□

3.7 Exercices

Exercice 3.1. Définir la convolution de deux mesures complexes. Étudier ses propriétés.

Exercice 3.2. Le but de l'exercice est de démontrer le cas particulier suivant du théorème d'interpolation de Marcinkiewicz.

Théorème 3.36. *Soit (X,μ) et (Y,ν) deux espaces mesurables, $1 \le p_1 < p_2 \le \infty$ et T une application définie sur $L^{p_1}(X) \cap L^{p_2}(X)$, à valeurs dans l'ensemble des fonctions mesurables sur Y. Supposons qu'il existe une constante $K > 0$ telle que*

$$|T(f+g)| \le K(|T(f)| + |T(g)|) \qquad \textit{presque partout, pour tout } f,g \in L^{p_1}(X) \cap L^{p_2}(X),$$

et qu'il existe des constantes $0 < A_1, A_2 < \infty$ telles que

$$\|T(f)\|_{L^{p_j,\infty}(Y)} \le A_j \|f\|_{L^{p_j}(X)}, \qquad \textit{pour tout } j \in \{1,2\} \textit{ et } f \in L^{p_1}(X) \cap L^{p_2}(X).$$

Alors pour tout $0 < \theta < 1$ et $\frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{p_1} + \frac{\theta}{p_2}$

$$\|T(f)\|_{L^p(Y)} \le A\|f\|_{L^p(X)}, \qquad \textit{pour tout } f \in L^{p_1}(X) \cap L^{p_2}(X),$$

où, avec les conventions usuelles dans le cas $p_2 = \infty$,

$$A = 2K\Big(\frac{p}{p-p_1} + \frac{p}{p_2-p}\Big)^{\frac{1}{p}} A_1^{1-\theta} A_2^{\theta}.$$

(i) Soit $A := \{(x,\lambda) : \lambda < \delta^{-1}|f(x)|\}$, où $\delta > 0$ sera choisi plus tard. Considérons d'abord le cas $p_2 < \infty$. En décomposant $f = f_1 + f_2$, où $f_1(x) := (1-\chi_A(x,\lambda))f(x)$ et $f_2 := \chi_A(x,\lambda)f(x)$, montrer que pour tout $\lambda > 0$

$$m_{T(f)}(\lambda) \le \Big(\frac{2KA_1}{\lambda}\Big)^{p_1} \int_X \chi_A(x,\lambda)|f(x)|^{p_1}\mu(\mathrm{d}x) + \Big(\frac{2KA_2}{\lambda}\Big)^{p_2} \int_X (1-\chi_A(x,\lambda))|f(x)|^{p_2}\mu(\mathrm{d}x).$$

(ii) À l'aide du Lemme 3.12, en déduire que

$$\|T(f)\|_{L^p}^p \le p\Big(\frac{(2KA_1)^{p_1}}{p-p_1}\frac{1}{\delta^{p-p_1}} + \frac{(2KA_2)^{p_2}}{p_2-p}\delta^{p_2-p}\Big)\|f\|_{L^p}^p.$$

Choisir δ de sorte que les deux termes entre les parenthèses soient égaux et conclure la preuve dans le cas $p_2 < \infty$.

(iii) Dans le cas $p_2 = \infty$, prendre $\delta := (2KA_2)^{-1}$ et montrer que

$$m_{T(f)}(\lambda) \le \Big(\frac{2KA_1}{\lambda}\Big)^{p_1} \int_X \chi_A(x,\lambda)|f(x)|^{p_1}\mu(\mathrm{d}x),$$

puis procéder comme dans (ii).

Exercice 3.3. Démontrer le théorème de différentiation de Lebesgue :

Théorème 3.37. *Pour tout $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$*

$$\lim_{\epsilon\to 0^+} \frac{1}{\epsilon^d |B|} \int_{B(x,\epsilon)} f(y)\,\mathrm{d}y = f(x), \qquad \textit{pour presque tout } x \in \mathbb{R}^d.$$

Montrer une version plus forte, notamment que presque tout $x \in \mathbb{R}^d$ est un *point de Lebesgue* de f :

$$\lim_{\epsilon\to 0^+} \frac{1}{\epsilon^d |B|} \int_{B(x,\epsilon)} |f(y) - f(x)|\,\mathrm{d}y = 0, \qquad \text{pour presque tout } x \in \mathbb{R}^d.$$

Exercice 3.4 (M-S, Exercise 7.4)**.** On étudie dans cet exercice les transformées de Riesz doubles. Soit $d \geq 3$.

(i) Soit $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$ et posons $u(x) := C \int_{\mathbb{R}^d} |x-y|^{2-d} f(y)\,\mathrm{d}y$, où $C = C(d)$ est une constante qu'il faudra déterminer. Montrer que, avec le bon choix de C, u est une solution de l'équation

$$\Delta u = f.$$

(ii) Soit toujours $u(x) := C \int_{\mathbb{R}^d} |x-y|^{2-d} f(y)\,\mathrm{d}y$, et $1 \leq i, j \leq d$. Soit $K_{ij}(x) := \frac{x_i x_j}{|x|^{d+2}} - \frac{1}{d}\delta_{ij}\frac{1}{|x|^d}$, où $\delta_{ij} = 1$ si $i = j$ et $\delta_{ij} = 0$ si $i \neq j$. Montrer que

$$\partial_{x_i}\partial_{x_j} u(x) = \widetilde{C} \int_{\mathbb{R}^d} K_{ij}(x-y) f(y)\,\mathrm{d}y + \frac{1}{d}\delta_{ij} f(x),$$

où il faut comprendre l'intégrale au sens de la valeur principale, c'est-à-dire $\lim_{\epsilon\to 0^+} \int_{|x-y|>\epsilon} K_{ij}(x-y) f(y)\,\mathrm{d}y$, et $\widetilde{C} = \widetilde{C}(d)$.

(iii) Vérifier que K_{ij} est un noyau de Calderón-Zygmund fort.

Exercice 3.5. Parfois on est amené à considérer des opérateurs qui ne sont pas invariants par translations. Un critère classique de continuité est donné par le *test de Schur*.

Soit (X, μ) et (Y, ν) deux espaces mesurés, et $K : X \times Y \to \mathbb{C}$ une fonction mesurable. Sous certaines conditions on peut définir un *opérateur intégral T* donné par

$$(Tf)(x) = \int_Y K(x,y) f(y) \nu(\mathrm{d}y).$$

Il faut démontrer que

(i) $\|T\|_{L^1\to L^1} \leq \sup_{y\in Y} \int_X |K(x,y)| \mu(\mathrm{d}x) =: A$,

(ii) $\|T\|_{L^\infty\to L^\infty} \leq \sup_{x\in X} \int_Y |K(x,y)| \nu(\mathrm{d}y) =: B$,

(iii) $\|T\|_{L^p\to L^p} \leq A^{1/p} B^{1/p'}$ pour tout $1 \leq p \leq \infty$,

(iv) $\|T\|_{L^1\to L^\infty} \leq \|K\|_{L^\infty(X\times Y)}$.

Exercice 3.6 (M-S, Problem 7.3)**.** On généralise ici le Théorème 3.28 au cas des opérateurs qui ne sont pas des opérateurs de convolution.

Soit T un opérateur borné $L^2(\mathbb{R}^d) \to L^2(\mathbb{R}^d)$ tel que, pour une certaine fonction localement bornée $K : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \setminus \Delta \to \mathbb{C}$, où $\Delta := \{x = y\}$ est la diagonale dans $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$, et pour tout $f \in L^2_{\text{comp}}(\mathbb{R}^d)$

$$(Tf)(x) = \int_{\mathbb{R}^d} K(x,y) f(y)\,\mathrm{d}y, \qquad \text{pour tout } x \notin \operatorname{supp}(f).$$

Supposons aussi les *conditions de Hörmander* :

$$\int_{\{|x-y|>2|y-y'|\}} |K(x,y)-K(x,y')|\,\mathrm{d}x \leq A, \quad \text{pour tout } y \neq y',$$
$$\int_{\{|x-y|>2|x-x'|\}} |K(x,y)-K(x',y)|\,\mathrm{d}y \leq A, \quad \text{pour tout } x \neq x'.$$

Alors $\|Tf\|_{L^{1,\infty}} \leq CA\|f\|_{L^1}$ pour tout $f \in L^1(\mathbb{R}^d) \cap L^2(\mathbb{R}^d)$, où $C = C(d)$. Aussi, pour tout $1 < p < \infty$ il existe $C = C(d,p)$ tel que $\|Tf\|_{L^p} \leq CA\|f\|_{L^p}$ pour tout $f \in L^p(\mathbb{R}^d) \cap L^2(\mathbb{R}^d)$.

Chapitre 4

Théorie de Littlewood-Paley

4.1 Théorème de multiplicateurs de Mikhlin

À toute distribution $Q \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^d)$ est associé un *opérateur de convolution* T, défini pour tout $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$ par $Tf := Q * f$. Soit $m := \mathscr{F}^{-1}(Q) \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^d)$. Alors $\widehat{Tf} = m\widehat{f}$ pour tout $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$, au sens $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^d)$. On appèle $T = T_m$ *l'opérateur de multiplication de Fourier* correspondant au *multiplicateur de Fourier* m. On dit aussi que m est le *symbole* de l'opérateur $T = T_m$.

Est-il possible d'avoir des conditions simples sur le symbole qui impliqueraient des propriétés essentielles de l'opérateur correspondant, telles que, par exemple, la continuité entre deux espaces fonctionnels ? On montre ici un exemple de résultat de ce type.

Théorème 4.1. *Pour tout $1 < p < \infty$ il existe $C = C(d,p)$ ayant la propriété suivante. Soit $m \in C^{d+2}(\mathbb{R}^d \setminus \{0\})$ une fonction à valeurs complexes qui vérifie*

$$|\partial^\gamma m(\xi)| \le B|\xi|^{-|\gamma|}, \quad \textit{pour tout } |\gamma| \le d+2,\ \xi \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}. \tag{4.1}$$

Soit T_m l'opérateur de multiplication de Fourier de symbole m. Alors

$$\|T_m f\|_{L^p} \le CB\|f\|_{L^p}, \qquad \textit{pour tout } f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d).$$

Avant de démontrer ce théorème, on introduit la *décomposition dyadique de l'identité*.

Lemme 4.2. *Il existe $\chi, \varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$ des fonctions positives, sphériquement symétriques, telles que* $\mathrm{supp}(\varphi) \subset \{\xi : \frac{1}{2} \le |\xi| \le 2\}$, $\mathrm{supp}(\chi) \subset \{\xi : |\xi| \le 2\}$ *et*

$$\chi(\xi) + \sum_{j=1}^{\infty} \varphi(2^{-j}\xi) = 1, \qquad \textit{pour tout } \xi \in \mathbb{R}^d, \tag{4.2}$$

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty} \varphi(2^{-j}\xi) = 1, \qquad \textit{pour tout } \xi \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}. \tag{4.3}$$

Pour chaque ξ, au plus deux termes dans les sommes ci-dessus sont non-nuls.

Démonstration. Soit $\theta \in C^\infty([0,\infty[)$ une fonction décroissante telle que $\theta(r) = 1$ pour $r \le 1$ et $\theta(r) = 0$ pour tout $r \ge 2$. Soit $\chi(\xi) := \theta(|\xi|)$ et $\varphi(\xi) := \chi(\xi) - \chi(2\xi)$. On voit que $\varphi(\xi) = 0$ si $|\xi| \le \frac{1}{2}$, $\varphi(\xi) \ge 0$ si $\frac{1}{2} \le |\xi| \le 2$ et $\varphi(\xi) = 0$ si $|\xi| \ge 2$. Si $\chi(\xi) \ne 0$, alors $|\xi| \le 2$, donc pour $j \ge 2$ on a

$|2^{-j}\xi| \leq \frac{1}{2}$ et $\varphi(2^{-j}\xi) = 0$, donc il y a au plus 2 termes non-nuls dans la somme (4.2). Soit $1 \leq j \leq k-2$. Si $\varphi(2^{-j}\xi) \neq 0$, alors $|2^{-j}\xi| \leq 2$, donc $|2^{-k}\xi| \leq \frac{1}{2}$, donc $\varphi(2^{-k}\xi) = 0$, ce qui montre que, si $\chi(\xi) = 0$, alors il y aussi au plus 2 termes non-nuls dans la somme (4.2). Pour tout $N \in \mathbb{N}$ on a

$$\sum_{j=1}^{N} \varphi(2^{-j}\xi) = \sum_{j=1}^{N} (\chi(2^{-j}\xi) - \chi(2^{-j+1}\xi)) = \chi(2^{-N}\xi) - \chi(\xi).$$

Pour $\xi \in \mathbb{R}^d$ donné, on a $\chi(2^{-N}\xi) = 1$ pour N suffisamment grand, donc on obtient (4.2).

La preuve de (4.3) est similaire. On voit que, si $-\infty < j \leq k-2 < \infty$, alors $\varphi(2^{-j}\xi) \neq 0$ implique $\varphi(2^{-k}\xi) = 0$, donc il y a au plus 2 termes non-nuls dans la somme. On a

$$\sum_{j=-N}^{N} \varphi(2^{-j}\xi) = \sum_{j=-N}^{N} (\chi(2^{-j}\xi) - \chi(2^{-j+1}\xi)) = \chi(2^{-N}\xi) - \chi(2^{N+1}\xi),$$

ce qui, pour $\xi \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ donné, vaut 1 pour tout N suffisamment grand. $\square$

La convention est qu'on fixe la fonction χ pour chaque d, une fois pour toutes, et lorsque on dit par exemple "une constante qui dépend de la dimension", il est sous-entendu qu'elle peut dépendre du choix de la fonction χ. On introduit la notation

$$\varphi_j(\xi) := \varphi(2^{-j}\xi), \qquad \text{pour tout } j \in \mathbb{Z},\ \xi \in \mathbb{R}^d.$$

Il est utile de remarquer que

$$\|\partial^\gamma \varphi_j\|_{L^\infty} = 2^{-j|\gamma|}\|\partial^\gamma \varphi\|_{L^\infty} \leq C2^{-j|\gamma|}, \qquad \text{où } C = C(d,\gamma). \tag{4.4}$$

Lemme 4.3. *Supposons que m vérifie les conditions du Théorème 4.1. Pour tout $j \in \mathbb{Z}$, soit $m_j(\xi) := \varphi_j(\xi)m(\xi)$ et $K_j := \mathscr{F}^{-1}(m_j)$. Alors $\sum_{j\in\mathbb{Z}} K_j$ converge au sens C^1, sur tout sous-ensemble compact de $\mathbb{R}^d \setminus \{0\}$, vers une fonction $K : \mathbb{R}^d \setminus \{0\} \to \mathbb{C}$ qui vérifie*

$$|K(x)| \leq CB|x|^{-d}, \quad |\nabla K(x)| \leq CB|x|^{-d-1}, \qquad \textit{pour tout } x \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}.$$

Démonstration. Il suffit de montrer que

$$\sum_{j\in\mathbb{Z}} |K_j(x)| \leq CB|x|^{-d}, \quad \sum_{j\in\mathbb{Z}} |\nabla K_j(x)| \leq CB|x|^{-d-1}, \qquad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}.$$

L'idée est de se servir de la Proposition 1.21 (i) et (ii). On observe pour cela que (4.1), (4.4) et la règle de Leibniz impliquent

$$\|\partial^\gamma m_j\|_{L^\infty} \leq CB2^{-j|\gamma|},\ \|\partial^\gamma(\xi_k m_j)\|_{L^\infty} \leq CB2^{-j(|\gamma|-1)}, \quad \text{pour tout } 0 \leq |\gamma| \leq d+2,\ j \in \mathbb{Z},\ 1 \leq k \leq d,$$

ce qui donne en intégrant

$$\|\partial^\gamma m_j\|_{L^1} \leq CB2^{jd-j|\gamma|}, \quad \|\partial^\gamma(\xi_k m_j)\|_{L^1} \leq CB2^{jd-j(|\gamma|-1)}.$$

En prenant $\mathscr{F}^{-1}$ on en déduit que

$$\|x^\gamma K_j\|_{L^\infty} \leq CB2^{jd-j|\gamma|}, \quad \|x^\gamma \partial_{x_k} K_j\|_{L^\infty} \leq CB2^{jd-j(|\gamma|-1)}.$$

Fixons $x \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$. Notons que $|x|^l \leq C \max_{|\gamma|=l} |x^\gamma|$, donc les estimations ci-dessus donnent

$$|K_j(x)| \leq CB|x|^{-l}2^{j(d-l)}, \qquad |\nabla K_j(x)| \leq CB|x|^{-l}2^{j(d-l+1)}, \qquad \text{pour tout } j \in \mathbb{Z},\ 0 \leq l \leq d+2.$$

On voit qu'il est intéressant de prendre $l = 0$ si $2^j|x| < 1$ et $l = d+2$ si $2^j|x| \geq 1$. Suivant cette logique, on écrit

$$|K_j(x)| \leq CB2^{jd},\ \text{si } 2^j|x| < 1, \qquad |K_j(x)| \leq CB|x|^{-d-2}2^{-2j},\ \text{si } 2^j|x| \geq 1,$$

et on prend la somme (en utilisant le principe "la somme d'une suite géométrique est comparable au plus grand terme") :

$$\sum_{j\in\mathbb{Z}} |K_j(x)| \leq \sum_{2^j<|x|^{-1}} CB2^{jd} + \sum_{2^j\geq|x|^{-1}} CB|x|^{d+2}2^{-2j} \leq CB|x|^{-d} + CB|x|^{-d-2}|x|^2.$$

De manière similaire,

$$|\nabla K_j(x)| \leq CB2^{j(d+1)},\ \text{si } 2^j|x| < 1, \qquad |\nabla K_j(x)| \leq CB|x|^{-d-2}2^{-j},\ \text{si } 2^j|x| \geq 1,$$

donc

$$\sum_{j\in\mathbb{Z}} |\nabla K_j(x)| \leq \sum_{2^j<|x|^{-1}} CB2^{j(d+1)} + \sum_{2^j\geq|x|^{-1}} CB|x|^{d+2}2^{-j} \leq CB|x|^{-d-1} + CB|x|^{-d-2}|x|.$$

□

Démonstration du Théorème 4.1. Pour $\gamma = 0$, la condition 4.1 signifie que $\|m\|_{L^\infty} \leq B$. Par la formule de Plancherel, cela implique $\|T_m f\|_{L^2} \leq B\|f\|_{L^2}$ pour tout $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$. On note avec le même symbole T_m l'extension de l'opérateur sur $L^2(\mathbb{R}^d)$. Il suffit de montrer que $T = T_m$ vérifie la condition (3.7), où K la fonction donnée par le Lemme 4.3.

On fixe $f \in L^2_{\mathrm{comp}}(\mathbb{R}^d)$, $\mathrm{supp}(f) \subset B(0,R)$. Soit $K^{(N)} := \sum_{j=-N}^{N} K_j$ et $g^{(N)} := K^{(N)} * f$. Soit $x_0 \in \mathbb{R}^d \setminus \mathrm{supp}(f)$ et $r > 0$ tel que $B(x_0, 2r) \cap \mathrm{supp}(f) = \emptyset$. Soit $\Omega := \{x \in \mathbb{R}^d : r \leq |x| \leq R + |x_0| + r\}$. D'un côté, pour tout $x \in B(x_0, r)$ on a

$$\begin{aligned} g^{(N)}(x) &= \int_{\mathbb{R}^d} K^{(N)}(x-y)f(y)\,\mathrm{d}y = \int_{x-y\in\Omega} K^{(N)}(x-y)f(y)\,\mathrm{d}y \\ &\to \int_{x-y\in\Omega} K(x-y)f(y)\,\mathrm{d}y = \int_{\mathbb{R}^d} K(x-y)f(y)\,\mathrm{d}y, \end{aligned} \tag{4.5}$$

où la convergence est uniforme en x. D'un autre côté,

$$\widehat{g^{(N)}}(\xi) = \sum_{j=-N}^{N} m_j(\xi)\widehat{f}(\xi) = (\chi(2^{-N}\xi) - \chi(2^{N+1}\xi))m(\xi)\widehat{f}(\xi) \to m(\xi)\widehat{f}(\xi), \quad \text{au sens } L^2(\mathbb{R}^d),$$

autrement dit, par Plancherel, $g^{(N)} \to Tf$ dans $L^2(\mathbb{R}^d)$. On obtient donc que $(Tf)(x)$ est donné par (4.5) au voisinage de x_0. □

4.2 Décomposition de Littlewood-Paley

La décomposition dyadique de l'identité définie au début du chapitre peut être vue comme une famille de multiplicateurs de Fourier. On appelle les opérateurs correspondants les *projections de Littlewood-Paley*. On note

$$S_0 u := \mathscr{F}^{-1}(\chi \widehat{f}), \quad P_j u := \mathscr{F}^{-1}(\varphi_j \widehat{u}), \qquad \text{pour } u \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^d),\ j \in \mathbb{Z}.$$

Cette définition a un sens, parce que $\chi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$ et $\varphi_j \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$ pour tout $j \in \mathbb{Z}$. Ce sont des opérateurs de convolution par une fonction $\in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$. En particulier,

$$u_n \to u \text{ au sens } \mathscr{S}'(\mathbb{R}^d) \quad \Rightarrow \quad (S_0 u_n)(x) \to (S_0 u)(x) \text{ et } (P_j u_n)(x) \to (P_j u)(x), \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}^d.$$

Remarque 4.4. Ces opérateurs ne sont pas des projections au sens de l'algèbre linéaire, car $S_0^2 \neq S_0$ et $P_j^2 \neq P_j$.

Remarque 4.5. Notons pourtant que pour tout $j \in \mathbb{Z}$ on a $(P_{j-1} + P_j + P_{j+1})P_j = P_j$. En effet, cela revient à dire que $(\varphi_{j-1} + \varphi_j + \varphi_{j+1})\varphi_j = \varphi_j$, ce qui est vrai, car $\varphi_{j-1}(\xi) + \varphi_j(\xi) + \varphi_{j+1}(\xi) = \chi(2^{-j-1}\xi) - \chi(2^{-j+2}\xi) = 1$ pour tout $2^{j-1} \leq |\xi| \leq 2^{j+1}$.

Remarque 4.6. Beaucoup d'auteurs écrivent Δ_j ou $\dot{\Delta}_j$ au lieu de P_j.

Proposition 4.7. *Pour tout $f \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^d)$, $f = S_0 f + \sum_{j=1}^\infty P_j f$ au sens de la convergence dans $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^d)$.*

Démonstration. On veut montrer que

$$\lim_{N\to\infty} S_0 f + \sum_{j=1}^N P_j f = f, \qquad \text{au sens } \mathscr{S}'(\mathbb{R}^d).$$

En prenant la transformée de Fourier à gauche et à droite, cela est équivalent à

$$\lim_{N\to\infty} \chi \widehat{f} + \sum_{j=1}^N \varphi_j \widehat{f} = \widehat{f}, \qquad \text{au sens } \mathscr{S}'(\mathbb{R}^d).$$

On a la somme télescopique

$$\chi(\xi) + \sum_{j=1}^N \varphi_j(\xi) = \chi(\xi) + \sum_{j=1}^N \big(\chi(2^{-j}\xi) - \chi(2^{-j+1}\xi)\big) = \chi(2^{-N}\xi),$$

donc il faut vérifier que pour tout $\psi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$

$$\lim_{N\to\infty} (\chi(2^{-N}\cdot) f)(\psi) = \lim_{N\to\infty} f(\chi(2^{-N}\cdot)\phi) = f(\psi).$$

Mais il est assez clair que $\lim_{N\to\infty} \chi(2^{-N}\cdot)\psi = \psi$ au sens $\mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$. □

Proposition 4.8. *Pour tout $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$, $f = S_0 f + \sum_{j=1}^\infty P_j f = \sum_{j=-\infty}^\infty P_j f$ au sens de la convergence dans $L^2(\mathbb{R}^d)$. De plus,*

$$\frac{1}{2}\|f\|_{L^2}^2 \leq \|S_0 f\|_{L^2}^2 + \sum_{j=1}^\infty \|P_j f\|_{L^2}^2 \leq \|f\|_{L^2}^2, \tag{4.6}$$

$$\frac{1}{2}\|f\|_{L^2}^2 \leq \sum_{j\in\mathbb{Z}} \|P_j f\|_{L^2}^2 \leq \|f\|_{L^2}^2. \tag{4.7}$$

Démonstration. La première partie est laissée comme exercice, voir la fin de la preuve du Théorème 4.1.

Concernant la deuxième partie, par la formule de Plancherel,

$$\|S_0 f\|_{L^2}^2 + \sum_{j=1}^{\infty} \|P_j f\|_{L^2}^2 = \int_{\mathbb{R}^d} |\widehat{f}(\xi)|^2 \Big(\chi(\xi)^2 + \sum_{j=1}^{\infty} \varphi_j(\xi)^2\Big) \, \mathrm{d}\xi.$$

Pour chaque $\xi \in \mathbb{R}^d$, au plus deux termes dans la somme $\chi(\xi)^2 + \sum_{j=1}^{\infty} \varphi_j(\xi)^2$ sont non nuls. En utilisant le fait que $\frac{1}{2}(a+b)^2 \leq a^2 + b^2 \leq (a+b)^2$, on a donc

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{2}\Big(\chi(\xi) + \sum_{j=1}^{\infty} \varphi_j(\xi)\Big) \leq \chi(\xi)^2 + \sum_{j=1}^{\infty} \varphi_j(\xi)^2 \leq \Big(\chi(\xi) + \sum_{j=1}^{\infty} \varphi_j(\xi)\Big)^2 = 1,$$

et on obtient (4.6) en appliquant de nouveau Plancherel.

La preuve de (4.7) est similaire. □

Remarque 4.9. En général, il n'est pas vrai que, si $f \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^d)$, alors $f = \sum_{j=-\infty}^{\infty} P_j f$ au sens de la convergence $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^d)$. En effet, si $\mathrm{supp}(f) \subset \{0\}$, alors $\sum_{j=-N}^{N} P_j f = 0$ pour tout $N \in \mathbb{N}$.

4.3 Espaces de Sobolev, Besov et Hölder

Rappelons que l'espace $H^s(\mathbb{R}^d)$ est défini comme le complété de $\mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$ dans $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^d)$ pour la norme

$$\|f\|_{H^s} := \Big(\int_{\mathbb{R}^d} (1 + |\xi|^2)^s |\widehat{f}(\xi)|^2 \, \mathrm{d}\xi\Big)^{\frac{1}{2}}.$$

On note $\mathscr{S}_0(\mathbb{R}^d)$ l'ensemble des fonctions test $u \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$ telles que $\mathrm{supp}\, \widehat{u} \subset \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$.

Définition 4.10. Pour tout $s < \frac{d}{2}$ on définit *l'espace de Sobolev homogène* $\dot{H}^s(\mathbb{R}^d)$ comme le complété de $\mathscr{S}_0(\mathbb{R}^d)$ dans $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^d)$ pour la norme

$$\|f\|_{\dot{H}^s} := \Big(\int_{\mathbb{R}^d} |\xi|^{2s} |\widehat{f}(\xi)|^2 \, \mathrm{d}\xi\Big)^{\frac{1}{2}}.$$

Remarque 4.11. On peut montrer que $\dot{H}^s(\mathbb{R}^d)$ est un espace de Hilbert si $s < \frac{d}{2}$, mais pour $s \geq \frac{d}{2}$ la même définition donnerait un espace non complet.

Proposition 4.12. *(i) Pour tout $s \in \mathbb{R}$ il existe $C = C(d,s)$ tel que pour tout $f \in H^s(\mathbb{R}^d)$*

$$C^{-1}\|f\|_{H^s}^2 \leq \|S_0 f\|_{L^2}^2 + \sum_{j=1}^{\infty} 2^{2js} \|P_j f\|_{L^2}^2 \leq C\|f\|_{H^s}^2.$$

(ii) Pour tout $s < \frac{d}{2}$ il existe $C = C(d,s)$ tel que pour tout $u \in \dot{H}^s(\mathbb{R}^d)$

$$C^{-1}\|f\|_{\dot{H}^s}^2 \leq \sum_{j \in \mathbb{Z}} 2^{2js} \|P_j f\|_{L^2}^2 \leq C\|f\|_{\dot{H}^s}^2.$$

Démonstration. □

Proposition 4.13. *Pour tout $0 < \alpha < 1$ il existe $C = C(d,\alpha)$ tel que pour tout $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$*

$$C^{-1}\|f\|_{C^{0,\alpha}} \le \|S_0 f\|_{L^\infty} + \sup_{1\le j<\infty} 2^{\alpha j}\|P_j f\|_{L^\infty} \le C\|f\|_{C^{0,\alpha}}.$$

Démonstration. Posons $V_0 := \mathscr{F}^{-1}(\chi)$ et $K_j := \mathscr{F}^{-1}(\phi_j)$. On a $K_j(x) = 2^{dj}K_0(2^j x)$. On observe que $|K_j(x)| \le C\min(2^{dj}, 2^{-j}|x|^{-d-1})$.

Soit $f \in C^{0,\alpha}(\mathbb{R}^d)$. Il est clair que $\|V_0 * f\|_{L^\infty} \le C\|f\|_{L^\infty}$. Pour $j \ge 1$ on calcule

$$\begin{aligned}|(K_j * f)(x)| &= \left|\int_{\mathbb{R}^d} K_j(y)(f(x-y)-f(x))\,\mathrm{d}y\right| \le [f]_\alpha \int_{\mathbb{R}^d} |K_j(y)||y|^\alpha\,\mathrm{d}y \\ &\le C[f]_\alpha\Big(2^{-j}\int_{|y|\ge 2^{-j}} |y|^{\alpha-d-1}\,\mathrm{d}y + 2^{dj}\int_{|y|\le 2^{-j}} |y|^\alpha\,\mathrm{d}y\Big) \le C[f]_\alpha 2^{-\alpha j}.\end{aligned}$$

Inversement,

$$\|f\|_{L^\infty} \le \sum_{j=0}^{\infty}\|P_j f\|_{L^\infty} \le \sup_l 2^{l\alpha}\|P_l f\|_{L^\infty}\sum_{j=0}^{\infty} 2^{-j\alpha} \le C\sup_l 2^{l\alpha}\|P_l f\|_{L^\infty}.$$

Soit $h \in \mathbb{R}^d$ et $m \in \{1,2,\ldots\}$ tel que $2^{-m} \ge |h| > 2^{-m-1}$. Par l'inégalité triangulaire,

$$|f(x+h)-f(x)| \le \sum_{j=0}^{m}|(P_j f)(x+h)-(P_j f)(x)| + 2\sum_{j=m+1}^{\infty}\|P_j f\|_{L^\infty}.$$

On estime le deuxième terme :

$$\sum_{j=m+1}^{\infty}\|P_j f\|_{L^\infty} \le \sup_l 2^{l\alpha}\|P_l f\|_{L^\infty}\sum_{j=m+1}^{\infty} 2^{-j\alpha} \le C\sup_l 2^{l\alpha}\|P_l f\|_{L^\infty}2^{-m\alpha} \le C\sup_l 2^{l\alpha}\|P_l f\|_{L^\infty}|h|^\alpha.$$

Concernant la première somme, par l'inégalité de Bernstein on a

$$\|(P_j f)'\|_{L^\infty} \le C2^j\|P_j f\|_{L^\infty} \quad \Rightarrow \quad |(P_j f)(x+h)-(P_j f)(x)| \le C2^j 2^{-m}2^{-j\alpha}\sup_l 2^{l\alpha}\|P_l f\|_{L^\infty},$$

ce qui permet de conclure car

$$\sum_{j=0}^{m} 2^j 2^{-m}2^{-j\alpha} = 2^{-m}\sum_{j=0}^{m} 2^{j(1-\alpha)} \le C2^{-m}2^{m(1-\alpha)} \le C2^{-m\alpha} \le C|h|^\alpha.$$

□

Corollaire 4.14. *Pour tout $s > \frac{d}{2}$ il existe une constante $C = C(d,s)$ telle que*

$$\|f\|_{C^{0,\alpha}} \le C\|f\|_{H^s}, \qquad \textit{pout tout } f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d).$$

Démonstration. Par l'inégalité de Bernstein,

$$\|P_j f\|_{L^\infty}^2 \le 2^{jd}\|P_j f\|_{L^2}^2, \qquad \text{pour tout } j \in \mathbb{N}.$$

□

Définition 4.15 (Normes et espaces de Besov). Soit $s \in \mathbb{R}$ and $p, r \in [1, \infty]$.

(i) Pour tout $u \in \mathscr{S}_0(\mathbb{R}^d)$ on définit

$$\|u\|_{\dot{B}^s_{p,r}} := \Big(\sum_{j\in\mathbb{Z}} 2^{rjs}\|P_j u\|_{L^p}^r\Big)^{\frac{1}{r}}.$$

On appelle $\|\cdot\|_{\dot{B}^s_{p,r}}$ la *norme de Besov homogène*.

(ii) Pour tout $u \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$ on définit

$$\|u\|_{B^s_{p,r}} := \|S_0 f\|_{L^p} + \Big(\sum_{j=1}^{\infty} 2^{rjs}\|P_j u\|_{L^p}^r\Big)^{\frac{1}{r}}.$$

On appelle $\|\cdot\|_{\dot{B}^s_{p,r}}$ la *norme de Besov non homogène*.

(iii) Les espaces de Besov sont définis comme d'habitude, et sont des espaces de Banach pour certains choix de p, r, s. On préfère ne pas rentrer dans ces détails.

4.4 Estimation L^p de la fonction carrée

En changeant l'ordre de la sommation on peut écrire

$$\sum_{j\in\mathbb{Z}} \|P_j f\|_{L^2}^2 = \sum_{j\in\mathbb{Z}} \int_{\mathbb{R}^d} |(P_j f)(x)|^2\,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^d} |Sf(x)|^2\,\mathrm{d}x = \|Sf\|_{L^2}^2,$$

où S est la *fonction carrée de Littlewood-Paley* définie par

$$(Sf)(x) := \Big(\sum_{j\in\mathbb{Z}} |(P_j f)(x)|^2\Big)^{\frac{1}{2}}. \tag{4.8}$$

(Il est très important de ne pas confondre S et S_0, qui n'ont pas grand chose à voir.) Par l'estimation (4.7), on a donc

$$\frac{1}{2}\|f\|_{L^2}^2 \le \|Sf\|_{L^2}^2 \le \|f\|_{L^2}^2, \qquad \text{pour tout } f \in L^2(\mathbb{R}^d). \tag{4.9}$$

Remarque 4.16. La définition (4.8) a un sens pour tout $f \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^d)$ et définit une fonction mesurable $Sf : \mathbb{R}^d \to [0, +\infty]$. Pour tout $u, v \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^d)$ et $x \in \mathbb{R}^d$ on a $(S(u+v))(x) \le (Su)(x) + (Sv)(x)$. Aussi, si $u_n \to u$ au sens $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^d)$ et $x \in \mathbb{R}^d$, alors $(P_j u_n)(x) \to (P_j u)(x)$ pour tout $j \in \mathbb{Z}$, donc par le lemme de Fatou $(Su)(x) \le \liminf_{n\to\infty}(Su_n)(x)$.

Remarquablement, les inégalités (4.9) se généralisent au cas des espaces L^p.

Théorème 4.17. *Pour tout $1 < p < \infty$ il existe $C = C(d,p)$ tel que*

$$\frac{1}{C}\|f\|_{L^p} \le \|Sf\|_{L^p} \le C\|f\|_{L^p}, \qquad \textit{pour tout } f \in L^p(\mathbb{R}^d).$$

Pour démontrer ce théorème, on a besoin du lemme suivant (qui permettra en fait d'appliquer le théorème sur les bornes L^p des opérateurs de Calderón-Zygmund).

Lemme 4.18. *Il existe $B > 0$ (qui dépend de d et du choix de la décomposition dyadique) tel que pour tout $x \neq 0$ et tout $N \in \mathbb{N}$*

$$|(\mathscr{F}^{-1}\chi)(x)| + \sum_{j=1}^{N} |(\mathscr{F}^{-1}\varphi_j)(x)| \leq B|x|^{-d}, \quad |\nabla(\mathscr{F}^{-1}\chi)(x)| + \sum_{j=1}^{N} |\nabla(\mathscr{F}^{-1}\varphi_j)(x)| \leq B|x|^{-d-1},$$
$$\sum_{j=-N}^{N} |(\mathscr{F}^{-1}\varphi_j)(x)| \leq B|x|^{-d}, \quad \sum_{j=-N}^{N} |\nabla(\mathscr{F}^{-1}\varphi_j)(x)| \leq B|x|^{-d-1}.$$

Démonstration. Comme $\mathscr{F}^{-1}\chi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$, la première ligne est une conséquence de la deuxième. Pour montrer l'estimation dans la deuxième ligne, on répète l'argument de la preuve du Lemme 4.3, pour $K_j := \mathscr{F}^{-1}\varphi_j$. □

Démonstration du Théorème 4.17. Montrons d'abord l'inégalité à droite pour $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$. Il suffit de montrer que pour tout $N \in \mathbb{N}$ on a

$$\left\| \Big(\sum_{j=-N}^{N} |(P_j f)(x)|^2 \Big)^{\frac{1}{2}} \right\|_{L^p} \leq C\|f\|_{L^p}, \tag{4.10}$$

et ensuite passer à la limite $N \to \infty$ (théorème de convergence monotone). Fixons donc $N \in \mathbb{N}$, $x \in \mathbb{R}^d$ et soit $a_j := (P_j f)(x)$ pour $-N \leq j \leq N$. Soit Ω l'ensemble des suites $r_{-N}, r_{-N+1}, \ldots, r_{N-1}, r_N$ à valeurs dans $\{-1, 1\}$. Par l'inégalité de Khintchine, voir le Lemme 4.20 plus bas,

$$\begin{aligned}\Big(\sum_{j=-N}^{N} |(P_j f)(x)|^2 \Big)^{\frac{p}{2}} &= \Big(\sum_{j=-N}^{N} |a_j|^2 \Big)^{\frac{p}{2}} \leq C 2^{-(2N+1)} \sum_{r\in\Omega} \Big| \sum_{j=-N}^{N} a_j r_j \Big|^p \\ &= C 2^{-(2N+1)} \sum_{r\in\Omega} \Big| \Big(\Big(\sum_{j=-N}^{N} r_j P_j \Big) f \Big)(x) \Big|^p = C 2^{-(2N+1)} \sum_{r\in\Omega} \big| \big(P^{(r)} f\big)(x) \big|^p.\end{aligned}$$

L'observation essentielle est que l'opérateur $P^{(r)} := \sum_{j=-N}^{N} r_j P_j$ est continu $L^p(\mathbb{R}^d) \to L^p(\mathbb{R}^d)$, avec la borne sur la norme $\|P^{(r)}\|_{\mathscr{L}(L^p)} \leq C = C(d)$. C'est une conséquence du Lemme 4.18 et du Théorème 3.28. On a donc

$$\int_{\mathbb{R}^d} \big| \big(P^{(r)} f\big)(x) \big|^p \,\mathrm{d}x \leq C\|f\|_{L^p}^p,$$

ce qui implique, en prenant la somme en $r \in \Omega$, (4.10).

On passe à l'inégalité à gauche. Soit $g \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$. On procède par dualité. Posons $\widetilde{P}_j = P_{j-1} + P_j + P_{j+1}$ et $(\widetilde{S} g)(x) := \big(\sum_{j\in\mathbb{Z}} |(\widetilde{S} g)(x)|^2 \big)^{\frac{1}{2}} \leq 3(Sg)(x)$. En utilisant la Remarque 4.5,

$$\begin{aligned}\langle f, g\rangle &= \Big\langle \sum_{j\in\mathbb{Z}} P_j f, g \Big\rangle = \sum_{j\in\mathbb{Z}} \langle P_j f, g\rangle = \sum_{j\in\mathbb{Z}} \langle P_j f, (P_{j-1} + P_j + P_{j+1}) g\rangle \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} \sum_{j\in\mathbb{Z}} \overline{(P_j f)(x)} (\widetilde{P}_j g)(x) \,\mathrm{d}x \leq \int_{\mathbb{R}^d} (Sf)(x) (\widetilde{S} g)(x) \,\mathrm{d}x \\ &\leq \|Sf\|_{L^p} \|\widetilde{S} g\|_{L^{p'}} \leq C \|Sf\|_{L^p} \|g\|_{L^{p'}},\end{aligned}$$

ce qui termine la preuve.

Si $f \notin \mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$, on prend $f_n \to f$ dans $L^p(\mathbb{R}^d)$. En utilisant la Remarque 4.16, on peut montrer que $\|Sf - Sf_n\|_{L^p} \to 0$ quand $n \to \infty$. $\square$

Remarque 4.19. On a vu donc que les espace de Sobolev et les espaces de Hölder sont des cas particuliers des espaces de Besov. Si $p \neq 2$, alors L^p n'est pas un espace de Besov. De même les espaces de Sobolev $W^{s,p}(\mathbb{R}^d)$, $\dot{W}^{s,p}(\mathbb{R}^d)$. Ce sont des *espaces de Triebel-Lizorkin*. Pourtant, l'inégalité de Minkowski implique par exemple que

$$\|f\|_{L^p} \leq C(p,d)\|f\|_{\dot{B}^0_{p,2}}.$$

4.5 Inégalité de Khintchine (facultatif)

Soit $\Omega := \{-1,1\}^N$. On note $r = (r_1, \ldots, r_N)$ les éléments de Ω.

Lemme 4.20. *Pour tout* $1 \leq p < \infty$ *il existe* $C > 0$ *tel que pour tout* $N \in \mathbb{N}$ *et toute suite* $(a_1, \ldots, a_N) \in \mathbb{C}^N$

$$C^{-1}\Big(\sum_{j=1}^{N}|a_j|^2\Big)^{\frac{p}{2}} \leq 2^{-N}\sum_{r\in\Omega}\Big|\sum_{j=1}^{N}a_j r_j\Big|^p \leq C\Big(\sum_{j=1}^{N}|a_j|^2\Big)^{\frac{p}{2}}. \tag{4.11}$$

Avant de démontrer ce lemme, on en donnera une interprétation. Considérons l'ensemble des fonctions $u : \Omega \to \mathbb{C}$. Soit μ la mesure de comptage normalisée sur Ω, c'est-á-dire $\mu(A) = 2^{-N}|A|$ pour tout $A \subset \Omega$. Pour $1 \leq p < \infty$ l'espace $L^p(\Omega)$ est défini par la norme

$$\|u\|_{L^p}^p = \int_\Omega |u(r)|^p \mu(\mathrm{d}r) = 2^{-N}\sum_{r\in\Omega}|u(r)|^p.$$

Il est facile de voir que les fonctions $e_j : \Omega \to \mathbb{C}$ définies pour $1 \leq j \leq N$ par $e_j(r) = r_j$ vérifient $\|e_j\|_{L^2} = 1$ et $\langle e_j, e_k\rangle = \int_\Omega \overline{e_j(r)}e_k(r)\mu(\mathrm{d}r) = 0$ si $j \neq k$. Soit $a_1, \ldots, a_N \in \mathbb{C}$ et $u(r) := \sum_{j=1}^N a_j r_j$, donc $u = \sum_{j=1}^N a_j e_j$. On peut réécrire (4.11) de manière suivante :

$$\widetilde{C}^{-1}\|u\|_{L^2} \leq \|u\|_{L^p} \leq \widetilde{C}\|u\|_{L^2}, \qquad \text{où } \widetilde{C} := C^{\frac{1}{p}}. \tag{4.12}$$

Comme $\mu(\Omega) = 1$, on voit de cette écriture que l'inégalité à gauche est évidente pour $p \geq 2$ et celle à droite pour $p \leq 2$.

Il n'y a évidemment aucune chance que les bornes (4.12) puissent être vraies pour *toute* fonction $u : \Omega \to \mathbb{C}$, avec une constante $\widetilde{C}$ qui ne dépend pas de N. Les fonctions de la forme $\sum_{j=1}^N a_j e_j$ sont très spéciales.

En réalité, il est facile de voir que les fonctions $e_A := \prod_{j\in A} e_j$ pour $A \subset \{1,2,\ldots,N\}$ forment une *base orthonormée* de $L^2(\Omega)$. On les appelle les *fonctions de Walsh*. Une fonction générale $u : \Omega \to \mathbb{C}$ peut donc s'écrire comme $u = \sum_{A\subset\{1,\ldots,N\}} a_A e_A$, où $a_A \in \mathbb{C}$ pour tout $A \subset \{1,\ldots,N\}$. Si on voit Ω comme le groupe abélien $\Omega = \mathbb{Z}_2^N$, alors les fonctions de Walsh sont les *caractères*, c'est-à-dire les homomorphismes $\mathbb{Z}_2^N \to \mathbb{C}^*$. Avec la multiplication de fonctions comme opération de groupe, les fonctions de Walsh forment le *groupe dual* de $\mathbb{Z}_2^N$, qui s'avère isomorphe à $\mathbb{Z}_2^N$. De ce point de vue, $(a_A)_{A\subset\{1,\ldots,N\}}$ est la *transformée de Fourier* de la fonction u.

L'inégalité (4.12) dit que toutes les normes $\|u\|_{L^p}$ sont comparables, à la condition que $a_A = 0$ pour tout A tel que $|A| \neq 1$. On peut voir facilement que cela reste vrai si on suppose seulement $a_A =$

0 pour tout $|A| \geq 2$. L'inégalité (4.12) paraît maintenant, peut-être, moins surprenante. Elle affirme l'équivalence des normes L^p sous des hypothèses très fortes sur la transformée de Fourier de u. On a déjà vu des résultats de ce type, notamment les inégalités de Bernstein.

Démonstration du Lemme 4.20. On commence par l'inégalité à droite. Comme on l'a observé ci-dessus, les grandes valeurs de p sont intéressantes, donc on peut prendre $p = 2k$ avec $k \in \mathbb{N}$. (Avertissement : les formules qui suivent peuvent être difficiles à digérer pour k général ; il est utiles de prendre $k = 2$ ou $k = 3$ pour voir ce qui se passe.) On a alors

$$\begin{aligned}
2^{-N}\sum_{r\in\Omega}\Big|\sum_{j=1}^{N} a_j r_j\Big|^{2k} &= 2^{-N}\sum_{r\in\Omega}\Big(\sum_{j=1}^{N} a_j r_j\Big)^k\Big(\sum_{j=1}^{N}\overline{a_j} r_j\Big)^k \\
&= 2^{-N}\sum_{r\in\Omega}\sum_{\sum_{j=1}^N \alpha_j=\sum_{j=1}^N \beta_j=k}\frac{k!}{\alpha!}\frac{k!}{\beta!}\prod_{j=1}^{N} a_j^{\alpha_j}\overline{a_j}^{\beta_j} r_j^{\alpha_j+\beta_j}.
\end{aligned}$$

Seulement les termes où $\alpha_j + \beta_j$ est paire pour tout j peuvent être non nuls. On a donc

$$\begin{aligned}
2^{-N}\sum_{r\in\Omega}\Big|\sum_{j=1}^{N} a_j r_j\Big|^{2k} &\leq 2^{-N}\sum_{r\in\Omega}\sum_{\sum_{j=1}^N \alpha_j=\sum_{j=1}^N \beta_j=k,\, 2|\alpha_j+\beta_j}\frac{k!}{\alpha!}\frac{k!}{\beta!}\prod_{j=1}^{N} |a_j|^{\alpha_j+\beta_j} r_j^{\alpha_j+\beta_j} \\
&= \sum_{\sum_{j=1}^N \alpha_j=\sum_{j=1}^N \beta_j=k,\, 2|\alpha_j+\beta_j}\frac{k!}{\alpha!}\frac{k!}{\beta!}\prod_{j=1}^{N} |a_j|^{\alpha_j+\beta_j} \leq C_k\Big(\sum_{j=1}^{N}|a_j|^2\Big)^k,
\end{aligned}$$

où C_k dépend seulement de k.

Pour montrer l'inégalité à gauche pour $p = 1$ (sans perdre la généralité), on écrit

$$2^{-N}\sum_{r\in\Omega}\Big|\sum_{j=1}^{N} a_j r_j\Big|^2 = 2^{-N}\sum_{r\in\Omega}\Big|\sum_{j=1}^{N} a_j r_j\Big|^{\frac{2}{3}}\Big|\sum_{j=1}^{N} a_j r_j\Big|^{\frac{4}{3}} \leq \Big(2^{-N}\sum_{r\in\Omega}\Big|\sum_{j=1}^{N} a_j r_j\Big|\Big)^{\frac{2}{3}}\Big(2^{-N}\sum_{r\in\Omega}\Big|\sum_{j=1}^{N} a_j r_j\Big|^4\Big)^{\frac{1}{3}}.$$

Il suffit maintenant d'appliquer l'inégalité déjà démontrée pour $p = 4$. □

4.6 Exercices

Chapitre 5

Restrictions des transformées de Fourier

5.1 Formulation du problème

Soit $S \subset \mathbb{R}^d$ une hyper-surface de dimension $d-1$, de mesure de Hausdorff finie et strictement positive. Pour simplifier, on peut prendre S une hyper-surface lisse. Pour quelles valeurs $1 \le p, q \le \infty$ il existe une constante $C = C(p,q,d)$ telle que

$$\|\widehat{f}\|_{L^q(S)} \le C\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^d)}, \qquad \text{pour tout } f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d)? \tag{5.1}$$

Ici, il faut entendre qu'on considère la mesure de Hausdorff sur S, induite par le mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^d$.

Ce type de question s'est révélé extrêmement important en analyse des équations aux dérivées partielles, surtout non linéaires, mais on n'aura pas le temps de voir ces applications.

Observons d'abord que (5.1) est vrai si $p = 1$ et q est arbitraire. On peut en déduire facilement (en utilisant l'inégalité de Hölder) que pour tout $q \in [1,\infty]$ il existe $p_0 = p_0(q) \in [1,\infty]$ tel que (5.1) est vrai pour $p < p_0$ et faux pour $p > p_0$. Il est facile de voir que $p_0(q) \le 2$. En effet, il n'existe pas de constante C telle que $\|\widehat{f}\|_{L^q(S)} \le C\|\widehat{f}\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}$ pour tout $\widehat{f} \in L^2(\mathbb{R}^d)$.

Il s'avère qu'en général la réponse à la question si (5.1) est vrai pour un choix particulier des exposants p et q, dépend fortement de la surface S, en particulier de la *courbure*. Dans le cas “plat”, on a le résultat suivant.

Proposition 5.1. *Si S est un sous-ensemble d'un hyperplan de mesure finie et strictement positive, alors $p_0(1) = 1$.*

Démonstration. Sans restreindre la généralité, on peut supposer que $S \subset \{(\xi', \xi_d) \in \mathbb{R}^{d-1} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^d : \xi_d = 0\}$, et que la mesure de l'ensemble $S \cap \{\xi : |\xi'| \le \frac{1}{2}\}$ est strictement positive. Soit $\chi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$, avec $\mathrm{supp}(\chi) \subset [-1,1]$ et $\chi(\eta) = 1$ pour $-\frac{1}{2} \le \eta \le \frac{1}{2}$. On note $\widetilde{\chi}(\xi') := \chi(|\xi'|)$. Soit $\delta > 0$ et considérons la fonction f telle que

$$\widehat{f}(\xi) = \widehat{f}(\xi', \xi_d) = \widetilde{\chi}(\xi')\chi(\xi_d/\delta).$$

Alors $\|\widehat{f}\|_{L^1(S)} = \|\widetilde{\chi}\|_{L^1(S)} > 0$ ne dépend pas de δ.

Soit $g := \mathscr{F}^{-1}(\widetilde{\chi})$, $h := \mathscr{F}^{-1}(\chi)$, $h_\delta(x) := \delta h(\delta x)$, de sorte que $f(x) = f(x', x_d) = g(x')h_\delta(x_d)$. On obtient

$$\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} = \|g\|_{L^p(\mathbb{R}^{d-1})}\|h_\delta\|_{L^p(\mathbb{R})} = \delta^{1-\frac{1}{p}}\|g\|_{L^p(\mathbb{R}^{d-1})}\|h\|_{L^p(\mathbb{R})}.$$

Si $p > 1$, alors en prenant $\delta \to 0$, on voit que (5.1) ne peut être vrai pour aucune constante C. $\square$

Dans la suite de ce chapitre, nous nous intéressons au cas de la sphère unité $S = \mathbb{S}^{d-1} \subset \mathbb{R}^d$. Nous nous restreignons au cas $q = 2$, qui est le plus facile. Nous allons prouver que $p_0(2) = 4/3$ pour la sphère unité en dimension $d = 3$.

5.2 L'exemple de Knapp

Une idée similaire mène à une contrainte sur le choix des exposants p et q dans le cas de la sphère.

Proposition 5.2. *Soit $S \subset \mathbb{R}^d$ la sphère unité. Si* (5.1) *est vrai pour une certaine constante C, alors* $p' = \frac{p}{p-1} \geq \frac{(d+1)q}{d-1}$.

Démonstration. Le calcule est très similaire au calcul précédent, en considérant la fonction f telle que

$$\widehat{f}(\xi', \xi_d) = \widetilde{\chi}(\xi'/\sqrt{\delta})\chi((\xi_d - 1)/\delta).$$

□

5.3 Formulation duale

Lemme 5.3. *Soit $S = \mathbb{S}^{d-1} \subset \mathbb{R}^d$ la sphère unité, $1 \leq p, q \leq \infty$ et C une constante. Soit σ la mesure de Hausdorff sur S. La condition* (5.1) *est équivalente à la condition*

$$\|\mathscr{F}^{-1}(g\sigma)\|_{L^{p'}(\mathbb{R}^d)} = \|\mathscr{F}(g\sigma)\|_{L^{p'}(\mathbb{R}^d)} \leq C\|g\|_{L^{q'}(S)}, \qquad \textit{pour tout } g \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d). \tag{5.2}$$

Démonstration. Supposons que (5.1) est vrai et soit $g \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$. Soit $h := \mathscr{F}(g\sigma)$ au sens des distributions. Alors pour tout $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$ on a

$$h(f) = (g\sigma)(\widehat{f}) = \sigma(g\widehat{f}) = \int_{\mathbb{R}^d} \widehat{f}(\xi)g(\xi)\sigma(\mathrm{d}\xi) \leq \|\widehat{f}\|_{L^q(S)}\|g\|_{L^{q'}(S)} \leq C\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^d)}\|g\|_{L^{q'}(S)}.$$

Cela implique $h \in L^{p'}(\mathbb{R}^d)$ et $\|h\|_{L^{p'}(\mathbb{R}^d)} \leq C\|g\|_{L^{q'}(S)}$.

Supposons maintenant que (5.2) est vrai, et soit $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$. Alors pour tout $g \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$ on a

$$\int_{\mathbb{R}^d} \widehat{f}(\xi)g(\xi)\sigma(\mathrm{d}\xi) = (\mathscr{F}(g\sigma))(f) \leq \|\mathscr{F}(g\sigma)\|_{L^{p'}(\mathbb{R}^d)}\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} \leq C\|g\|_{L^{q'}(S)}\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^d)}.$$

Comme toute fonction lisse $S \to \mathbb{C}$ s'étend comme une fonction de la classe $\mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$, et l'ensemble des fonctions lisses sur S est dense dans $L^{q'}(S)$, cela implique $\widehat{f} \in L^q(S)$ et $\|\widehat{f}\|_{L^q(S)} \leq C\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^d)}$. □

La raison pour laquelle le cas $q = 2$ est le plus facile est la suivante.

Lemme 5.4. *Si $q = 2$, alors chacune des conditions* (5.1) *et* (5.2) *est équivalente à*

$$\|f * \mathscr{F}^{-1}\sigma\|_{L^{p'}(\mathbb{R}^d)} \leq C^2\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^d)}, \qquad \textit{pour tout } f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d). \tag{5.3}$$

Démonstration. Si on suppose (5.1) et (5.2), alors (5.3) s'obtient facilement en posant $g = \widehat{f}$ dans (5.2).

Inversement, supposons (5.3), et soit $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$. On a

$$\begin{aligned}\|\widehat{f}\|^2_{L^2(S)} &= \int_{\mathbb{R}^d} |\widehat{f}(\xi)|^2 \sigma(\mathrm{d}\xi) = \int_{\mathbb{R}^d} \overline{\widehat{f}(\xi)}\widehat{f}(\xi)\sigma(\mathrm{d}\xi) = (\widehat{f}\sigma)(\overline{\widehat{f}}) = (\widehat{f})(\mathscr{F}^{-1}(\overline{f})) \\ &= \mathscr{F}^{-1}(\widehat{f}\sigma)(\overline{f}) = (f * \mathscr{F}^{-1}\sigma)(\overline{f}) \le \|f * \mathscr{F}^{-1}\sigma\|_{L^{p'}(\mathbb{R}^d)}\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} \le C^2\|f\|^2_{L^p(\mathbb{R}^d)}.\end{aligned}$$

□

Remarque 5.5. Réduire les estimations (5.1) et (5.2) à l'inégalité (5.3) s'appelle "argument TT^*".

5.4 Théorème de Tomas-Stein

Pour $q = 2$, l'exemple de Knapp montre que $p' \ge \frac{2(d+1)}{d-1}$, autrement dit $p \le \frac{2(d+1)}{d+3}$. Il s'avère que c'est aussi une condition suffisante.

Théorème 5.6 (Tomas-Stein)**.** *Il existe une constante $C = C(d)$ telle que*

$$\|\widehat{f}\|_{L^2(\mathbb{S}^{d-1})} \le C\|f\|_{L^{p_d}(\mathbb{R}^d)}, \qquad \textit{pour tout } f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d),$$

où $p_d := \frac{2(d+1)}{d+3}$.

Comme on l'avait observé, cela implique (5.1) pour $q = 2$ et tout $p < p_d$.

On va démontrer une version plus faible.

Proposition 5.7 (Tomas-Stein, cas non-endpoint)**.** *Pour tout $p < p_d$ il existe une constante $C = C(p, d)$ telle que*

$$\|\widehat{f}\|_{L^2(\mathbb{S}^{d-1})} \le C\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^d)}, \qquad \textit{pour tout } f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d),$$

On a besoin du lemme suivant.

Lemme 5.8. *Il existe une constante $C = C(d) > 0$ telle que $|\mathscr{F}^{-1}\sigma(x)| \le C|x|^{-\frac{d-1}{2}}$ pour tout $x \ne 0$.*

Démonstration. Il est possible de le déduire par la méthode de la phase stationnaire, qui sera presentée dans le cours de Zerzeri. Mais il est possible également de le voir par un calcul explicite.

En effet, grâce à la symétrie sphérique, il suffit de considérer $x = (0, \dots, 0, x_d)$. Avec le changement de variable $\xi_d = \cos\theta$, on arrive à

$$(\mathscr{F}^{-1}\sigma)(x) = \int_{\mathbb{R}^d} \mathrm{e}^{2\pi i x_d \xi_d}\sigma(\mathrm{d}\xi) = |\mathbb{S}^{d-2}| \int_0^\pi \mathrm{e}^{2\pi i x_d \cos\theta}(\sin\theta)^{d-2}\,\mathrm{d}\theta.$$

Cette intégrale peut s'exprimer par des fonctions de Bessel. En dimension $d = 3$ le calcul est particulièrement simple :

$$|\mathbb{S}^1| \int_0^\pi \mathrm{e}^{2\pi i x_d \cos\theta}\sin\theta\,\mathrm{d}\theta = 2\pi \int_{-1}^1 \mathrm{e}^{2\pi i x_d y}\,\mathrm{d}y = \frac{2\sin(2\pi x_d)}{x_d}.$$

□

Démonstration de la Proposition 5.7. On montre (5.3). Soit $K := \mathscr{F}^{-1}(\sigma)$. L'idée consiste à écrire

$$K = K_0 + \sum_{j=1}^{\infty} K_j = \chi K + \sum_{j=1}^{\infty} \phi_j K,$$

χ et ϕ_j ayant la même signification que dans le chapitre précédent. Soulignons pourtant que leur rôle n'est pas le même, car ici nous les utilisons pour décomposer le noyau K dans l'espace physique, et non pas dans l'espace des fréquences.

Il est clair que $\|f * K_0\|_{L^{p'}} \leq C\|f\|_{L^p}$. Considérons $j \geq 1$. D'un côté, on a la borne

$$\|K_j * f\|_{L^2} \leq \|\widehat{K}_j\|_{L^\infty}\|f\|_{L^2}.$$

On remarque que $\|\widehat{K}_j\|_{L^\infty} = \|\widehat{\phi}_j * \sigma\|_{L^\infty} = \|2^{dj}\widehat{\phi}(2^j\cdot)\|_{L^\infty} \leq C \times 2^j$ (la dernière inégalité n'est pas triviale, et laissée comme exercice). D'un autre côté,

$$\|K_j * f\|_{L^\infty} \leq \|K_j\|_{L^\infty}\|f\|_{L^1} \leq C \times 2^{-\frac{(d-1)j}{2}}\|f\|_{L^1}.$$

Par l'interpolation (Marcinkiewicz ou Riesz-Thorin, les deux s'appliquent),

$$\|K_j * f\|_{L^{p'}} \leq C \times 2^{j(1-\theta)-\frac{(d-1)j\theta}{2}}\|f\|_{L^p},$$

où $\theta \in [0,1]$ est défini par la condition $\frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{2} + \theta = \frac{1+\theta}{2}$. On obtient une série géométrique convergente, parce que (comme il est facile de vérifier) $p < \frac{2(d+1)}{d+3}$ implique $1 - \theta < \frac{(d-1)\theta}{2}$. En prenant la somme en j, on a $\|K * f\|_{L^{p'}} \leq C\|f\|_{L^p}$. En effet, on peut voir que $K \in L^{p'}(\mathbb{R}^d)$ si $p' > \frac{2(d+1)}{d-1}$, donc la somme $K_0 * f + \sum_{j=1}^{\infty} K_j * f$ converge dans $L^{p'}(\mathbb{R}^d)$ vers $K * f$. □

Remarque 5.9. La première chose à essayer pour montrer (5.3) pourrait être l'inégalité de Young, mais il s'avère que cela n'aboutit pas à une solution.

Remarque 5.10. Si (5.2) est vrai, alors en particulier (en prenant $g = 1$), on doit avoir $\mathscr{F}^{-1}\sigma \in L^{p'}(\mathbb{R}^d)$. On peut vérifier que c'est équivalent à $p' > \frac{2d}{d-1}$. La *Conjecture de restriction* affirme que cette condition, avec la condition de Knapp $p' \geq \frac{q(d+1)}{d-1}$, sont aussi *suffisantes* pour que (5.1) soit vrai. La conjecture reste un problème ouvert si $d \geq 3$ et $q \neq 2$.

Bibliographie

[1] J. Bergh et J. Löfström. *Interpolation Spaces. An Introduction*, Springer.

[2] H. Boumaza. *Distributions tempérées et espaces de Sobolev*, notes de cours, https://www.math.univ-paris13.fr/~boumaza/cours/2018-2019-M1-Distributions%20temperees.pdf.

[3] L. Grafakos. *Classical Fourier Analysis*, Springer.

[4] L. Hörmander. *An Introduction to Complex Analysis in Several Variables*, North-Holland.

[5] R. Melrose. *From Microlocal to Global Analysis*, notes de cours. http://math.mit.edu/~rbm/18-157-S14/iml.pdf.

[6] C. Muscalu et W. Schlag. *Classical and Multilinear Harmonic Analysis, Volume I*, Cambridge University Press.

[7] W. Rudin. *Analyse réelle et complexe*

[8] E. Stein. *Fourier Analysis and Differentiability Properties of Functions*, Princeton University Press.

[9] T. Tao. *Blog*, https://terrytao.wordpress.com/2020/03/29/247b-notes-1-restriction-theory/#more-11593.