Institut Galilée

Filière M1

2020-2021

DISTRIBUTIONS

Jacek Jendrej (CNRS et USPN)

jendrej@math.univ-paris13.fr

(d'après les notes de cours du même titre par prof. Jean-Marc Delort, USPN)

CM I, 02/03/2021

Informations pratiques

Horaires

* CM les mardis 8h30 – 11h45
* TD les jeudis 8h30 – 11h45

(trois séances à Villetaneuse, le reste sur Zoom).

Examen

le 20 avril 2021 après-midi (probablement)

DM

10% de la note finale.

Chapitre I. Espaces de Fréchet

Définition 1. Soit X un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$.

Une *semi-norme* est une fonction $p : X \to [0,\infty[$ ayant les propriétés suivantes :

i) $p(u+v) \leq p(u) + p(v) \quad \forall u,v \in X$

ii) $p(\lambda u) = |\lambda|\, p(u) \quad \forall \lambda \in \mathbb{C},\ u \in X.$ $\boxtimes$

Rappel

$\|\cdot\|_X$ norme si

i), ii)

iii) $\|u\|_X = 0 \Leftrightarrow u = 0$

Soit X un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$ et $p_1, p_2, \dots$ une suite de semi-normes.

Définition 2. On dit que la suite de semi-normes $(p_j)_j$ est *séparante* si $\forall\, u \in X \setminus \{0\}$ il existe $j \in \mathbb{N}^*$ tel que $p_j(u) > 0$. $\boxtimes$

Définition 3. Soit $p_1, p_2, \dots$ une suite séparante de semi-normes. On dit qu'un ensemble $\mathcal{U} \subset X$ est *ouvert* si $\forall\, u \in \mathcal{U}$ il existe $j_0 \in \mathbb{N}^*$ et $\varepsilon > 0$ tels que

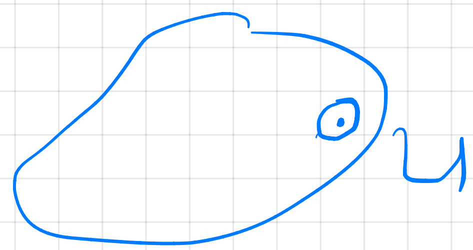
$$\{ v \in X :\ p_j(v-u) < \varepsilon \text{ pour tout } j \leq j_0 \} \subset \mathcal{U}.$$

Rappel

Si $(X, \|\cdot\|_X)$ espace normé, alors $\mathcal{U} \subset X$ est ouvert (par déf.) si

$\forall u \in \mathcal{U}\ \exists\, \varepsilon > 0$ tq $\{ v : \|v-u\|_X < \varepsilon \} \subset \mathcal{U}.$

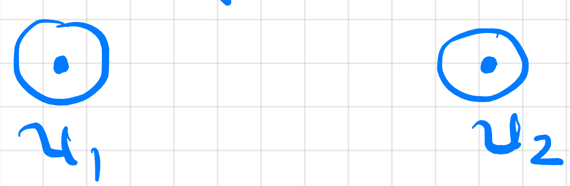
"pseudo-boule".



Proposition 1. La condition ci-dessus définit une topologie de Hausdorff sur X.

Exercice 1. Démontrer la dernière proposition. $\boxtimes$

Hausdorff :



Proposition 2. La fonction $d : X \times X \to [0,\infty[$ définie par
$$d(u,v) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{2^j} \frac{p_j(v-u)}{1+p_j(v-u)}$$
est une distance et induit la topologie déf. précédemment.

Démonstration Posons d'abord

$$d_0(u) := \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{2^j} \frac{p_j(u)}{1+p_j(u)}.$$

On montre que d_0 a les propriétés suivantes :

i) $d_0(u) = 0 \implies u = 0$

ii) $d_0(u+v) \leq d_0(u) + d_0(v), \quad \forall u,v \in X$

La première propriété résulte directement du fait que la famille $(p_j)_j$ est séparante.

Pour montrer ii) il suffit de voir que

$$\frac{p_j(u+v)}{1+p_j(u+v)} \leq \frac{p_j(u)}{1+p_j(u)} + \frac{p_j(v)}{1+p_j(v)}, \quad \forall j \in \mathbb{N}^*.$$

La fonction $f(t) := \frac{t}{1+t}$ est croissante et concave pour $t \geq 0$. Posons $a := p_j(u)$, $b := p_j(v)$, on a donc $p_j(u+v) \leq a+b$ et

$$f(p_j(u+v)) \leq f(a+b) \leq f(a) + f(b).$$

Les propriétés i) et ii) impliquent facilement que d est une distance.

Il faut vérifier :

i) $d(u,v) = 0 \iff u = v$

ii) $d(u,v) + d(v,w) \geq d(u,w)$

iii) $d(u,v) = d(v,u)$

$$d(u,v) = d_0(u-v)$$

iii) est vrai parce que

$$p_j(u-v) = p_j(v-u), \ \forall j.$$

i) $d(u,v) = 0 \iff$

$p_j(v-u) = 0 \quad \forall j$

$\implies v = u$ car $(p_j)_j$ est séparante.

$$\frac{t}{1+t} = 1 - \frac{1}{1+t}$$

$$f'(t) = \frac{1}{(1+t)^2}, \quad f''(t) = \frac{-2}{(1+t)^3}$$

$f(0) = 0$. Srg $a \leq b$.

$$\frac{f(a+b) - f(b)}{a} \leq \frac{f(a) - f(0)}{a}$$

$$\begin{array}{ccc} \shortparallel & & \shortparallel \\ f'(d) & \leq & f'(c) \\ d \in [b, a+b] & & c \in [0, a] \end{array}$$

Soit $U \subset X$ un ensemble ouvert selon la Déf. 3, et $u \in U$. Soit j_0 et ε donnés par la Déf. 3. Sans restreindre la généralité, on peut supposer $\varepsilon \leq 1$.

Soit $v \in X$ tel que $d(u,v) < 2^{-j_0-1}\varepsilon$.

La définition de la distance d implique alors

$$\frac{1}{2^j}\,\frac{p_j(v-u)}{1+p_j(v-u)} < 2^{-j_0-1}\varepsilon, \qquad \forall j \in \mathbb{N}^*.$$

En particulier, $\forall j \leq j_0$ on a

$$\frac{p_j(v-u)}{1+p_j(v-u)} < \frac{1}{2}\varepsilon \iff (2-\varepsilon)\,p_j(v-u) < \varepsilon,$$

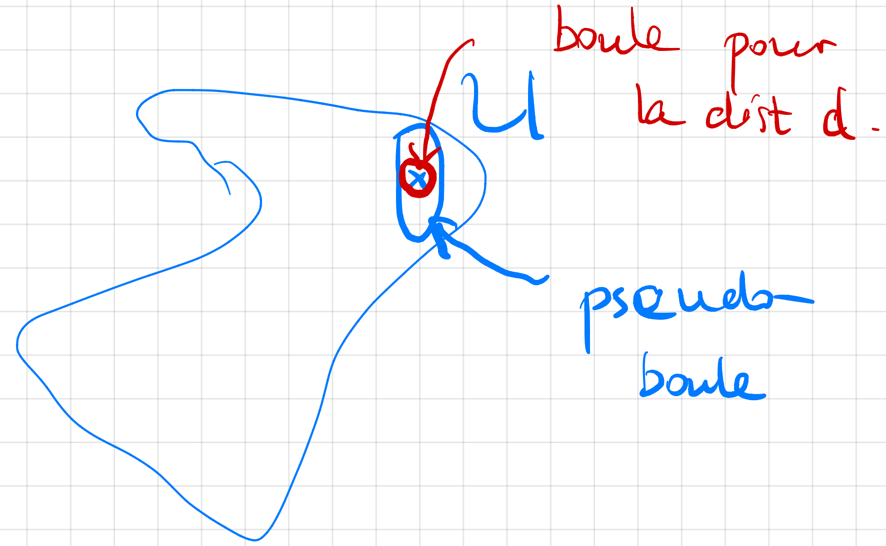
donc $p_j(v-u) < \varepsilon$ pour tout $j \leq j_0$, ce qui implique $v \in U$. Ainsi, la topologie de la Définition 3 est moins fine que la topologie induite par d.

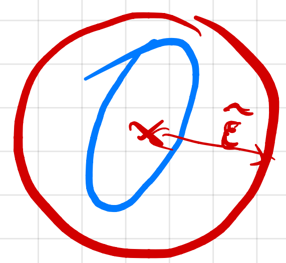
Pour montrer qu'elle est aussi plus fine, il suffit de prouver que pour tout $u \in X$, $\tilde{\varepsilon} > 0$ il existe $j_0 \in \mathbb{N}^*$ et $\varepsilon > 0$ tels que

$$\{v \in X : p_j(v-u) < \varepsilon \ \ \forall j \leq j_0\} \subset \{v \in X : d(u,v) < \tilde{\varepsilon}\}.$$

Pour cela, il suffit de prendre $j_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que $2^{-j_0} < \frac{1}{2}\tilde{\varepsilon}$, et $\varepsilon < \frac{1}{2}\tilde{\varepsilon}$.

1) Si U ouvert selon Déf 3 $\Rightarrow$ U ouvert pour la dist. d.





Si $2^{-j_0} < \frac{1}{2}\tilde{\varepsilon}$, alors

$$\sum_{j=j_0+1}^{\infty} \frac{1}{2^j}\,\frac{p_j(v-u)}{1+p_j(v-u)} \leq \sum_{j=j_0+1}^{\infty} \frac{1}{2^j} = 2^{-j_0} < \frac{1}{2}\tilde{\varepsilon}.$$

$$\sum_{j=1}^{j_0} \frac{1}{2^j}\,\frac{p_j(v-u)}{1+p_j(v-u)} \leq \varepsilon \sum_{j=1}^{j_0} \frac{1}{2^j} < \varepsilon < \frac{1}{2}\tilde{\varepsilon}$$

Rque d ne définit une norme.

Puisque X est un espace métrique, il est clair ce que signifient la convergence de suites et la notion d'une suite de Cauchy.

Lemme 1. Une suite $(u_n)_n$ d'éléments de X :

1) converge vers u si et seulement si
$$\lim_{n\to\infty} p_j(u_n - u) = 0, \quad \text{pour tout } j \in \mathbb{N}^*.$$

2) est une suite de Cauchy si et seulement si $\forall \varepsilon > 0, j \in \mathbb{N}^*$ $\exists N_0 \in \mathbb{N}$ tel que
$$p_j(u_m - u_n) < \varepsilon \quad \text{pour tous } m, n \geq N_0$$

$\boxtimes$

Si $(p_j)_j$ est une suite de semi-normes, alors en remplaçant p_j par $\max_{l\leq j} p_l$, on peut supposer sans restreindre la généralité que $(p_j)_j$ est une suite croissante, c'est-à-dire
$$p_j(u) \leq p_{j+1}(u) \quad \text{pour tous } u \in X \text{ et } j \in \mathbb{N}^*.$$

Proposition 2. Soit X un espace vectoriel, muni d'une famille croissante de semi-normes $(p_j)_j$. Une forme linéaire $T : X \to \mathbb{C}$ est continue si, et seulement si, il existe $j \in \mathbb{N}^*$ et $C > 0$ tels que $|Tu| \leq C p_j(u)$, $\forall u \in X$.

Démonstration

Soit $T : X \to \mathbb{C}$ une forme linéaire telle que
$$|Tu| \leq C p_j(u), \quad \forall u \in X,$$
et soit $(u_n)_n$ une suite qui converge vers 0.

Dém de Lemme 1

1) Supposons que
$$\lim_{n\to\infty} p_j(u_n - u) = 0 \quad \forall j \in \mathbb{N}^*.$$

On va montrer que
$$\lim_{n\to\infty} d(u_n, u) = 0.$$

Soit $\varepsilon > 0$.

Soit $j_0 \in \mathbb{N}^*$ tq $2^{-j_0} < \frac{1}{2}\varepsilon$.
$$\Rightarrow \sum_{j=j_0+1}^{\infty} \frac{1}{2^j} \frac{p_j(u_n - u)}{1 + p_j(u_n - u)} < \frac{1}{2}\varepsilon.$$

Mais
$$\lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{j_0} \frac{1}{2^j} \frac{p_j(u_n - u)}{1 + p_j(u_n - u)} = 0.$$

$$\Rightarrow d(u_n, u) < \varepsilon \quad \text{si } n \text{ assez grand.}$$

Maintenant, si $\lim_{n\to\infty} d(u_n, u) = 0$
$$\Rightarrow \frac{1}{2^j} \frac{p_j(u_n - u)}{1 + p_j(u_n - u)} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0, \quad \text{pour tout } j.$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} p_j(u_n - u) = 0, \forall j.$$

2) Exercice.

En particulier, $p_j(u_n) \to 0$ (voir Lemme 1) donc $Tu_n \to 0$, autrement dit T est continue en $u=0$. La linéarité implique que T est continue.

Inversement, supposons que pour tout $j \in \mathbb{N}^*$ il existe $u_j \in X$ tel que

$$|Tu_j| > j\, p_j(u_j).$$

Considérons la suite $v_j := \dfrac{u_j}{j\, p_j(u_j)}$.

Alors $p_j(v_j) = \dfrac{1}{j}$, donc $v_j \to 0$ dans X, mais $|Tv_j| > 1$ et T n'est pas continue.

je prend $C = j$

p_j suite croissante

$u_n \to 0$ dans $X \Rightarrow Tu_n \to 0$.

$u_n \to u$ dans $X \Rightarrow u_n - u \to 0$

$\Rightarrow T(u_n - u) = Tu_n - Tu \to 0$

$\Rightarrow Tu_n \to Tu$.

Pour les espaces normés: $(X, \|\cdot\|_X)$, alors

$T : X \to \mathbb{C}$ continue

$\Leftrightarrow \exists C$ tq $|Tu| \leq C \|u\|_X$, $\forall u \in X$.

(fonctionnelle linéaire) X^*.

$p_j(v_j) \to 0$.

$\Rightarrow \forall L \in \mathbb{N}^*$, $p_L(v_j) \to 0$.

parce que $p_L(v_j) \leq p_j(v_j)$ si j est assez grand. (si $j \geq L$)

Définition Soit X un espace vectoriel, muni d'une topologie induite par une famille séparante de semi-normes. On dit que X est un *espace de Fréchet* si X, vu comme un espace métrique, est complet.

Exemples

1) Si X est un espace de Banach, alors X est aussi un espace de Fréchet.
En effet, il suffit de poser $p_1(u) := \|u\|_X$ et $p_j(u) = 0$ pour tout $j \geq 2$.

2) Soit $X := \mathbb{C}^{\mathbb{N}^*}$ l'espace des suites de nombres complexes $u = (u^{(1)}, u^{(2)}, \dots)$ et posons
$$p_j(u) := |u^{(j)}|$$
Montrons que X est un espace de Fréchet.
Soit $(u_0, u_1, \dots)$ une suite de Cauchy dans X. Par le Lemme 1, pour tout $j \in \mathbb{N}^*$, la suite $(u_0^{(j)}, u_1^{(j)}, \dots)$ est une suite de Cauchy dans $\mathbb{C}$, donc elle converge vers $u^{(j)} \in \mathbb{C}$.
Encore une fois par le Lemme, $u_n \to u$ dans X.

Espace de Banach

— espace vect. normé complet.

2) Si $(u_n)_n \in X$

$u_n \to u$ dans X

$\Leftrightarrow u_n^{(j)} \to u^{(j)}$ dans $\mathbb{C}$.

$p_j(u_m - u_n) =$

$= |u_m^{(j)} - u_n^{(j)}|$

3) Soit $C(\mathbb{R}^d)$ l'espace des fonctions continues $u : \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$ et posons

$$p_j(u) := \sup_{|x|\leq j} |u(x)|.$$

Alors $C(\mathbb{R}^d)$ est un espace de Fréchet.

4) Soit $1 \leq p \leq \infty$. On définit $L^p_{loc}(\mathbb{R}^d)$ comme l'espace des fonctions mesurables $u : \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$ telles que $\int_K |u(x)|^p dx < \infty$ pour tout $K \subset \mathbb{R}^d$ compact $\left(\operatorname{ess\,sup}_{x\in K} |u(x)| \text{ si } p=\infty \right)$.

Posons $$p_j(u) := \left(\int_{|x|\leq j} |u(x)|^p dx \right)^{1/p}.$$

$L^p_{loc}(\mathbb{R}^d)$ est alors un espace de Fréchet.

$\boxtimes$

pas forcément bornées !

NB: $BC(\mathbb{R}^d)$ esp. de fonct. bornées continues avec la norme

$$\|u\|_{BC} := \sup_{x\in\mathbb{R}^d} |u(x)|.$$

Théorème 1. Soit X un espace de Fréchet, dont la topologie est donnée par une suite croissante de semi-normes $(p_j)_j$, et soit $(T_n)_n$ une suite de formes linéaires continues $T_n : X \to \mathbb{C}$ telles que

$$\sup_n |T_n u| < \infty, \quad \forall u \in X.$$

Alors il existe $C > 0$ et $j \in \mathbb{N}^*$ tels que

$$|T_n u| \leq C p_j(u), \quad \forall n \in \mathbb{N}, u \in X.$$

"Banach-Steinhaus".

Rappel $(X, \|\cdot\|_X)$ un espace de Banach, $(T_n)_n$ suite d'éléments de X^* tq $\sup_n |T_n u| < \infty$ $\forall u \in X$, alors $\sup_n \|T_n\|_{X^*} < \infty$.

$$\iff |T_n u| \leq C \|u\|_X \quad \forall n \in \mathbb{N}, u \in X.$$

Démonstration La preuve est basée sur le théorème de Baire, et ressemble beaucoup à la preuve habituelle du théorème de Banach-Steinhaus.

Considérons les ensembles

$$A_m := \{u\in X : \sup_n |T_n u| \leqslant m\}, \quad m\in\mathbb{N}^*.$$

Par l'hypothèse, $\bigcup_{m\in\mathbb{N}^*} A_m = X$.

Chaque A_m, étant une intersection d'ensembles fermés, est un ensemble fermé.

Par le théorème de Baire, il existe $m\in\mathbb{N}^*$ tel que A_m est d'intérieur non vide.

Il existe donc $u\in X$, $j\in\mathbb{N}^*$ et $\varepsilon>0$ tels que

$$\{v\in X : p_j(v-u)<\varepsilon\} \subset A_m.$$

On observe que A_m est convexe et symétrique par rapport à 0, donc

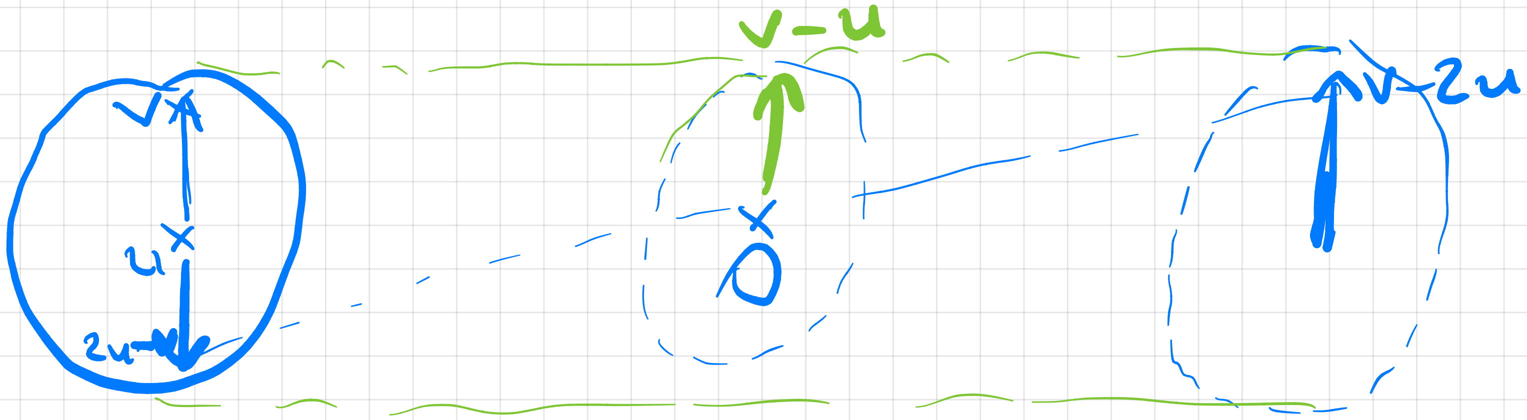
$$p_j(v-u)<\varepsilon \Rightarrow p_j(u-v)= p_j((2u-v)-u)<\varepsilon \Rightarrow 2u-v\in A_m$$
$$\Rightarrow v-2u\in A_m,$$

donc $\frac{1}{2}(v+(v-2u)) = v-u\in A_m$,

autrement dit $\quad p_j(v-u)<\varepsilon \Rightarrow v-u\in A_m$

$$p_j(w)<\varepsilon \Rightarrow w\in A_m \Rightarrow \sup_n |T_n w|\leqslant m,$$

et on obtient $\quad \sup_n |T_n w| \leqslant \frac{m}{\varepsilon}\, p_j(w).$ $\square$



$\forall u\in X\ \exists m : u\in A_m$

$u\in A_m \Leftrightarrow |T_n u|\leqslant m \quad \forall n\in\mathbb{N}$

$\Rightarrow A_m = \bigcap A_{m,n}$

$A_{m,n} := \{u\in X : |T_n u|\leqslant m\}.$

T_n continue $\Rightarrow$ $A_{m,n}$ fermé.

Thm de Baire

Si X esp. metrique complet et $(A_m)_m$ une suite d'ens. fermé d'intérieur vide, alors $\bigcup A_m$ est d'intérieur vide.

$u\in A_m \Rightarrow -u\in A_m$

clair parce que $|T_n u| = |T_n(-u)|$

$v,u\in A_m \Rightarrow \frac{1}{2}(u+v)\in A_m$

clair parce que $|T_n(\frac{1}{2}(u+v))| \leqslant \frac{1}{2}(|T_n u|+|T_n v|).$

Chapitre II Espaces de fonctions différentiables

1. Les espaces $C^k(\Omega)$

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ un ensemble ouvert. On pose

$$C(\Omega) = C^0(\Omega) := \{ u : \Omega \to \mathbb{C} \ ; \ u \text{ est continue sur } \Omega \}$$

$$C^1(\Omega) := \{ u : \Omega \to \mathbb{C} \ ; \ u \text{ admet des dérivées partielles d'ordre } 1, \text{ continues sur } \Omega \}$$

$$:= \{ u : \Omega \to \mathbb{C} \ ; \ \forall i = 1, \dots, d, \ \frac{\partial u}{\partial x_i} \text{ existe et } \frac{\partial u}{\partial x_i} \in C(\Omega) \}$$

Par récurrence, on peut définir

$$C^k(\Omega) := \{ u : \Omega \to \mathbb{C} ; \ \forall i = 1 \dots d, \ \frac{\partial u}{\partial x_i} \text{ existe et } \frac{\partial u}{\partial x_i} \in C^{k-1}(\Omega) \}$$

On pose $C^\infty(\Omega) := \bigcap_{k=0}^{\infty} C^k(\Omega)$.

__Exercise 1.__ Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, $C^k(\Omega)$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$.
De plus, si $u, v \in C^k(\Omega)$, alors $uv \in C^k(\Omega)$.

__Définition / Notation__ Un __multi-indice__ est un élément $\alpha \in \mathbb{N}^d$, $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d)$. On pose

$$|\alpha| := \alpha_1 + \dots + \alpha_d \quad (\text{longueur de } \alpha),$$

$$\alpha! := (\alpha_1!) \dots (\alpha_d!)$$

$$\partial^\alpha := \partial_{x_1}^{\alpha_1} \dots \partial_{x_d}^{\alpha_d}$$

$\alpha = (2, 3)$

$\alpha! = 2!\,3! = 12$

Si $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^d$, on écrit

$$\alpha \geq \beta \iff \beta \leq \alpha \iff \forall i = 1, \dots, d \quad \beta_i \leq \alpha_i$$

Si $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^d$ et $\alpha \geq \beta$, on définit $\alpha - \beta := (\alpha_1 - \beta_1, \dots, \alpha_d - \beta_d) \in \mathbb{N}^d$ et on pose

$$\binom{\alpha}{\beta} := \frac{\alpha!}{\beta!(\alpha-\beta)!} = \prod_{i=1}^{d} \binom{\alpha_i}{\beta_i} \quad \text{("coefficient binomial")}$$

Exercice 2. Soit $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, $u \in C^k(\Omega)$, $0 \leq l \leq k$ et $i_j \in \{1, \dots, d\}$ pour $j = 1, \dots, l$.

Pour $m \in \{1, \dots, d\}$, posons

$$\alpha_m := \#\{j : i_j = m\},$$

et soit $\alpha := (\alpha_1, \dots, \alpha_d) \in \mathbb{N}^d$.

Montrer que

* $|\alpha| = l$
* $\frac{\partial}{\partial x_{i_1}} \frac{\partial}{\partial x_{i_2}} \cdots \frac{\partial}{\partial x_{i_l}} u$ existe et est continue sur Ω
* $\partial^\alpha u$ existe et est continue sur Ω
* $\frac{\partial}{\partial x_{i_l}} \frac{\partial}{\partial x_{i_{l-1}}} \cdots \frac{\partial}{\partial x_{i_1}} u = \partial^\alpha u$.

Schwarz symétrie de dérivées itérées.

Exercice 3. (Formule de Newton)

Pour $x \in \mathbb{R}^d$ et $\alpha \in \mathbb{N}^d$, on pose $x^\alpha := x_1^{\alpha_1} \cdots x_d^{\alpha_d}$.

Montrer que, pour tout $x, y \in \mathbb{R}^d$ et $\alpha \in \mathbb{N}^d$,

$$(x+y)^\alpha = \sum_{\beta \leq \alpha} \binom{\alpha}{\beta} x^\beta y^{\alpha-\beta},$$

où la somme est étendue sur l'ensemble de tous les multi-indices $\beta \in \mathbb{N}^d$ tels que $\beta \leq \alpha$.

Exercise 4. (Formule de Leibniz)

Soit $u, v \in C^k(\Omega)$ et $\alpha \in \mathbb{N}^d$ avec $|\alpha| \leq k$.

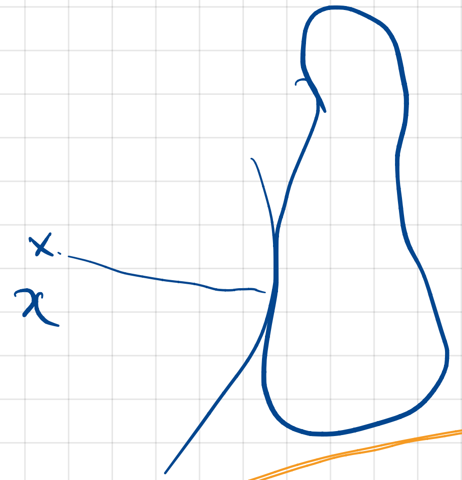
Alors $$\partial^\alpha(uv) = \sum_{\beta \leq \alpha} \binom{\alpha}{\beta} (\partial^\beta u)(\partial^{\alpha-\beta} v).$$

☐

Pour $x \in \mathbb{R}^d$, on note $|x| := \sqrt{\sum_{i=1}^d x_i^2}$ la norme euclidienne de x.

Si $x \in \mathbb{R}^d$ et $F \subset \mathbb{R}^d$, on pose

$$d(x,F) := \inf_{y \in F} |x-y|.$$



Lemme 1. Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ un ensemble ouvert.

Pour tout $j \in \mathbb{N}^*$, soit

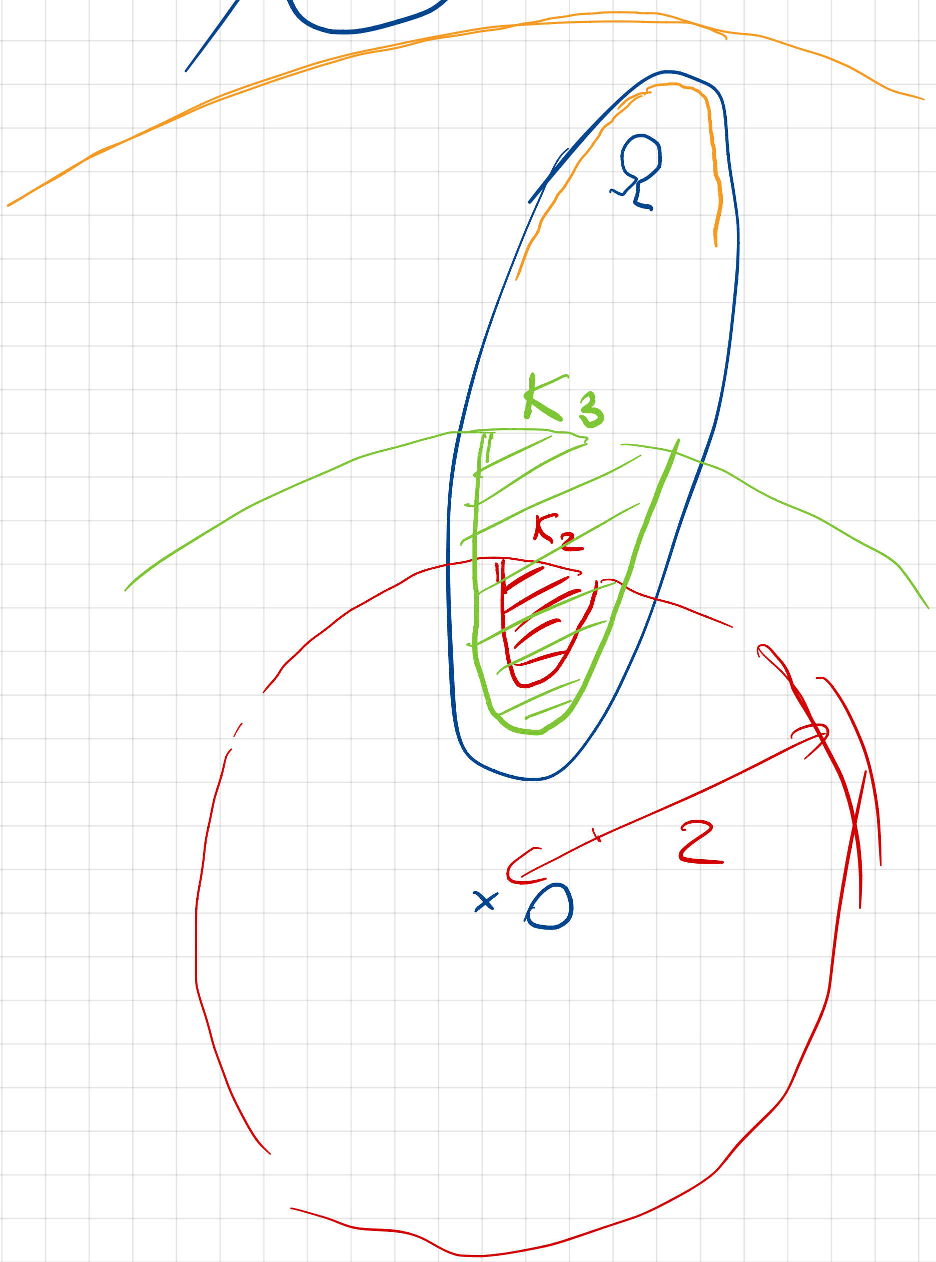
$$K_j := \left\{ x \in \mathbb{R}^d \, ; \, |x| \leq j \text{ et } d(x, \complement\Omega) \geq \frac{1}{j} \right\}.$$

Alors

i) $\forall j \in \mathbb{N}^*$, K_j est un sous-ensemble compact de Ω et $K_j \subset \mathring{K}_{j+1}$,

ii) $\bigcup_{j \in \mathbb{N}^*} \mathring{K}_j = \Omega$

iii) Si $K \subset \Omega$ est un ensemble compact, alors il existe $j \in \mathbb{N}^*$ tel que $K \subset K_j$



Remarque Une suite de sous-ensembles compacts de Ω vérifiant les conditions i), ii) et iii) est appelée une <u>suite exhaustive</u> de compacts de Ω.

Exercice 5. Démontrer le Lemme 1.

☐

Par la suite, $(K_j)_j$ est toujours la suite exhaustive de compacts définie dans le Lemme 1.

Définition (Semi-normes et pseudo-boules)
Soit $k \in \mathbb{N}$ et $u \in C^k(\Omega)$. Pour tout $j \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$p_j^k(u) := \sum_{|\alpha| \leq k} \sup_{x \in K_j} |\partial^\alpha u(x)| .$$

Pour $k \in \mathbb{N}$, $j \in \mathbb{N}^*$ et $\varepsilon > 0$, on pose

$$V_j^k(\varepsilon) := \{ u \in C^k(\Omega) \; ; \; p_j^k(u) < \varepsilon \}$$

(pseudo-boule de centre 0 et de rayon ε).

Définition (Topologie sur $C^k(\Omega)$)
Soit $k \in \mathbb{N}$ et $\mathcal{U} \subset C^k(\Omega)$. On dit que $\mathcal{U}$ est un ensemble <u>ouvert</u> dans $C^k(\Omega)$ si pour tout $u \in \mathcal{U}$ il existe $j \in \mathbb{N}^*$ et $\varepsilon > 0$ tels que

$$u + V_j^k(\varepsilon) := \{ u + v \; ; \; v \in V_j^k(\varepsilon) \} \subset \mathcal{U} . \quad \boxtimes$$

Pour montrer que cette condition définit une topologie, il suffit, comme on l'a vu au Chapitre I, que la famille $(p_j^k)_j$ soit séparante, ce qui est vrai.

Rqe
$(p_j^k)_j$ est une famille séparante, croissante

$p_j^k(u) = 0 \quad \forall j$

$\Longrightarrow \quad |u(x)| = 0 \quad \forall x \in K_j \quad \forall j.$

$\Longrightarrow \quad |u(x)| = 0 \quad \forall x \in \underbrace{\bigcup K_j}_{= \Omega}$

$$\underbrace{\{ w \; ; \; p_j^k(w-u) < \varepsilon \}}_{= u + V} \subset \mathcal{U} .$$

Définition (Topologie sur $C^\infty(\Omega)$)
Soit $\mathcal{U} \subset C^\infty(\Omega)$. On dit que $\mathcal{U}$ est un ensemble <u>ouvert</u> dans $C^\infty(\Omega)$ si pour tout $u \in \mathcal{U}$ il existe $k \in \mathbb{N}$, $j \in \mathbb{N}^*$ et $\varepsilon > 0$ tels que

$$\{ u + v \, ; \, v \in C^\infty(\Omega) \cap V_j^k(\varepsilon) \} \subset \mathcal{U}.$$

$$\{ w \, ; \, p_j^k(w-u) < \varepsilon \} \subset \mathcal{U}.$$

Remarque La topologie est définie ici par la famille <u>dénombrable</u> de semi-normes (p_j^k), indexée par $j \in \mathbb{N}^*$ et $k \in \mathbb{N}$. On est donc toujours dans le cadre du Chapitre I.

Exercice 6. Montrer que c'est la moins fine topologie sur $C^\infty(\Omega)$ telle que pour tout $k \in \mathbb{N}$ l'injection $C^\infty(\Omega) \subset C^k(\Omega)$ est continue.

Proposition Soit $k \in \mathbb{N}$ et $(u_n)_n$ une suite d'éléments de $C^k(\Omega)$. Les conditions suivantes sont équivalentes :
i) $u_n \to u$ dans $C^k(\Omega)$, pour la topologie ci-dessus,
ii) $\forall K \subset \Omega$ compact et $\forall \alpha \in \mathbb{N}^d$ avec $|\alpha| \leq k$,
$\partial^\alpha u_n \to \partial^\alpha u$ uniformément sur K.

Démonstration. Rappelons que, par le Lemme 1 du Chapitre I, $u_n \to u$ si et seulement si

$$\lim_{n\to\infty} p_j^k(u_n - u) = 0, \quad \text{pour tout } j.$$

En remplaçant u_n par $u_n - u$, on se ramène au cas $u = 0$.

i) $\Rightarrow$ ii) Soit j tel que $K \subset K_j$.

Alors $\lim_{n\to\infty} p_j^k(u_n)=0 \Rightarrow \partial^\alpha u_n \to 0$ unif. sur K_j, donc aussi sur K, pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^d$ tq $|\alpha| \leq k$.

ii) $\Rightarrow$ i) K_j est un compact, donc
$$\lim_{n\to\infty} p_j^k(u_n) = 0. \qquad \square$$

Proposition Soit $(u_n)_n$ une suite d'éléments de $C^\infty(\Omega)$. Les conditions suivantes sont équivalentes :

i) $u_n \to u$ dans $C^\infty(\Omega)$, pour la topologie ci-dessus,

ii) $\forall K \subset \Omega$ compact et $\alpha \in \mathbb{N}^d$,
$$\partial^\alpha u_n \to \partial^\alpha u \quad \text{uniformément sur } K.$$

Exercice 7. Démontrer cette proposition. $\boxtimes$

Théorème 1. Pour tout $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ouvert et $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, $C^k(\Omega)$ est un espace de Fréchet. $\boxtimes$

Avant de démontrer ce théorème, rappelons le fait suivant.

Lemme Si $(f_n)_n$ une suite de fonctions $C^1((a,b))$ telle que $f_n \to f$ et $f_n' \to g$ uniformément sur (a,b), où f et g sont des fonctions bornées continues, alors $f \in C^1((a,b))$ et $f' = g$.

Démonstration Soit $c \in (a,b)$ et
$$\tilde{f}(x) := f(c) + \int_c^x g(y)\,dy, \quad \forall x \in (a,b).$$

On sait que $f_n(x) = f_n(c) + \int_c^x f_n'(y)\,dy$.

On en déduit que $f_n(x) \to \tilde{f}(x)$, donc $f = \tilde{f}$. $\square$

l'idée étant que $\tilde{f} = f$.

Directement on voit que $\tilde{f}' = g$

Rappel

$BC^k((0,1))$ espace des fonctions k fois différentiables $(0,1) \to \mathbb{C}$ avec la norme
$$\|f\|_{BC^k} := \sum_{j \leq k} \sup_{x \in (0,1)} |f^{(j)}(x)|.$$

BC^k est ~~de~~ un espace de Banach.

On obtient facilement une version en dimension d :

Lemme Soit $J := (a_1, b_1) \times \ldots \times (a_d, b_d) \subset \mathbb{R}^d$ et $(f_n)_n$ une suite de fonctions $C^1(J)$ telle que $f_n \to f$ et $\partial_{x_i} f_n \to g_i$ uniformément sur J, où f et g_i sont des fonctions bornées continues, alors $f \in C^1(J)$ et $\partial_{x_i} f = g_i$.

Démonstration En fixant toutes les variables sauf une et en appliquant le lemme précédent, on trouve que $\partial_{x_i} f = g_i$.

Corollaire Soit $J := (a_1, b_1) \times \ldots \times (a_d, b_d) \subset \mathbb{R}^d$, $k \in \mathbb{N}$ et $(f_n)_n$ une suite de fonctions $C^k(J)$ telle que $\partial^\alpha f_n \to g_\alpha$ uniformément sur J, $\forall \alpha \in \mathbb{N}^d$ tq $|\alpha| \leq k$, où g_α sont des fonctions bornées continues, alors $f := \lim_{n\to\infty} f_n \in C^k(J)$ et $\partial^\alpha f = g_\alpha$ $\forall |\alpha| \leq k$.

Démonstration Récurrence par rapport à k.

Pour $k = 1$ c'est le dernier lemme.

Soit $k \geq 2$. On obtient, par l'hypothèse de récurrence, $g_i := \lim_{n\to\infty} \partial_{x_i} f_n \in C^{k-1}(J)$.

Comme $\partial_{x_i} f = g_i$, on obtient la conclusion.

L'hypothèse de récurrence appliquée à $\partial_{x_i} f_n$.

Démonstration du Théorème 1.

Considérons d'abord le cas $k \in \mathbb{N}$.

Soit $(u_n)_n$ une suite de Cauchy.

Par le Lemme 1 du Chapitre I, on voit que $\partial^\alpha u_n|_{\mathring{K}_j}$ est une suite de Cauchy pour la norme sup, $\forall |\alpha| \leq k$ et $j \in \mathbb{N}^*$.

Lemme 1 $\Rightarrow$

$\forall \varepsilon > 0$ $\forall j$ $\exists N_0$:

$$\sum_{|\alpha| \leq k} \sup_{K_j} |\partial^\alpha (u_m - u_n)| < \varepsilon$$

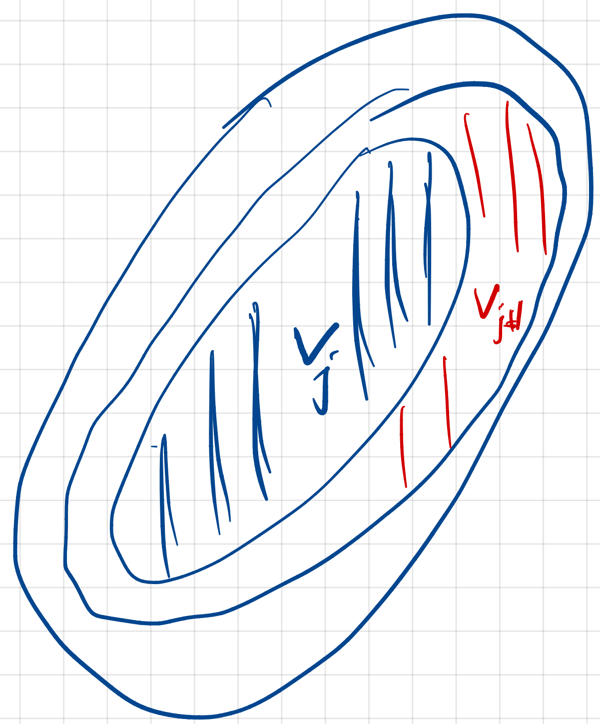
si $m, n \geq N_0$.

On déduit du Corollaire que, pour tout $j \in \mathbb{N}^*$
il existe $v_j \in C^k(\mathring{K}_j)$ tq

$$\partial^\alpha u_n \longrightarrow \partial^\alpha v_j \quad \text{unif. sur} \quad \mathring{K}_j .$$

On définit une fonction $v : \Omega \to \mathbb{C}$
par la condition $v(x) = v_j(x)$ si $x \in \mathring{K}_j$.
Alors v est bien défini, $v \in C^k(\Omega)$
et $u_n \longrightarrow v$ dans $C^k(\Omega)$.

La preuve dans le cas $C^\infty(\Omega)$ est similaire.



$$v_j = v_{j+1}\big|_{\mathring{K}_j}$$

2. Fonctions de classe C^k à support compact.

Définition Soit $u \in C(\Omega)$. On appelle le support de u l'ensemble

$$\operatorname{supp} u := \Omega \cap F \quad \text{où} \quad F := \overline{\{x \in \Omega \,;\, u(x) \neq 0\}}$$

Comme F est un fermé de $\mathbb{R}^d$, $\operatorname{supp} u$ est un fermé de Ω. Il est caractérisé par

$x_0 \in \Omega \setminus \operatorname{supp} u \Leftrightarrow x_0 \in \Omega$ et $\exists\, \varepsilon > 0$ tel que

$$|x - x_0| < \varepsilon \Rightarrow u(x) = 0.$$

Proposition L'ensemble $\Omega \setminus \operatorname{supp} u$ est le plus grand ouvert sur lequel la fonction u soit nulle.

Démonstration Soit U un ouvert tel que $u(x) = 0$ pour tout $x \in U$, et soit $x_0 \in U$.

Alors il existe $\varepsilon > 0$ tel que $|x - x_0| < \varepsilon \Rightarrow x \in U$
$\Rightarrow u(x) = 0$, donc $x_0 \in \Omega \setminus \operatorname{supp} u$.

Cela signifie que $U \subset \Omega \setminus \operatorname{supp} u$. $\square$

Définition Soit $K \subset \Omega$ un compact, $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$.

On note $C^k_K(\Omega) := \{u \in C^k(\Omega) \,;\, \operatorname{supp} u \subset K\}$

l'espace des fonctions C^k à support inclus dans K.

Remarque On voit que $C^\infty_K(\Omega) = \bigcap_{k \in \mathbb{N}} C^k_K(\Omega)$.

Définition (semi-normes)

Si $K \subset \Omega$ compact, $k \in \mathbb{N}$ et $u \in C^k_K(\Omega)$,

on pose $p^k_K(u) := \sum_{|\alpha| \leq k} \sup_{x \in K} |\partial^\alpha u(x)|$.

Proposition 1) Si $K \subset \Omega$ compact et $k \in \mathbb{N}$, alors $C^k_K(\Omega)$, muni de la norme p^k_K, est un espace de Banach.

2) Si $K \subset \Omega$ compact, alors $C^\infty_K(\Omega)$, muni de la famille des semi-normes $(p^k_K)_k$, est un espace de Fréchet.

Démonstration 1) $C^k_K(\Omega)$ est un sous-espace fermé de $C^k(\Omega)$, donc il suffit de vérifier que p^k_K induit la même topologie que la famille des semi-normes $(p^k_j)_j$.

Mais d'un côté, il est clair que $p^k_j(u) \geq p^k_K(u)$ si j est tel que $K \subset K_j$.

D'un autre côté, $p^k_j(u) \leq p^k_K(u)$ pour tout j, si $\operatorname{supp} u \subset K$.

2) La preuve est similaire, et laissée comme exercice.

Remarque Si $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ et si on pose, pour $x \in \mathbb{R}^d$,

$\tilde{u}(x) = u(x)$ si $x \in \Omega$ et $\tilde{u}(x) = 0$ si $x \notin \Omega$,

alors $\tilde{u} \in C^k(\mathbb{R}^d)$. En prolongeant par zéro une fonction de $C^k_K(\Omega)$, on obtient une fonction de $C^k_K(\mathbb{R}^d)$.

Définition Soit $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$. On note

$$C^k_0(\Omega) := \{u \in C^k(\Omega) \,;\, \text{supp } u \text{ est un compact de } \mathbb{R}^d \text{ inclus dans } \Omega\}.$$

On a donc $C^k_0(\Omega) = \bigcup_{\substack{K \text{ compact} \\ K \subset \Omega}} C^k_K(\Omega)$.

Si $k = \infty$, on note aussi $C^\infty_0(\Omega) = \mathcal{D}(\Omega)$. $\boxtimes$

On voit immédiatement que $C^k_0(\Omega)$ est un espace vectoriel.

Remarque Dans la littérature, on considère souvent $C^k_0(\Omega)$ muni de la "topologie inductive", mais nous n'allons pas le faire ici.

3. Approximation par convolution

Il n'est pas évident si l'espace $C_0^\infty(\Omega)$ contient des fonctions autres que la fonction identiquement nulle. Pour examiner cette question, on commence par le lemme suivant.

Lemme 1 Il existe une fonction $\rho \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$ telle que $\operatorname{supp} \rho = \overline{B(0,1)}$,

$\rho(x) > 0$ pour tout x tq $|x| < 1$, et $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^d} \rho(x)\,dx = 1$.

Démonstration Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(t) = \begin{cases} e^{-1/t} & \text{si } t > 0 \\ 0 & \text{si } t \leq 0. \end{cases}$$

Alors $f \in C^\infty(\mathbb{R})$.

Soit $\tilde{\rho}(x) := f(1 - |x|^2)$.

On a $\tilde{\rho} \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$, $\operatorname{supp} \tilde{\rho} = \overline{B(0,1)}$

et $\tilde{\rho}(x) > 0$ pour tout x tq $|x| < 1$.

Enfin, posons
$$\rho(x) := \frac{\tilde{\rho}(x)}{\int_{\mathbb{R}^d} \tilde{\rho}(y)\,dy}.$$

$\square$

Si $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ et $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^d)$, on pose

$$(\varphi * f)(x) := \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(x-y)\, f(y)\,dy \qquad (*)$$

Observons que, pour tout $x \in \mathbb{R}^d$, $y \mapsto \varphi(x-y)$ est une fonction lisse à support compact, donc l'intégrale $(*)$ converge.

<u>Lemme</u> Si $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ et $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^d)$, alors $\varphi * f \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$ et

$$\partial^\alpha(\varphi * f) = (\partial^\alpha \varphi) * f, \qquad \forall \alpha \in \mathbb{N}^d.$$

<u>Démonstration</u>

Il suffit de montrer que $\varphi * f \in C^1(\mathbb{R}^d)$ et que $\partial_{x_j}(\varphi * f) = (\partial_{x_j}\varphi) * f$, $\forall j \in \{1, \dots, d\}$. En effet, une simple récurrence finira alors la preuve.

Montrons d'abord que $\varphi * f \in C(\mathbb{R}^d)$.

Soit $x \in \mathbb{R}^d$ et $(x_n)_n$ une suite tq $x_n \to x$.

Soit $R \in \mathbb{R}$ tq $\operatorname{supp} \varphi \subset B(0, R)$.

Pour n assez grand,

$$\operatorname{supp} \varphi(x_n - \cdot) \subset B(0, R + |x| + 1),$$ et

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{y \in \mathbb{R}^d} |\varphi(x_n - y) - \varphi(x - y)| = 0,$$ donc

$$\lim_{n\to\infty} |(\varphi * f)(x_n) - (\varphi * f)(x)| =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left| \int_{\mathbb{R}^d} (\varphi(x_n - y) - \varphi(x - y)) f(y)\, dy \right|$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left| \int_{B(0, R+|x|+1)} (\varphi(x_n - y) - \varphi(x - y)) f(y)\, dy \right|$$

$$\leqslant \lim_{n\to\infty} \int_{B(0, R+|x|+1)} |\varphi(x_n - y) - \varphi(x - y)|\, |f(y)|\, dy = 0.$$

Montrons maintenant que $\partial_{x_j}(\varphi * f)(x)$ existe et est égale à $((\partial_{x_j}\varphi) * f)(x)$.

Soit $e_j := (0, \dots, 1, 0, \dots)$. Il faut vérifier que

$$\left|(\varphi * f)(x + te_j) - (\varphi * f)(x) - t((\partial_{x_j}\varphi) * f)(x)\right| = o(t)$$

quand $t \to 0$.

On observe que, si $|t| < 1$, alors

$$|(\varphi * f)(x+te_j) - (\varphi * f)(x) - t((\partial_{x_j}\varphi) * f)(x)| =$$

$$= \left| \int_{\mathbb{R}^d} \left(\varphi(x + te_j - y) - \varphi(x-y) - t\partial_{x_j}\varphi(x-y)\right) f(y)\, dy \right|$$

$$= \left| \int_{B(0, R+|x|+1)} \left(\varphi(x + te_j - y) - \varphi(x-y) - t\partial_{x_j}\varphi(x-y)\right) f(y)\, dy \right|$$

Par la formule de Taylor, cela s'estime par

$$t^2 \sup_z |\partial_{x_j}^2 \varphi(z)| \int_{B(0,R+|x|+1)} |f(y)|\, dy = o(t)$$

<u>Remarque</u> On dit qu'une fonction mesurable $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$ est à support compact s'il existe $K \subset \Omega$ compact tq $f(x) = 0$ pour presque tout $x \in \Omega \setminus K$. On voit que, si f est à support compact, alors $\varphi * f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$.

Bibliographie

* Jean-Marc DELORT, "Distributions", notes de cours.
* Claude ZUILY, "Éléments de distributions et d'équations aux dérivées partielles", DUNOD, 2002
* Laurent SCHWARTZ, "Théorie des distributions", Hermann, Paris 1966
* Gerd GRUBB, "Distributions and operators", Springer, 2009